MATERI 6
DIFERENSIAL FUNGSI MAJEMUK

Sub Materi:
1. Diferensial parsial
2. Derivative dan derivative parsial
3. Nilai ekstrim : maksimum dan minimum
4. Optimisasi bersyarat
5. Homogenitas fungsi
6. Penerapan ekonomi

Pertemuan ke-10 dan 11
Tujuan Khusus Pembelajaran :
Setelah menyelesaikan pertemuan ini, mahasiswa mampu :
1. Memberikan contoh diferensial fungsi majemuk
2. Menyelesaikan soal diferensial fungsi majemuk
3. Mengaplikasikan konsep diferensial fungsi majemuk dalam kasus ekonomi

A. Ringkasan materi

Nilai ekstrim: maksimum dan minimum

- Nilai-nilai ekstrim (optimum) dari sebuah fungsi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas dapat dicari dengan pengujian sapai derivatif keduanya:
- Untuk y = f(x)
  maka y akan mencapai titik ektrimnya jika

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad dan \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

- Syarat di atas adalah syarat yang diperlukan (necessary condition) agar fungsinya mencapai titik ekstrim. Untuk mengetahui apakah titik ekstrim itu berupa titik maksimum atau titik minimum, dibutuhkan syarat yang mencukupkan (sufficient condition), yaitu :

$$Maksimum\ \ bila \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0\ dan\ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} < 0$$

$$Minimum\ bila \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0\ dan\ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} > 0$$

- Pengganda Lagrange, Misalkan dioptimumkan z = f(x,y) dengan syarat harus terpenuhi u = g(x,y) maka fungsi Lagrangenya adalah :

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

- Nilai ekstrim fungsidi atas dapat dicari dengan memformulasikan masing-masing derivatif parsial pertamanya sama dengan nol.

Optimisasi bersyarat

$$F(x,y,\lambda) = f_x + \lambda g_x = 0$$

$$F(x,y,\lambda) = f_y + \lambda g_y = 0$$

- Maksimum bila :

$$F_{xx} < 0 \; dan \; F_{yy} < 0$$

- Minimum bila :

$$F_{xx} > 0 \; dan \; F_{yy} > 0$$

Kondisi Kuhn-Tucker

Prosedur metode Kuhn-Tucker melalui metode Lagrange :

- Anggap kendala pertidaksamaannya sebagai sebuah persamaan. Kenudian selesaikan masalahnya dengan metode Lagrange yang biasa hingga diperoleh nilai optimum. Lagrangenya harus di bentuk dengan cara :

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$$

- Lakukan pengujian terhadap nilai λ. Jika $\lambda > 0$ berarti nilai optimum yang diperoleh juga merupakan nilai optimum berkenaan fungsi kendala yang berbentuk pertidaksamaan. Jika $\lambda \leq 0$ berarti optimasi fungsi tujuan f(x,y) tanpa menyertakan fungsi kendala g(x,y) sudah dengan sendirinya akan memenuhi kendalanya.

Prosedur metode Kuhn-Tucker secara langsung :

- Rumuskan permasalahannya, misal maksimumkan f(x,y) terhadap $g(x,y) \leq 0$, atau minimukan f(x,y) terhadap $g(x,y) \geq 0$.

Tetapkan kondisi Kuhn-Tucker

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$\lambda g(x,y) = 0$$

Dimana $g(x,y) \leq 0$ atau $g(x,y) \geq 0$

- Ujilah (2c) masing-masing untuk λ=0 atau g(x,y)=0 untuk menentukan mana diantaranya yang memenuhi persamaan-persamaan (2a) dan (2b) serta pertidaksamaan kendala g(x,y). Nilai-nilai x dan y yang memenuhi ketiga kondisi ini merupakan nilai-nilai yang mengoptimalkan fungsi tujuan f(x,y).

Homogenitas fungsi

Suatu fungsi dikatakan homogen berderajat n apabila hasilkali setiap variabel bebasnya dengan sembarang bilangan λ menyebabkan nilai fungsinya menjadi kali. Dengan demikian, z = f (x,y) dikatakan homogen apabila :

$$\lambda^n z = f(\lambda x, \lambda y)$$

Contoh penerapan dalam ilmu ekonomi

Diferensial dan Titik Elastisitas

- Misal: untuk fungsi permintaan Q=f(P), maka elastisitas permintaan didefinisikan:

$$\varepsilon_d \equiv \frac{dQ/Q}{dP/P} = \frac{dQ/dP}{Q/P} = \frac{\text{fungsi marginal permintaan}}{\text{fungsi rata - rata permintaan}}$$

- Fungsi elastisitas → berlaku untuk semua fungsi.
- Nilai elastisitas → ukuran elastisitas fungsi pada titik tertentu:
  - inelastis (|ε|<1),
  - elastisitas satu (|ε|=1),
  - elastis (|ε|>1).

Contoh 1

– Untuk $y = 3x_1^2 + x_1x_2 + 4x_2^2$ maka:

$$f_1 = \frac{\delta y}{\delta x_1} = 6x_1 + x_2 \text{ dan } f_2 = \frac{\delta y}{\delta x_2} = x_1 + 8x_2$$

– Untuk $y = (u + 4)(3u + 2v)$ maka:

$$f_u = (u + 4)(3) + (1)(3u + 2v) = 6u + 2v + 12$$

dan $f_v = (u + 4)(2) + (0)(3u + 2v) = 2u + 4$

Contoh 2

– Untuk fungsi produksi: $Q = 96K^{0,3}L^{0,7}$, maka fungsi marginal untuk kapital dan input adalah:

$MPP_K = 28,8K^{-0,7}L^{0,7}$ dan $MPP_L = 67,2K^{0,3}L^{-0,3}$

– Fungsi utilitas seseorang: $U=(x_1+2)^2(x_2+3)^3$, fungsi marginal utilitas untuk masing-masing komoditi :

$MU_{x1} = 2(x_1+2)(x_2+3)^3$ dan $MU_{x2} = 3(x_1+2)^2(x_2+3)^2$

jika setiap komoditas yang dikonsumsi adalah 3, marginal utilitas komoditi pertama:

$MU_{x1}(3,3) = 2160$

Contoh 3

Untuk fungsi penawaran $Q=P^2+7P$, maka:

– Fungsi marginal: $\frac{dQ}{dP} = 2P + 7$

– Fungsi rata-rata: $\frac{Q}{P} = P + 7$

– Elastisitasnya: $\varepsilon_s = \frac{2P+7}{P+7}$

– Pada P=2, elastisitasnya bernilai 1,2222 >1 → artinya penawaran bersifat elastis pada P=2.

Contoh 4

Fungsi permintaan $Q=k/P^n$; k,n>0; titik elastisi-tasnya tidak bergantung dari harga, karena:

$$\varepsilon_d = -n \equiv \text{tetapan}$$

Contoh 5

Fungsi permintaan Q=100-2P+0,02Y; untuk P=20 dan Y=5000, maka:

– Elastisitas harga : $\varepsilon_d = -\frac{1}{4}$

– Elastisitas pemasukan: $\eta = 0,625$

B. Kegiatan Pembelajaran

1. Mengkaji materi melalui ceramah dan melakukan tanya jawab mengenai konsep diferensial fungsi majemuk
2. Memberikan contoh diferensial fungsi majemuk

3. Mengaplikasikan diferensial fungsi majemuk dalam penerapan ekonomi

C. Evaluasi Pembelajaran

Tentukan hasil integral berikut ini!

1). $\int 3x^7 \, dx$

2). $\int \frac{2}{x^3} \, dx$

3). Tentukan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 2x$ dan $y = x$ antara garis $x = 1$ dan $x = 4$!

D. Referensi

Chiang, Alpha C., Dasar-Dasar Matematika Ekonomi, Jilid 1, Edisi Ketiga, Penerbit Erlangga, Jakarta

Dumairy, (2003/2004), Matematika Terapan untuk Bisnis dan Ekonomi, Cetakan ke 12, BPFE Yogyakarta, Yogyakarta.

H. Johannes dan Budiono Sri Handoko, (1994), Pengantar Matematika untuk Ekonomi, LP3ES, Jakarta.