PERTEMUAN 10-11

DIFERENSIAL FUNGSI MAJEMUK

Nilai ekstrim: maksimum dan minimum

- Nilai-nilai ekstrim (optimum) dari sebuah fungsi yang mengandung lebih dari satu variabel bebas dapat dicari dengan pengujian sapai derivatif keduanya:
- Untuk y = f(x)

  maka y akan mencapai titik ektrimnya jika :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad dan \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0$$

Nilai ekstrim: maksimum dan minimum

- Syarat di atas adalah syarat yang diperlukan (necessary condition) agar fungsinya mencapai titik ekstrim. Untuk mengetahui apakah titik ekstrim itu berupa titik maksimum atau titik minimum, dibutuhkan syarat yang mencukupkan (sufficient condition), yaitu :

$$\boldsymbol{Maksimum\ \ bila \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} < 0\ dan\ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} < 0}$$

$$\boldsymbol{Minimum\ bila \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0\ dan\ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} > 0}$$

Optimisasi bersyarat

- Pengganda Lagrange

  Misalkan dioptimumkan z = f(x,y)

  dengan syarat harus terpenuhi u = g(x,y)

  maka fungsi Lagrangenya adalah :

  $$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$$

- Nilai ekstrim $F(x,y,\lambda)$ dapat dicari dengan memformulasikan masing-masing derivatif parsial pertamanya sama dengan nol.

Optimisasi bersyarat

$$F(x, y, \lambda) = f_x + \lambda g_x = 0$$

$$F(x, y, \lambda) = f_y + \lambda g_y = 0$$

- Maksimum bila :

$$F_{xx} < 0 \; dan \; F_{yy} < 0$$

- Minimum bila :

$$F_{xx} > 0 \; dan \; F_{yy} > 0$$

Kondisi Kuhn-Tucker

Prosedur metode Kuhn-Tucker melalui metode Lagrange :

- Anggap kendala pertidaksamaannya sebagai sebuah persamaan. Kenudian selesaikan masalahnya dengan metode Lagrange yang biasa hingga diperoleh nilai optimum. Lagrangenya harus di bentuk dengan cara :

$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$$

Kondisi Kuhn-Tucker

- Lakukan pengujian terhadap nilai λ. Jika $\lambda > 0$ berarti nilai optimum yang diperoleh juga merupakan nilai optimum berkenaan fungsi kendala yang berbentuk pertidaksamaan. Jika $\lambda \leq 0$ berarti optimasi fungsi tujuan $f(x,y)$ tanpa menyertakan fungsi kendala $g(x,y)$ sudah dengan sendirinya akan memenuhi kendalanya.

Kondisi Kuhn-Tucker

Prosedur metode Kuhn-Tucker secara langsung :

- Rumuskan permasalahannya, misal maksimumkan f(x,y) terhadap g(x,y) ≤ 0, atau minimukan f(x,y) terhadap g(x,y) ≥ 0.
- Tetapkan kondisi Kuhn-Tucker

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0$$

$$\lambda g(x,y) = 0$$

- Dimana g(x,y) ≤ 0 atau g(x,y) ≥ 0

Kondisi Kuhn-Tucker

- Ujilah (2c) masing-masing untuk $\lambda=0$ atau $g(x,y)=0$ untuk menentukan mana diantaranya yang memenuhi persamaan-persamaan (2a) dan (2b) serta pertidaksamaan kendala $g(x,y)$. Nilai-nilai x dan y yang memenuhi ketiga kondisi ini merupakan nilai-nilai yang mengoptimalkan fungsi tujuan $f(x,y)$.

Homogenitas fungsi

- Suatu fungsi dikatakan homogen berderajat n apabila hasilkali setiap variabel bebasnya dengan sembarang bilangan λ menyebabkan nilai fungsinya menjadi λ^n kali. Dengan demikian, z = f (x,y) dikatakan homogen apabila :

$$\lambda^n z = f(\lambda x, \lambda y)$$