

PENGANTAR TEORI PELUANG

Pendahuluan

Sebagai seorang guru, kita sering berhadapan dengan skor-skor hasil tes siswa. Misalkan seorang siswa memperoleh skor asli (apa adanya / belum diolah) dari empat kali tes matematika dalam satu semester adalah 8, 7, 8, 9. Kumpulan bilangan itu merupakan data mentah. Misalkan pula, 3, 0, 2, 4 yang menyatakan banyaknya kecelakaan lalu lintas di suatu daerah dalam empat bulan pertama suatu tahun juga merupakan data mentah. 100 cm, 120, cm, 180 cm, 150 cm yang menyatakan tinggi badan orang-orang dalam suatu keluarga juga merupakan data mentah. Dengan demikian, *data mentah* merupakan informasi yang dicatat dan dikumpulkan, baik dalam bentuk hitungan maupun pengukuran. Proses yang menghasilkan data mentah disebut *percobaan*. Pengetahuan kita tentang ruang sampel, kejadian, dan titik sampel sangat diperlukan agar kita dapat memperoleh gambaran lebih lengkap dalam memahami suatu percobaan. Pada kegiatan belajar ini, kita membahas ruang sampel, kejadian, dan titik sampel.

Sebagai acuan utama bahan belajar mandiri ini adalah buku karangan Billstein, Liberskind, dan Lot (1993), *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers*; Ruseffendi, H.E.T (1998), *Statistika Dasar untuk Penelitian Pendidikan*; dan Sudjana (1989), *Metoda Penelitian*. Walpole, R.E. dan Myers, R.H. (1986), *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan* (terjemahan oleh Sembiring, R.K.).

Setelah mempelajari dan mengerjakan latihan-latihan yang ada pada bahan belajar mandiri ini, anda diharapkan dapat:

1. Menyebutkan arti percobaan, ruang sampel, kejadian, dan titik sampel.
2. Menentukan ruang sampel dari suatu percobaan.
3. Menentukan banyak kejadian tertentu dari suatu perconaan.

4. Menentukan banyak titik sampel dari suatu percobaan.
5. Menentukan permutasi dari suatu perconaan.
6. Menentukan kombinasi dari suatu percobaan.
7. Mengetahui makna distribusi peluang.

Kegiatan Belajar 1

Ruang Sampel dan Titik Sampel

Ruang Sampel

Pada bagian pendahuluan telah disinggung tentang data mentah dan percobaan. Sebagai contoh percobaan adalah pengetosan mata uang logam dan pengetosan dadu. Pada pengetosan mata uang logam, percobaan ini hanya menghasilkan 2 buah kemungkinan, yaitu “muka” dan belakang, dan pada pengetosan dadu untuk melihat angka yang di bagian atas, kemungkinan yang dihasilkan adalah 1, 2, 3, 4, 5, dan 6.

Dalam banyak hal, percobaan tidak dapat memberikan hasil yang pasti. Meskipun kita melakukan pengetosan uang logam beberapa kali, kita tidak dapat memastikan bahwa pengetosan tertentu akan menghasilkan “muka”, dan pengetosan lainnya akan menghasilkan “belakang”. Meskipun demikian, kita mengetahui bahwa setiap percobaan pasti ada unsur peluang, dan kita mengetahui seluruh kemungkinan yang dapat terjadi dari suatu percobaan. Seluruh kemungkinan itu disebut dengan *ruang sampel* dan dilambangkan dengan S . Tiap hasil dalam ruang sampel disebut *unsur* atau *titik sampel*. Bila ruang sampel S yang merupakan semua hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan mempunyai unsur yang hingga banyaknya, maka unsur atau titik sampel itu dapat didaftar dan ditulis diantara dua alokade. Pada pengetosan mata uang logam, unsur atau titik sampel muka dan belakang dapat ditulis sebagai $S = \{M, B\}$. Bila ruang sampel S berukuran besar atau mempunyai unsur yang tak hingga banyaknya maka unsur-unsur itu akan lebih mudah ditulis dengan suatu pernyataan atau aturan. Misalkan, bila hasil dari suatu percobaan adalah orang-orang Jakarta yang mempunyai mobil dua atau lebih maka ruang sampelnya dapat ditulis sebagai

$$S = \{x \mid x \text{ orang Jakarta yang mempunyai mobil dua atau lebih}\}$$

dibaca, “S adalah kumpulan x, jika x menyatakan orang Jakarta yang mempunyai mobil dua atau lebih”.

Contoh 1.

Percobaan pengetosan sebuah dadu adalah angka yang muncul di bagian atas, maka ruang sampelnya adalah

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Bila percobaan pengetosan dadu itu adalah bilangan genap atau ganjil, maka ruang sampelnya adalah

$$S = \{\text{genap, ganjil}\}$$

Pada contoh di atas tampak bahwa suatu percobaan dapat menghasilkan lebih dari satu ruang sampel. Dari ruang sampel pertama dan ke dua, mana yang paling banyak memberikan informasi kepada kita?

Kejadian

Pada setiap percobaan, mungkin kita ingin mengetahui kejadian tertentu. Kejadian tertentu itu mungkin berupa satu atau lebih titik sampel pada ruang sampel, atau mungkin bukan titik sampel pada ruang sampel. Jika kejadian itu hanya memuat satu titik sampel pada ruang sampel, maka kejadian itu disebut kejadian sederhana. Jika kejadian itu merupakan gabungan dari kejadian-kejadian sederhana, maka kejadian itu disebut kejadian majemuk. Misalkan pada percobaan pengetosan sebuah dadu, kita ingin mengetahui hasil pengetosan dadu adalah bilangan yang habis dibagi 2. Hal ini berarti yang kita kehendaki adalah kejadian munculnya bilangan yang habis dibagi 2, yaitu $A = \{2, 4, 6\}$. Tiap kejadian berkaitan dengan sekumpulan titik sampel dari suatu ruang sampel membentuk himpunan bagian dari ruang sampel itu. Pada contoh di atas, jelas bahwa kejadian $A = \{2, 4, 6\}$ merupakan himpunan bagian dari ruang sampel $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Dengan demikian, kejadian dapat didefinisikan sebagai himpunan bagian dari ruang sampel.

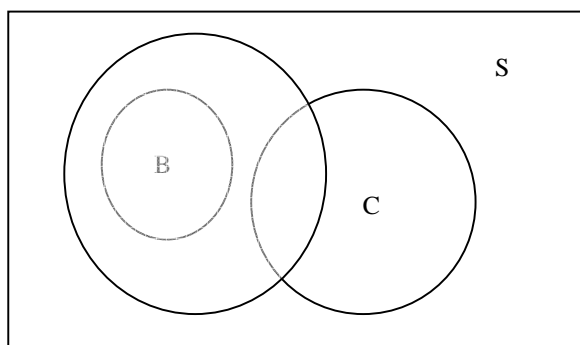
Contoh 2.

Pada penarikan sebuah kartu heart dari sekotak kartu bridge merupakan himpunan bagian $A = \{\text{heart}\}$ dari ruang sampel $S = \{\text{heart, spede, club, diamond}\}$. Jadi A merupakan

kejadian sederhana. Pada penarikan sebuah kartu merah B dari ruang sampel $S = \{\text{heart, spede, club, diamond}\}$ merupakan kejadian majemuk karena $B = \{\text{heart} \cup \text{diamond}\} = \{\text{heart, diamond}\}$.

Misalkan A merupakan kejadian menemukan x anggota bilangan real dari persamaan $x^2 + 1 = 0$, maka $A = \emptyset$; begitu pula bila $B = \{x \mid x \text{ faktor } 7 \text{ yang bukan prima}\}$, maka $B = \emptyset$. A dan B di atas merupakan *ruang nol* atau *ruang hampa*. Himpunan bagian ruang sampel yang tidak memuat titik sampel disebut ruang nol atau ruang hampa, dan dilambangkan dengan \emptyset

Hubungan antara kejadian dan ruang sampel padanannya dapat digambarkan dengan diagram venn. Dalam suatu diagram venn, ruang sampel dapat digambarkan dengan empat persegi panjang dan kejadian dinyatakan dengan lingkaran di dalamnya. kejadian A, B, dan C merupakan himpunan-himpunan bagian dari ruang sampel S. Juga tampak bahwa kejadian B merupakan himpunan bagian kejadian A; kejadian B dan C tidak mempunyai titik sampel yang sama; A dan C mempunyai paling sedikit satu titik sampel yang sama (coba buatlah diagram vennnya!).



Misalkan seorang menarik sebuah kartu dari dari kelompok 52 kartu bridge dan terjadinya kejadian adalah sebagai beriku:

A: kartu yang ditarik berwarna merah.

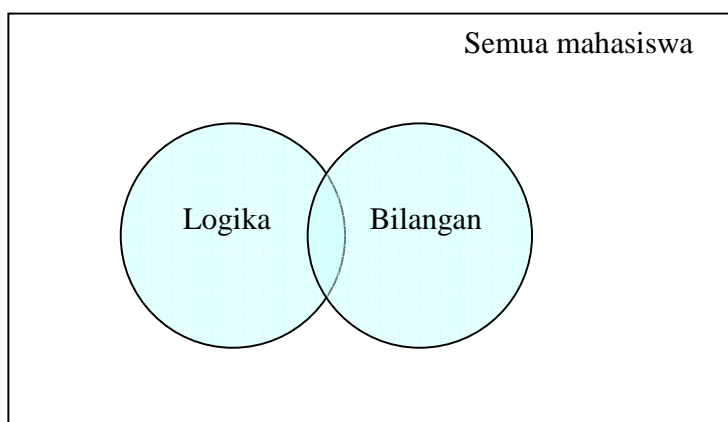
B: kartu yang ditarik jack, queen, atau king diamond.

C: kartu yang ditarik as.

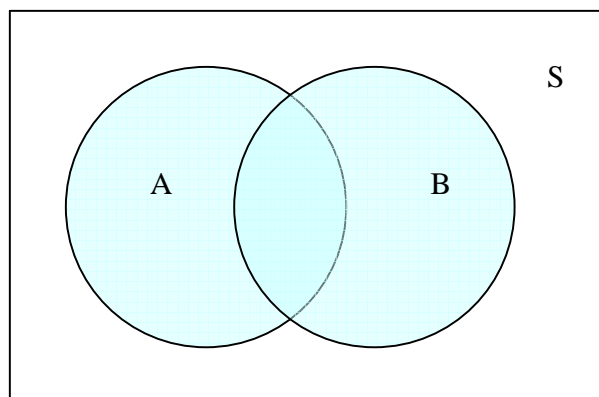
Kartu apakah titik sampel persekutuan A dan C?

Jelas bahwa titik sampel bersama (persekutuan) antara A dan C adalah dua as merah (as heart dan as diamond).

Kejadian mahasiswa yang mengambil mata kuliah logika dan matakuliah bilangan masing-masing dinyatakan dengan daerah yang diarsir. Daerah yang terarsir dua kali menyatakan mahasiswa yang mengambil kedua matakuliah tersebut, sedangkan daerah yang tidak terkena arsir sama sekali menyatakan mahasiswa yang tidak mengambil kedua matakuliah tersebut.



Suatu kejadian yang unsurnya termasuk dalam kejadian A dan kejadian B disebut irisan dua kejadian A dan B, dilambangkan $A \cap B$. Unsur-unsur tersebut dapat didaftar, yaitu $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$. Lambang " \in " berarti "anggota" atau "termasuk dalam". $A \cap B$ dapat dinyatakan dalam diagram venn, yaitu:



Contoh 3.

Misalkan $P = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ dan $Q = \{6, 7, 8, 9\}$ maka $A \cap B = \{6, 7\}$.

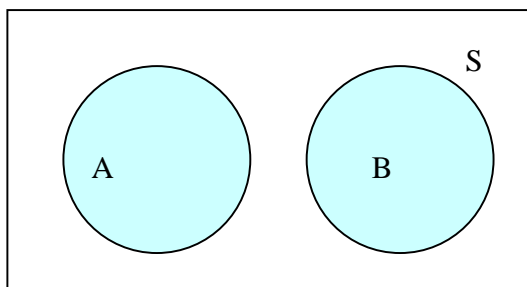
Contoh 4.

Misalkan A menyatakan kejadian siswa yang dipilih secara acak di suatu ruang kelas adalah menyukai matematika. B menyatakan kejadian siswa yang dipilih secara acak di ruang kelas itu adalah menyukai IPA. Maka $A \cap B$ menyatakan himpunan siswa di suatu ruang kelas yang menyukai matematika dan IPA.

Contoh 5.

Misalkan A menyatakan kejadian wanita yang suka menari yang dipilih secara acak di suatu ruang kelas. B menyatakan kejadian pria yang suka sepak bola yang dipilih secara acak di ruang kelas itu. Maka $A \cap B = \emptyset$, yang berarti A dan B tidak mempunyai unsur persekutuan atau dengan kata lain, tidak ada unsur dari himpunan bagian A yang merupakan unsur dari himpunan bagian B.

Kita memerlukan suatu definisi untuk dua kejadian tak mungkin terjadi sekaligus. Kedua kejadian ini dikatakan saling terpisah. Dua buah kejadian A dan B saling lepas jika $A \cap B = \emptyset$. Dua buah kejadian ini dapat diilustrasikan dalam diagram venn berikut:



Dari diagram venn di atas tampak bahwa tidak ada daerah sekutu antara A dan B, sehingga $A \cap B = \emptyset$.

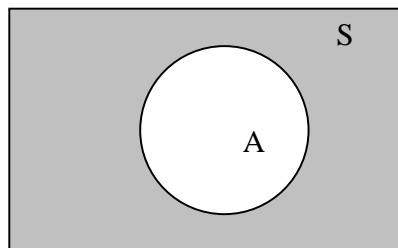
Contoh 6.

Pada pengotosan sebuah dadu, misalkan A menyatakan kejadian bilangan genap muncul di bagian atas, dan B menyatakan kejadian bilangan ganjil muncul di bagian atas. Kejadian A dan B itu dapat kita tulis dengan $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$. Dua kejadian

ini tidak mempunyai titik sekutu, karena bilangan genap dan ganjil tidak mungkin muncul sekaligus (bersama-sama) pada pengetosan sebuah dadu. Jadi $A \cap B = \emptyset$.

Sering kali kita ingin mengetahui salah satu dari dua kejadian A atau B. Kejadian seperti ini kita sebut dengan gabungan dari A dan B; dan hal ini terjadi jika hasilnya adalah unsur dari kedua himpunan bagian itu. Lambang untuk gabungan ini adalah “ \cup ”. Dengan demikian, $A \cup B$ ialah kejadian yang mengandung semua unsur yang termasuk A, B, atau keduanya. Sebagai ilustrasi, jika $A = \{2, 4, 6\}$ dan $B = \{1, 3, 5\}$, maka $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Misalkan kejadian A adalah himpunan bagian dari ruang sampel S. Seringkali kita ingin mengetahui kejadian di luar A tetapi masih di dalam S. Kejadian seperti ini dinamakan *komplemen* suatu kejadian A terhadap S dan dilambangkan A' . Unsur A' dapat didaftar atau ditentukan dengan aturan $A' = \{x \mid x \in S \text{ dan } x \notin A\}$. Dalam diagram venn, daerah yang menyatakan unsur kejadian A' diarsir atau digelapkan.



Sebagai ilustrasi, misalkan P menyatakan kejadian seorang siswa yang dipilih secara acak dari suatu kelas adalah pria. Maka P' menyatakan kejadian siswa yang dipilih dari kelas itu adalah bukan pria. Misal pula, ruang sampel $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Jika $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, maka $A' = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

Berikut ini beberapa sifat kejadian yang dapat dengan mudah diperiksa kebenarannya melalui diagram venn.

1. $A \cap \emptyset = \emptyset$.
2. $A \cup \emptyset = A$.
3. $A \cap A' = \emptyset$
4. $A \cup A' = S$

5. $S' = \emptyset$
6. $(A')' = A$

Titik Sampel

Sering kali kita berhadapan dengan unsur kemungkinan dari suatu kejadian tertentu bila suatu percobaan dilakukan. Dalam beberapa hal, suatu soal peluang dapat diselesaikan dengan menghitung titik sampel dalam ruang sampel. Kita akan mulai pembahasan ini, dengan memperhatikan sifat berikut ini.

Sifat 1

Jika suatu operasi dapat dilakukan dengan n_1 cara, dan jika untuk setiap cara ini operasi ke dua dapat dikerjakan dengan n_2 cara, maka kedua operasi itu dapat dikerjakan bersama-sama dengan $n_1 n_2$ cara.

Sebagai ilustrasi, jika sepasang dadu dilemparkan sekali, maka banyaknya titik sampel adalah 36. Hal ini karena dadu pertama dapat menghasilkan 1 dari enam kemungkinan. Untuk setiap posisi tersebut, dadu kedua dapat pula menghasilkan 6 kemungkinan. Jadi pasangan dadu itu dapat menghasilkan $6 \times 6 = 36$ kemungkinan. (Silahkan tulis unsur-unsurnya itu).

Sifat 1 di atas dapat diperluas dengan banyaknya operasi adalah k . Dengan demikian, kita memperoleh sifat berikut:

Sifat 2

Jika suatu operasi dapat dilakukan dengan n_1 cara, dan jika untuk setiap cara ini operasi ke dua dapat dikerjakan dengan n_2 cara, jika untuk setiap cara ini operasi ke tiga dapat dikerjakan dengan n_3 , dan seterusnya, maka deretan k operasi dapat dikerjakan dengan $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$ cara.

Contoh 7.

Misalkan seseorang akan memakai sepatu, kaos kaki, celana, dan baju untuk berangkat kerja. Ia mempunyai 2 pasang sepatu, 3 pasang kaos kaki, 5 baju, dan 4 celana. Maka ia mempunyai pilihan memakai sepatu, kaos kaki, baju, dan celana sebanyak:

$$2 \times 3 \times 5 \times 4 = 120.$$

Permutasi

Sering kali kita juga menginginkan ruang sampel yang unsurya terdiri dari semua urutan yang mungkin. Misalkan kita ingin mengetahui banyaknya susunan yang dapat dibuat bila 6 orang didudukkan mengelilingi suatu meja. Susunan yang berlainan itu merupakan permutasi.

Definisi

Permutasi adalah suatu susunan yang dapat dibentuk dari suatu kumpulan benda yang diambil sebagian atau seluruhnya.

Jika ada 3 huruf a, b, dan c; maka permutasi yang dapat dibuat adalah abc, acb, bac, bca, cab, dan cba. Tampak bahwa ada 6 susunan berlainan. Ada 3 tempat yang harus diisi oleh a, b, dan c. Jadi ada 3 pilihan untuk tempat pertama, 2 pilihan untuk tempat ke dua, dan 1 pilihan untuk tempat ke tiga, sehingga semuanya menjadi $3 \times 2 \times 1 = 6$ permutasi. Secara umum, jika ada n benda berlainan, maka kita dapat menyusun benda itu sebanyak $n(n - 1)(n - 2) \dots (3)(2)(1)$ cara. Perkalian ini ditulis dengan lambang $n!$, dibaca “n faktorial”. 3 benda dapat disusun dengan $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ cara. Untuk 1! dan 0! Berturut-turut didefinisikan $1! = 1$ dan $0! = 1$.

Sifat 3.

Banyak permutasi n benda berlainan adalah $n!$

Dengan menggunakan sifat 3, maka banyaknya permutasi dari 4 huruf berlainan adalah $4! = 24$.

Misalkan kita ingin mengetahui banyaknya permutasi yang dapat dibuat dari 4 huruf a, b, c, dan d bila 2 huruf diambil sekaligus. Permutasi itu adalah ab, ac, ad, ba, ca, da, bc, bd, cb, db, cd, dan dc. Dengan menggunakan sifat 2, ada 2 tempat untuk diisi dengan 4 pilihan untuk tempat yang pertama dan ada 3 pilihan untuk tempat yang ke dua, sehingga seluruhnya ada $4 \times 3 = 12$ permutasi. Secara umum, kita dapat menurunkan sebuah sifat, yaitu:

Sifat 4.

Jika n benda berlainan diambil r sekaligus maka dapat disusun dalam $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - r)$ cara; dan perkalian ini ditulis dengan lambang,

$${}_n P_r = n! / (n - r)!$$

Sebagai ilustrasi, misalkan ada 20 nama A, B, C, ..., T. Dari 20 nama itu diambil 2 nama secara acak. Dengan menggunakan rumus di atas, maka banyak titik sampel dalam ruang sampel S adalah

$$\begin{aligned} {}_{20}P_2 &= 20! / (20 - 2)! \\ &= 20 \times 19 \\ &= 380. \end{aligned}$$

Permutasi yang dibuat dengan menyusun benda secara melingkar atau siklis disebut permutasi melingkar atau *permutasi siklis*. Permutasi ini merupakan permutasi yang unsur-unsurnya ada pada kedudukan melingkar, misalnya kedudukan titik A, B, dan C pada segitiga ABC. Kedudukan A, B, dan C pada segitiga itu ada 2 macam. Jadi permutasi siklisnya ada 2, yaitu: pertama, ABC atau BCA atau CAB, dan kedua ACB atau CBA atau BAC. Untuk empat unsur A, B, C, dan D, permutasi siklisnya ada 6, yaitu ABCD, ABDC, BACD, BADC, CABD, CADB. Dari uraian di atas tampak bahwa banyak permutasi n benda berlainan yang disusun secara siklis adalah $(n - 1)!$

Permutasi yang telah kita bahas adalah berkenaan dengan benda-benda berlainan. Bagaimana jika ada beberapa benda yang sama? Misalkan, benda a, b, c, dan d. benda b dan benda c sama dengan x. Maka permutasi dari a, b, c adalah axx, axx, xax, xax, xxa, xxa, yaitu terdiri dari tiga susunan yang berlainan. Jadi jika ada tiga benda dan dua diantaranya sama, maka terdapat $3! / 2! = 3$ permutasi yang berlainan. Jika ada empat benda a, b, c, d; $a = b = x$ dan $c = d = y$, maka ada $4! / (2! 2!)$ permutasi berlainan. Susunan yang berlainan itu apa saja? Dari masalah di atas, kita mempunyai sebuah sifat lagi.

Sifat 5

Misalkan terdapat n buah benda bila n_1 diantaranya berjenis 1, n_2 diantaranya berjenis 2, n_3 diantaranya berjenis 3, ..., n_k diantaranya berjenis k; maka banyak permutasi berlainan adalah $n! / (n_1! n_2! n_3! \dots n_k!)$.

Sebagai ilustrasi, misalkan kita ingin menyusun rangkaian-rangkaian seri dari 9 buah lampu. Lampu-lampu tersebut terdiri dari 3 buah berwarna merah, 4 buah berwarna kuning, dan 2 buah berwarna biru. Maka banyak cara menyusun lampu-lampu itu adalah $9! / (3! 2! 4!) = 120$ cara.

Kombinasi

Perhatikan kembali jika ada 2 buah unsur A dan B maka permutasinya ada 2, yaitu terdiri dari AB dan BA. Jika ada 3 buah unsur A, B, C dengan pengambilan 2 buah unsur sekaligus, maka permutasinya ada 6, yaitu terdiri dari AB, BA, AC, CA, BC, CB. Di sini, AB berbeda dengan BA, AC berbeda dengan CA, dan seterusnya. Bagaimana jika dianggap AB dan BA dianggap sama, begitu pula AC dan CA dianggap sama, dan seterusnya? Dalam hal unsur-unsurnya tidak memperhatikan urutannya, seperti kasus di atas, disebut *kombinasi*.

Kombinasi dari n unsur yang berbeda dengan sekali pengambilan r ($r \leq n$) ialah semua susunan yang mungkin terjadi yang terdiri dari r unsur yang berbeda yang diambil dari n unsur itu, tanpa memperhatikan urutannya. Banyak kombinasi dilambangkan dengan ${}_nK_r$ dan didefinisikan dengan:

$${}_nK_r = {}_nP_r / r!$$

Karena ${}_nP_r = n! / (n - r)!$,

maka banyak kombinasi ini dapat ditulis sebagai

$${}_nK_r = (n! / (n - r)!)/ r!,$$

atau ${}_nK_r = n! / ((n - r)! \cdot r!)$.

Sebagai ilustrasi, misalkan seorang guru telah menyipkan 6 buah soal. Ia memilih 5 dari 6 soal tersebut untuk ulangan siswanya. Maka susunan soal dapat ia buat adalah:

$$\begin{aligned} {}_6K_5 &= 6! / ((6 - 5)! \cdot 5!) \\ &= 6! / 1! \cdot 5! \\ &= (6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) / (1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \\ &= 6 \end{aligned}$$

Contoh 8.

Jika ada 4 wanita dan 3 pria. Carilah banyak panitia 4 orang yang dapat dibuat yang beranggotakan 2 wanita dan 2 pria.

Jawab.

Banyaknya cara memilih 2 dari 4 wanita adalah

$${}_4K_2 = 4! / (2! 2!) = 6$$

Banyaknya cara memilih 2 dari 3 pria adalah

$${}_3K_2 = 3! / (2! 1!) = 3$$

Jadi banyaknya panitia yang dapat dibentuk yang beranggotakan 2 wanita dan 2 pria adalah $6 \times 3 = 18$.

Rangkuman

1. Proses yang menghasilkan data mentah disebut percobaan.
2. Seluruh kemungkinan yang dapat terjadi dari suatu percobaan. disebut dengan *ruang sampel* dan dilambangkan dengan S .
3. Tiap hasil dalam ruang sampel disebut *unsur* atau *titik sampel*.
4. Bila ruang sampel S yang merupakan semua hasil yang mungkin terjadi dari suatu percobaan mempunyai unsur yang hingga banyaknya, maka unsur atau titik sampel itu dapat didaftar dan ditulis diantara dua alokade.
5. Kejadian dapat didefinisikan sebagai himpunan bagian dari ruang sampel.
6. Suatu kejadian yang unsurnya termasuk dalam kejadian A dan kejadian B disebut irisan dua kejadian A dan B , dilambangkan $A \cap B$. Unsur-unsur tersebut dapat didaftar, yaitu $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$.
7. Kejadian yang mengandung semua unsur yang termasuk A , B , atau keduanya disebut gabungan dua kejadian A dan B , dilambangkan $A \cup B$. Unsur-unsur tersebut dapat didaftar, yaitu $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$.
8. Misalkan kejadian A adalah himpunan bagian dari ruang sampel S . Kejadian di luar A tetapi masih di dalam S dinamakan *komplemen* suatu kejadian A terhadap S dan dilambangkan A' . Unsur A' dapat didaftar atau ditentukan dengan aturan $A' = \{x \mid x \in S \text{ dan } x \in A\}$.
9. Jika suatu operasi dapat dilakukan dengan n_1 cara, dan jika untuk setiap cara ini operasi ke dua dapat dikerjakan dengan n_2 cara, maka kedua operasi itu dapat dikerjakan bersama-sama dengan $n_1 n_2$ cara.
10. Jika suatu operasi dapat dilakukan dengan n_1 cara, dan jika untuk setiap cara ini operasi ke dua dapat dikerjakan dengan n_2 cara, jika untuk setiap cara ini operasi ke

tiga dapat dikerjakan dengan n_3 , dan seterusnya, maka deretan k operasi dapat dikerjakan dengan $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_k$ cara.

11. permutasi adalah suatu susunan yang dapat dibentuk dari suatu kumpulan benda yang diambil sebagian atau seluruhnya.
12. Banyak permutasi n benda berlainan adalah $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$.
13. Jika terdapat n benda berlainan diambil sebanyak r sekaligus maka dapat disusun dalam $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r)$ cara, dan dilambangkan, ${}_n P_r = n! / (n-r)!$
14. Banyak permutasi n benda berlainan yang disusun secara siklis adalah $(n-1)!$
15. Kombinasi dari n unsur yang berbeda dengan sekali pengambilan r ($r \leq n$) ialah semua susunan yang mungkin terjadi yang terdiri dari r unsur yang berbeda yang diambil dari n unsur itu, tanpa memperhatikan urutannya. Banyak kombinasi dilambangkan dengan ${}_n K_r$ dan didefinisikan ${}_n K_r = {}_n P_r / r!$

Tes Formatif 1

Berilah tanda silang (X) salah satu jawaban yang menurut anda benar.

1. Yang bukan termasuk percobaan adalah
 - a. Mengisi nilai rapor siswa
 - b. Memberi ulangan kepada siswa
 - c. Mengolah nilai siswa
 - d. Membagikan rapor siswa
2. Ruang sampel dari percobaan pengetosan mata uang logam adalah
 - a. { muka, belakang }
 - b. { muka }
 - c. { belakang }
 - d. \emptyset
3. Yang merupakan himpunan bagian dari ruang sampel adalah
 - a. Titik sampel
 - b. Percobaan
 - c. Kejadian
 - d. Data

4. Misalkan $S = \{x \mid x \in \text{bilangan asli kurang dari } 10\}$. Jika kejadian $A = \{3, 4, 5\}$ dan $B = \{4, 5, 6\}$, maka kejadian yang unsurnya dalam A dan B adalah
- $\{3, 4, 5, 6\}$
 - $\{6\}$
 - S
 - $\{4, 5\}$
5. Misalkan $S = \{x \mid x \in \text{bilangan asli kurang dari } 10\}$. Jika kejadian $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8\}$, maka kejadian yang unsurnya dalam A atau B adalah
- S
 - tidak ada
 - $\{2, 4, 6, 8\}$
 - $\{1, 3, 5, 7, 9\}$
6. Misalkan $S = \{x \mid x \in \text{bilangan asli kurang dari } 10\}$. Jika kejadian $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ dan $B = \{2, 4, 6, 8\}$, maka komplemen suatu kejadian A adalah
- S
 - A
 - B
 - \emptyset
7. Jika tiga buah dadu ditos (dilemparkan) sekali, maka banyaknya titik sampel adalah
- 6
 - 36
 - 116
 - 0
8. Banyak bilangan ganjil yang terdiri atas 3 angka dapat dibuat dari angka 1, 2, 3, 4, 5 dan angka itu hanya dapat digunakan sekali adalah
- 36
 - 24
 - 12
 - 48

9. Banyak permutasi yang dapat dibuat dari huruf 5 huruf yang berlainan adalah
- 15
 - 30
 - 60
 - 120
10. Banyak jadwal yang dapat disusun untuk 3 penceramah dalam 3 pertemuan bila ketiganya bersedia ceramah setiap hari selama 5 hari adalah
- 120
 - 60
 - 30
 - 15
11. Misalkan a, b, c, d, e, f. Jika a, b, c sejenis dan d, e, f sejenis, maka banyak permutasi berlainannya adalah
- 12
 - 6
 - 1
 - 20
12. Misalkan akan dipilih sepasang pemain ganda dari 6 orang calon pemain yang akan dikirim ke piala dunia. Maka banyak pilihannya adalah Pasang.
- 20
 - 15
 - 10
 - 5

Cocokkan hasil jawaban anda dengan kunci jawaban tes formatif yang ada di bagian akhir bahan belajar mandiri ini. Hitunglah banyaknya jawaban anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi kegiatan belajar.

Rumus

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban anda yang benar}}{\text{Rumus}} \times 100 \%$$

Arti tingkat penguasaan yang anda capai:

90 % - 100 % = baik sekali

80 % - 69 % = baik

70 % - 69 % = cukup

< 70 % = kurang

Jika anda mencapai penguasaan 80 % atau lebih, anda dipersilahkan melanjutkan ke kegiatan belajar selanjutnya. Tetapi jika tingkat penguasaan anda kurang dari 80 %, sebaiknya anda mencoba mengulangi lagi materi tersebut.

Kegiatan Belajar 2

Peluang Suatu Kejadian

Pada bagian depan telah dibahas pengetosan sebuah mata uang logam Pada percobaan itu hanya dapat menghasilkan 2 buah kejadian, yaitu “gambar” dan “huruf” dan dilambangkan dengan G dan H. Jika percobaan itu dilakukan secara acak (tidak mengarahkan pada salah satu) maka berapa peluang munculnya G? dan berapa peluang munculnya H ?

Teori peluang untuk ruang sampel berhingga menetapkan suatu himpunan bilangan yang disebut dengan *bobot*. Bobot ini bernilai dari 0 sampai dengan 1. Dengan demikian peluang munculnya suatu kejadian dari suatu percobaan dapat dihitung. Jika setiap titik pada ruang sampel ditentukan bobotnya, maka jumlah bobot pada ruang sampel itu sama dengan 1. Jika diyakini bahwa suatu titik sampel tertentu sangat mungkin terjadi, maka bobotnya mendekati 1. Sebaliknya, jika suatu titik sampel tertentu sangat tidak mungkin terjadi, maka bobotnya mendekati nol.

Untuk menentukan peluang suatu kejadian A, semua bobot titik sampel dalam A harus dijumlahkan. Jumlah ini dinamakan peluang A, dan diberi lambang $P(A)$. Jadi $P(\emptyset) = 0$ dan $P(S) = 1$

Definisi.

Peluang suatu kejadian A adalah jumlah bobot semua titik sampel yang termasuk A . Jadi $0 \leq P(A) \leq 1$, $P(\emptyset) = 0$, dan $P(S) = 1$.

Pada pengetosan sebuah mata uang logam di atas, ruang sampel percobaan ini adalah

$$S = \{G, H\}$$

Karena percobaan itu dilakukan secara acak (tidak mengarahkan pada salah satu) maka peluang munculnya G dan H mempunyai bobot yang sama. Menurut definisi, $P(S) = 1$. Dengan demikian $P(G) = P(H) = \frac{1}{2}$.

Bobot dapat dipandang sebagai peluang yang berkaitan dengan suatu kejadian sederhana. Jika suatu percobaan mempunyai sifat bahwa setiap titik sampel berbobot sama, maka peluang kejadian A adalah hasil bagi banyaknya unsur A dengan banyaknya unsur S . Keadaan ini dinyatakan dalam sifat berikut:

Sifat 1

Misalkan suatu percobaan dapat mempunyai N macam hasil yang mempunyai peluang sama. Jika ada tepat n hasil itu berkaitan dengan kejadian A , maka peluang kejadian A adalah

$$P(A) = n / N$$

Sebagai ilustrasi, misalkan suatu kartu ditarik dari satu kotak kartu bridge (52 kartu), maka peluang kejadian A menarik kartu *heart* adalah $P(A) = 13/52 = \frac{1}{4}$.

Beberapa Sifat Peluang

Sering kali kita dengan mudah menentukan peluang suatu kejadian dengan memanfaatkan peluang kejadian lain, khususnya bila kejadian itu dapat dinyatakan sebagai gabungan dua kejadian lain, atau komplemen suatu kejadian.

Sifat 2: (aturan penjumlahan)

Jika A dan B dua buah kejadian sebarang, maka,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Pada sifat 2 di atas, jika A dan B dua kejadian yang saling terpisah, berarti $P(A \cap B) = 0$, maka diperoleh

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Kejadian yang saling terpisah ini secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut:

Sifat 3.

Jika $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ adalah kejadian-kejadian yang saling terpisah, maka

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n).$$

Contoh 1.

Berapa peluang mendapatkan jumlah 7 atau 11 pada pengetosan dua buah dadu?

Jawab.

Misal: A adalah kejadian memperoleh jumlah 7, dan

B kejadian memperoleh jumlah 11.

A kedapat muncul dalam 6 dari 36 titik sampel, dan B dapat dalam 2 dari 36 titik sampel.

Karena semua titik sampel berpeluang sama, maka

$$P(A) = 6/36 = 1/6 \text{ dan } P(B) = 2/36 = 1/18.$$

A dan B merupakan kejadian terpisah karena tidak terjadi pada pengetosan yang sama.

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) \\ &= 1/6 + 1/18 \\ &= 2/9 \end{aligned}$$

Kita ketahui bahwa ruang sampel merupakan seluruh kejadian A atau komplemen A; kejadian A dan komplemen A adalah \emptyset . Kita tulis hal ini dengan

$$A \cup A' = S \text{ dan } A \cap A' = \emptyset.$$

Kita juga telah mengetahui bahwa peluang ruang sampel sama dengan 1. Kita tulis,

$$P(S) = 1$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} P(A \cup A') &= P(S) \\ &= 1 \\ P(A) + P(A') &= 1 \\ P(A') &= 1 - P(A) \end{aligned}$$

Dengan demikian, kita mempunyai sifat berikut:

Sifat 4

Jika A dan A' adalah dua buah kejadian yang saling berkomplemen, maka

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Sebagai ilustrasi, pada pengetosan sebuah mata uang, kita ingin mengetahui peluang munculnya paling sedikit muka. Untuk itu, misalkan A adalah kejadian paling sedikit satu kali muncul muka. Ruang sampel S memuat $2^6 = 64$ titik sampel. Jika A' menyatakan kejadian tidak ada muka muncul, maka A' hanya ada 1 cara, yaitu apabila semua pengetosan menghasilkan belakang. Jadi $P(A') = 1/64$.

Dengan demikian, $P(A) = 1 - 1/64 = 63/64$.

Peluang Bersyarat

Peluang bersyarat adalah peluang munculnya suatu kejadian bila diketahui kejadian lain telah muncul. Peluang bersyarat ini dilambangkan dengan $P(B/A)$, dan dapat dibaca: “peluang B muncul bila diketahui A muncul”, atau “peluang B jika A diketahui”.

Definisi

Peluang bersyarat B jika diketahui A, ditulis $P(B/A)$ didefinisikan dengan

$$P(B/A) = P(A \cap B) / P(A), \text{ jika } P(A) > 0.$$

Contoh 2.

Misalkan S adalah suatu ruang sampel yang menyatakan siswa SD di suatu kota. Mereka dikelompokkan menurut jenis kelamin dan kesukaannya pada matematika, sebagai berikut:

| | Suka Matematika | Tidak Suka Matematika |
|-----------|-----------------|-----------------------|
| Laki-laki | 480 | 60 |
| Perempuan | 200 | 300 |

Seorang siswa akan diambil mewakili sekolah itu untuk mengikuti suatu program matematika yang diselenggarakan oleh pemerintah di kota itu. Berapa peluang agar yang terambil adalah laki-laki yang suka matematika?

Jawab.

Misalkan kejadian yang muncul adalah:

A: Siswa berjenis kelamin laki-laki.

B: Siswa yang menyukai matematika.

Dengan menggunakan ruang sampel yang diperkecil B, kita peroleh:

$$\begin{aligned} P(A/B) &= 480 / 680 \\ &= 0,7059 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A/B) &= P(A \cap B) / P(B) \\ &= \{n(A \cap B) / n(S)\} / \{n(B) / n(S)\} \\ &= P(A \cap B) / P(B) \end{aligned}$$

$P(A \cap B)$ dan $P(B)$ diperoleh dari ruang sampel S

Dengan menggunakan $P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$, akan diperiksa penyelesaian soal di atas.

$$\begin{aligned} P(B) &= 680 / 1040 \\ &= 0,6538 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 480 / 1040 \\ &= 0,4625 \end{aligned}$$

Jadi, $P(A/B) = 0,4615 / 0,6538$
 $= 0,7059.$

Kita mengetahui bahwa,

$$P(A/B) = P(A \cap B) / P(B)$$

Jika persamaan itu di kalikan dengan $P(B)$, diperoleh

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Jadi, peluang kejadian serentak A dan B muncul sama dengan peluang B muncul dikali peluang kejadian A muncul jika diketahui kejadian B muncul.

Misalkan sebuah kotak berisi sepuluh buah kancing dan 4 diantaranya cacat. Jika dua kancing dikeluarkan dari kotak secara acak satu demi satu tanpa pengembalian, maka peluang kedua kancing itu cacat dapat dijelaskan sebagai berikut:

Misalkan, A = kejadian kancing pertama cacat.

B = kejadian kancing kedua cacat.

Kita dapat menerjemahkan bahwa $(A \cap B)$ sebagai A muncul, kemudian B muncul.

$$\begin{aligned} P(A) &= 4/10 \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(B/A) &= 3/9 \\ &= 0,333 \end{aligned}$$

Jadi,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= 0,4 \times 0,333 \\ &= 0,1333 \end{aligned}$$

Jika pada masalah di atas kancing pertama dikembalikan ke dalam kotak dan kemudian isi kotak disusun kembali secara acak sebelum kancing yang kedua diambil, maka peluang munculnya kancing cacat pada pengambilan ke dua tetap, yaitu $2/5$, karena $P(A/B) = P(A)$. Kejadian yang demikian disebut kejadian bebas.

Definisi

Kejadian A dan B dikatakan bebas jika dan hanya jika

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Contoh 3.

Jika dua buah dadu ditos dua kali, berapa peluang muncul jumlah 5 dan 9?

Jawab:

Misalkan A_1, A_2, B_1, B_2 masing-masing menyatakan kejadian bebas bahwa jumlah 5 muncul pada pengetosan pertama, jumlah 9 muncul pada pengetosan ke pertama, jumlah 5 muncul pada pengetosan ke dua, dan jumlah 9 muncul pada pengetosan ke dua.

Akan dicari peluang gabungan $P(A_1 \cap B_2)$ dan $P(A_2 \cap B_1)$ yang saling lepas.

Jadi,

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap B_2) \cup P(A_2 \cap B_1) &= P(A_1 \cap B_2) + P(A_2 \cap B_1) \\ &= P(A_1) P(B_2) + P(A_2) P(B_1) \\ &= (1/9)(1/9) + (1/9)(1/9) \\ &= 2/81 \end{aligned}$$

Kesimpulan

1. Peluang suatu kejadian A adalah bobot semua titik sampel yang termasuk dalam A.
 $P(\emptyset) = 0$, $P(S) = 1$, dan $0 \leq P(A) \leq 1$
2. Misal suatu percobaan dengan N macam hasil yang mempunyai peluang sama. Jika ada tepat n hasil berkaitan dengan A, maka $P(A) = n/N$
3. Jika A dan B dua buah kejadian, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
4. Jika A dan B dua buah kejadian yang bebas, maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
5. Jika A dan A' dua kejadian yang saling komplement, maka $P(A') = 1 - P(A)$.

6. Misalkan peluang B muncul jika peluang A diketahui, ditulis $P(B/A)$, dan $P(B/A) = P(A \cap B) / P(A)$
7. $P(B/A) = P(A \cap B) / P(A)$ ekuivalen dengan $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$.
8. Jika A dan B dua buah kejadian bebas, maka $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Tes Formatif 2

Berilah tanda silang (X) salah satu jawaban yang menurut anda benar.

1. Misalkan peluang seorang mahasiswa lulus mata kuliah logika $\frac{3}{4}$ dan mata kuliah bilangan $\frac{5}{6}$. Jika peluang lulus paling sedikit satu mata kuliah $\frac{7}{8}$ maka peluang lulus dua mata kuliah adalah
 - a. $\frac{1}{8}$
 - b. $\frac{17}{24}$
 - c. $\frac{9}{16}$
 - d. $\frac{7}{9}$
2. Jika dua buah dadu ditos, maka peluang memperoleh jumlah 9 atau 11 adalah
 - a. $\frac{1}{6}$
 - b. $\frac{1}{3}$
 - c. $\frac{2}{3}$
 - d. $\frac{3}{4}$
3. Satu mata uang logam ditos berturut-turut sebanyak 4 kali; peluang munculnya permukaan gambar adalah
 - a. $\frac{1}{4}$
 - b. $\frac{1}{6}$
 - c. $\frac{1}{12}$
 - d. $\frac{1}{16}$
4. Misalkan tiga orang memperebutkan suatu hadiah. Dua orang diantaranya mempunyai peluang yang sama, sedangkan orang ke tiga mempunyai peluang dua kali lebih besar dari dua orang pertama. Peluang orang ke tiga menang adalah
 - a. $\frac{1}{2}$
 - b. $\frac{1}{3}$

- c. $\frac{1}{4}$
 - d. $\frac{1}{5}$
5. Satu mata uang logam ditos berturut-turut 2 kali. Peluang muncul sekali muka adalah
- a. $\frac{1}{4}$
 - b. $\frac{1}{2}$
 - c. $\frac{3}{4}$
 - d. $\frac{1}{6}$
6. Suatu dadu diberi pemberat sedemikian sehingga peluang muncul suatu bilangan genap pada pengetosan tiga kali lebih besar dari peluang muncul suatu bilangan ganjil. Jika K menyatakan kejadian munculnya suatu bilangan yang lebih kecil dari 5, maka $P(K)$ adalah
- a. $\frac{1}{6}$
 - b. $\frac{1}{3}$
 - c. $\frac{1}{2}$
 - d. $\frac{2}{3}$
7. Satu kartu ditarik dari suatu kotak kartu bridge, maka peluang terambilnya kartu *king* adalah
- a. $\frac{1}{6}$
 - b. $\frac{1}{52}$
 - c. $\frac{1}{26}$
 - d. $\frac{1}{13}$
8. Berat bayi baru lahir rata-rata 3.750 gram dengan simpangan baku 325 gram. Jika berat bayi itu berdistribusi normal, maka persentase berat bayi lebih dari 4.500 gram adalah
- a. 1,04 %
 - b. 2,08%
 - c. 4,16%
 - d. 8,32%
9. Berat bayi baru lahir rata-rata 3.750 gram dengan simpangan baku 325 gram dan berat bayi itu berdistribusi normal. Jika banyak bayi ada 5.000, maka banyak bayi yang beratnya 4.250 gram adalah

- a. 18
 - b. 16
 - c. 8
 - d. 6
10. Di suatu daerah 10 % penduduknya bergolongan darah A. Jika sebuah sampel acak terdiri atas 400 penduduk telah diambil, maka peluang paling banyak 30 orang bergolongan darah A adalah
- a. 0,0862
 - b. 0,0904
 - c. 0,0680
 - d. 0,0571

Cocokkan hasil jawaban anda dengan kunci jawaban tes formatif yang ada di bagian akhir bahan belajar mandiri ini. Hitunglah banyaknya jawaban anda yang benar, kemudian gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan anda terhadap materi kegiatan belajar.

Rumus

$$\text{Tingkat Penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban anda yang benar}}{10} \times 100 \%$$

Arti tingkat penguasaan yang anda capai:

90 % - 100 % = baik sekali

80 % - 69 % = baik

70 % - 79 % = cukup

< 70 % = kurang

Jika anda mencapai penguasaan 80 % atau lebih, anda dipersilahkan melanjutkan ke kegiatan belajar selanjutnya. Tetapi jika tingkat penguasaan anda kurang dari 80 %, sebaiknya anda mencoba mengulangi lagi materi tersebut.

KUNCI JAWABAN TES FORMATIF

Tes Formatif 1

1. b
2. a
3. c
4. d
5. a
6. c
7. c
8. a
9. d
10. b
11. d
12. b

Tes Formatif 2

1. b.
- 2 a
3. d
4. a
5. c.
6. d
7. d
8. a
9. a
10. d

GLOSARIUM

- Percobaan : Proses yang menghasilkan data mentah.
- Ruang sampel : Seluruh kemungkinan yang dapat terjadi dari suatu percobaan
- Titik Sampel : Tiap hasil dalam ruang sampel.
- Irisan dua kejadian A dan B : Suatu kejadian yang unsurnya termasuk dalam kejadian A dan kejadian B.
- Gabungan dua kejadian A dan B : Kejadian yang mengandung semua unsur yang termasuk A, B, atau keduanya.
- Komplemen suatu kejadian A terhadap S : Kejadian di luar A tetapi masih di dalam S.
- Permutasi : Suatu susunan yang dapat dibentuk dari suatu kumpulan benda yang diambil sebagian atau seluruhnya.
- Kombinasi dari n unsur yang berbeda dengan sekali pengambilan r ($r \leq n$) : Semua susunan yang mungkin terjadi yang terdiri dari r unsur yang berbeda yang diambil dari n unsur itu, tanpa memperhatikan urutannya.

DAFTAR PUSTAKA

- Depdiknas (2006), *Kurikulum Tingkat Satuan Pendidikan*, Depdiknas, Jakarta.
- Billstein, Liberskind, dan Lot (1993), *A Problem Solving Approach to Mathematics for Elementary School Teachers*, Addison-Wesley, New York.
- Ruseffendi, H.E.T (1998), *Statistika Dasar untuk Penelitian Pendidikan*, IKIP Bandung Press, Bandung
- Troutman A.P. dan Lichtenberg, B.K. (1991), *Mathematics A Good Beginning, Strategies for Teaching Children*, Brooks/Cole Publishing Company, New York.

