BAB IV

VIBRASI KRISTAL

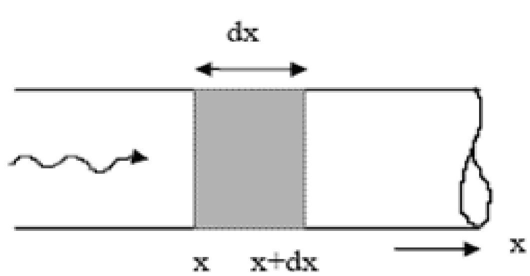
Dalam bab yang lalu, telah dibahas bahwa kristal tersusun oleh atom-atom yang "diam" pada posisinya di titik kisi. Sesungguhnya, atom-atom tersebut tidaklah diam, tetapi bergetar pada posisi kesetimbangannya. Getaran atom-atom pada suhu ruang adalah sebagai akibat dari energi termal, yaitu energi panas yang dimiliki atom-atom pada suhu tersebut.

Getaran atom dapat pula disebabkan oleh gelombang yang merambat pada kristal. Ditinjau dari panjang gelombang yang digunakan dan dibandingkan dengan jarak antar atom dalam kristal, dapat dibedakan pendekatan gelombang pendek dan pendekatan gelombang panjang. Disebut pendekatan gelombang pendek apabila gelombang yang digunakan memiliki panjang gelombang yang lebih kecil dari pada jarak antar atom. Dalam keadaan ini, gelombang akan "melihat" kristal sebagai tersusun oleh atom-atom yang diskrit, sehingga pendekatan ini sering disebut pendekatan kisi diskrit. Sebaliknya, bila dipakai gelombang yang panjang gelombangnya lebih besar dari jarak antar atom, kisi akan "nampak" malar (kontinyu) sebagai suatu media perambatan gelombang. Oleh karena itu, pendekatan ini sering disebut sebagai pendekatan kisi malar.

1 GELOMBANG ELASTIK DAN FONON

Dalam pendekatan gelombang panjang, tinjau sebuah batang berpenampang A dengan rapat massa ρ, yang dirambati gelombang mekanik ke arah memanjang batang x. Pada setiap titik x dalam batang terjadi perubahan panjang u (x) sebagai akibat adanya tegangan $\sigma(x)$ dari gelombang, lihat gambar 1.

Dapat dituliskan regangan pada batang :



Gambar 1

$$\in = \frac{du}{dx} \text{ ....(1)}$$

karena tegangan σ yang memenuhi hukum Hooke sebagai berikut :

$$\sigma = \mathrm{E} \in \text{...(2)}$$

dengan E menyatakan Modulus elastik atau Modulus Young. Selanjutnya, menurut hukum kedua Newton, tegangan yang bekerja pada elemen batang dx menghasilkan gaya sebesar :

$$\mathrm{F} = \mathrm{A}\ \{\sigma(\mathrm{x} + \mathrm{dx}) - \sigma(\mathrm{x})\} \text{ ....(3)}$$

akan menyebabkan massa elemen batang tersebut (ρAdx) mendapatkan percepatan sebesar $(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2})$ sehingga :

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A\{\sigma(x + dx) - \sigma(x)\} \text{ ....(4)}$$

Perhatikan lebih lanjut ruas kanan persamaan (2.4), dapat dijabarkan :

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \\ &= E \frac{\partial \varepsilon}{dx} dx \\ &= E \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{du}{dx}\right) dx \quad \text{..(5)} \\ &= E\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right) dx \end{aligned}$$

Masukkan kembali hasil (5) ke persamaan semula (4) memberikan :

$$\rho \mathrm{Adx} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx.A$$

yang dapat disederhanakan menjadi :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left(\frac{\rho}{E}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{ ....(6)}$$

yaitu persamaan gelombang elastik. Dan bila dibandingkan dengan persamaan gelombang umum :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v_s^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

akan diperoleh ungkapan bagi kecepatan gelombang elastik :

$$v_s = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} \text{...}(7)$$

Jelas bahwa kecepatan gelombang mekanik dalam batang (secara umum pada zat padat) bergantung pada "besaran elastik" bahan tersebut, yakni modulus Young. Karena perambatan gelombang tersebut bergantung pada besaran elastik maka gelombang yang bersangkutan disebut gelombang elastik.

Bentuk penyelesaian dari persamaan gelombang, persamaan (6), dapat dipilih solusi gelombang bidang :

$$u(x) = u_0 \exp(ikx - i\omega t) \text{.....................................}(8)$$

dengan k bilangan gelombang (= $2\pi/\lambda$), ω frekuensi sudut dan λ panjang gelombang. Bila hanya diperhatikan bergantung gelombang terhadap posisi (x), dengan mengabaikan faktor waktu (t), maka fungsi gelombang bidang dapat ditulis :

$$u(x) = u_0 \exp(ikx) \text{....................................}(9)$$

Dengan menganggap panjang batang L, fungsi gelombang harus memenuhi syarat periodik, yaitu nilai pada ujung kiri (x = 0) harus sama dengan nilainya pada ujung kanan (x = L), jadi :

$$\begin{aligned} u(x=0) &= u(x=L) \\ u_0 &= u_0 \exp(ikL) \end{aligned} \text{....................................}(10)$$

Ini berarti,

$$\exp(ikL) = 1$$

atau :

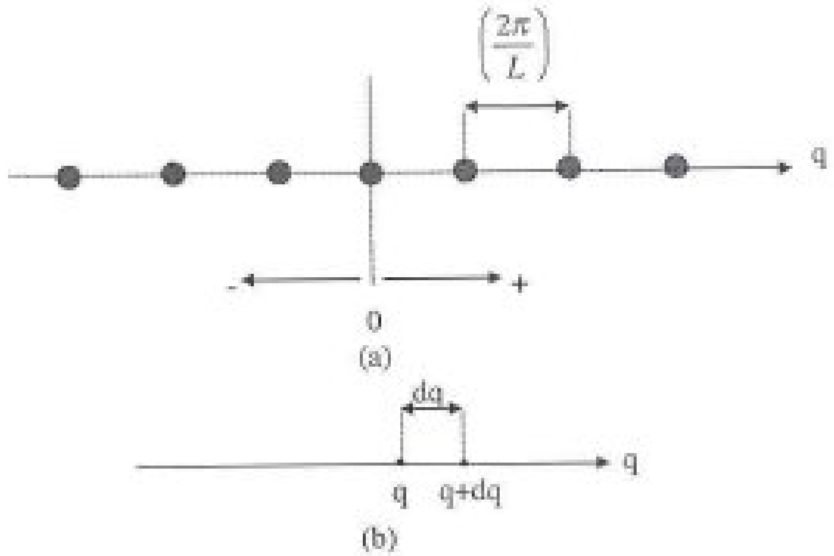
$$ikL = \ln(2\pi)$$

dan :

$$k = \left(\frac{2\pi}{L}\right)n \text{...}(11)$$

dengan n = 0, ±1, ±2, ... Persamaan terakhir (2.11) mengungkapkan bahwa gelombang dapat merambat dalam batang yang panjangnya L bilamana bilangan gelombangnya memiliki harga kelipatan bulat (0, 1, 2, ...) dari $2\pi/L$. Atau dengan kata lain "bilangan gelombang k berharga diskrit".

Keadaan di atas bila dituliskan dalam ruang – k (koordinat yang menyatakan bilangan gelombang) akan terlihat seperti pada gambar 2a. Titik-titik dalam ruang – k menyatakan ragam (moda) gelombang. Andaikan panjang batang cukup besar (L>>), maka jarak 2π/L akan mendekati nol dan ini berarti titik-titik dalam ruang - k makin berdekatan (ruang - k mendekati malar/ kuasi kontinyu), lihat gambar 2b.



Gambar 2. Ruang – k satu dimensi : a. diskrit, dan b. malar

Berdasarkan gambar 2 dapat didefinisikan jumlah ragam gelombang elastik yang mempunyai bilangan gelombang antara k dan k + dk (dalam interval dk) adalah :

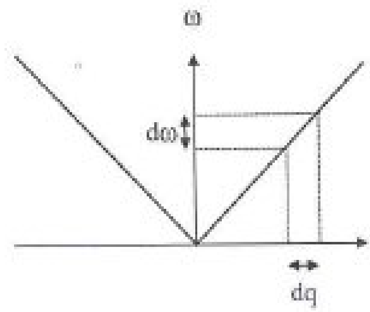
$$\frac{dk}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)} = \left(\frac{L}{2\pi}\right) dk \text{ ....(12)}$$

dengan :

$$k = \frac{2\pi}{L}$$

Jumlah ragam gelombang seperti pada persamaan (2.2) untuk setiap satuan volume disebut rapat keadaan atau ditulis g(k) dk. Rapat keadaan dapat juga diungkapkan sebagai frekuensi sudut ω, yaitu g(ω) dω; yang menyatakan jumlah ragam gelombang elastik persatuan volume dengan frekuensi antara ω dan ω+dω (dalam interval dω). Di pihak lain, k dan ω berhubungan satu sama lain melalui hubungan dispersi, lihat gambar 3., yaitu bahwa ω berbanding lurus terhadap k untuk kisi malar :

$$\omega = v_s 2 \text{ ....(13)}$$



Gambar 3. Hubungan dispersi linier untuk kisi malar (pendekatan gelombang panjang)

dengan v_s adalah kecepatan gelombang pada medium yang bersangkutan. Melalui hubungan ini g(ω) dapat ditentukan :

$$g(\omega)d\omega = 2\left(\frac{L}{2\pi}\right)dk$$

$$g(\omega) \quad = \left(\frac{L}{\pi}\right)\frac{dk}{d\omega} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(14)$$

$$= \frac{\mathrm{L}}{\pi\ \mathrm{v_s}}$$

Angka 2 pada persamaan tersebut muncul karena ragam gelombang meliputi 2 daerah (positif dan negatif), yaitu berhubungan dengan gelombang yang merambat ke arah kanan dan kiri.

Lebih lanjut, perubahan gelombang di atas dapat diperluas untuk kasus tiga-dimensi. Dalam ruang tiga-dimensi, fungsi gelombang dengan mengabaikan faktor waktu ditulis :

$$u(x, y, z) = u_0 \exp\{i(k_x x + k_y y + k_z z)\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(15)$$

Syarat batas periodik menghasilkan :

$$\exp\{iL(k_x + k_y + k_z)\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(16)$$

Hal ini dapat dipenuhi oleh :

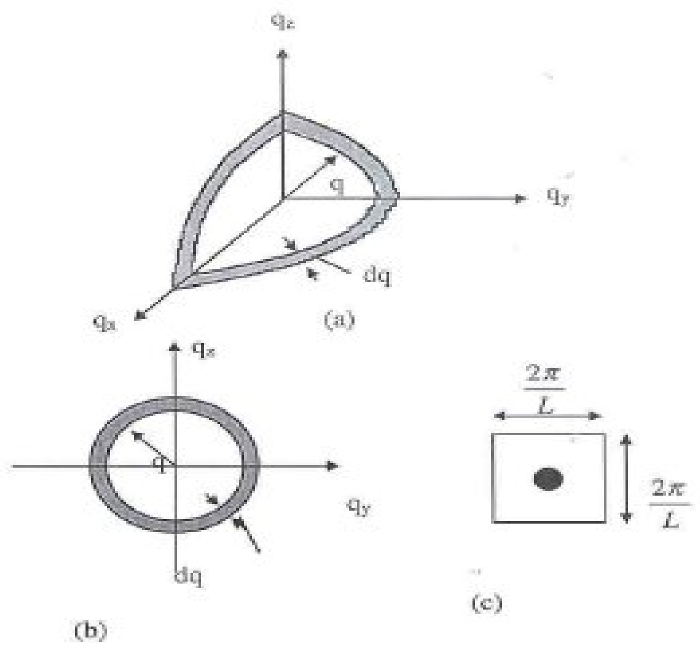
$$k_x = \left(\frac{2\pi}{L}\right)l; k_y = \left(\frac{2\pi}{L}\right)m; k_z = \left(\frac{2\pi}{L}\right)n$$

$$l, m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Setiap titik dalam ruang - q dinyatakan oleh :

$$\begin{aligned} k &\equiv (k_x, k_y, k_z) \\ &= \left(\frac{2\pi}{L} l, \frac{2\pi}{L} m, \frac{2\pi}{L} n \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(17) \end{aligned}$$

yang merupakan satu ragam gelombang. Pada gambar 4. dilukiskan ruang - k tiga-dimensi, proyeksi pada bidang k_y-k_z dan besarnya volume yang ditempati oleh satu titik (k_x, k_y, k_z) dalam ruang - k tersebut.



Gambar 4. Ruang –k tiga dimensi : a. ruang –k dalam kuadran I (k_x,k_y,k_z›0); b. proyeksi ruang –k pada bidang k_y-k_z; c. volume yang ditempati oleh satu titik dalam ruang –k

Rapat keadaan g(ω) dalam ruang tiga-dimensi dari rambatan gelombang dapat ditentukan berdasarkan gambar 4. Jumlah ragam gelombang (dalam bola berjejari q) adalah perbandingan antara volume bola dan volume yang ditempati oleh satu titik dalam ruang - k, jadi :

$$N = \frac{\frac{4}{3}\pi k^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \left(\frac{L^3}{6\pi^2}\right) k^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(18)$$

Turunkan (diferensiasi) N terhadap q akan memberikan g(ω) dω :

$$dN = \frac{L^3}{2\pi^2} k^2 dk \equiv g(\omega) d\omega$$

atau,

$$g(\omega) = \frac{L^3}{2\pi^2} k^2 \frac{dk}{d\omega}$$

Gunakan hubungan dispersi :

$$\omega = v_s k \; ; \mathrm{k}^2 = \left(\frac{\omega}{v_s}\right)^2 \; ; \frac{\mathrm{dk}}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{v_s}$$

Sehingga diperoleh :

$$\mathrm{g}(\omega) = \frac{V}{2\pi^2 v_s^3} \omega^2 \quad \text{.............................(19)}$$

V = L^3, yaitu volume medium apabila berbentuk kubus. Dengan hasil rumusan terakhir, dapat diperluas hubungan antara jumlah ragam gelombang yang dinyatakan oleh titik-titik dalam ruang - k. Dalam pengertian ini, satu titik (k_x, k_y, k_z) setara dengan 3 (tiga) ragam gelombang dalam ruang (koordinat) tiga-dimensi. Anggap, misalnya, gelombang merambat ke arah - x, maka ragam ke arah x ini menjadi gelombang longitudinal (1 ragam) sedangkan ragam ke arah y dan z menjadi gelombang tronsversal (2 ragam), sehingga :

$(kx, ky, kz) \rightarrow$ **- 1 ragam longitudinal**

- 2 ragam transversal

Dalam kasus gelombang merambat ke arah sumbu x, maka ungkapan rapat keadaan dapat dituliskan kembali berbentuk :

$$g(\omega) = \frac{V}{2\pi^2} \omega^2 \left(\frac{1}{v_{s,L}^3} + \frac{2}{v_{s,T}^3}\right) \quad \text{.............................(20)}$$

dengan $v_{s,L}$ dan $v_{s,T}$ adalah kecepatan gelombang longitudinal dan kecepatan gelombang transversal.

Sampai sejauh ini, kita telah membahas rambatan gelombang elastik pada bahan padat. Gelombang elastik pada zat padat ini dapat disebabkan baik oleh gelombang mekanik (bunyi/ultrasonik) maupun oleh gelombang termal (inframerah). Kedua gelombang tersebut dapat menyebabkan getaran kisi. Untuk selanjutnya, paket-paket energi getaran kisi disebut fonon. Fonon dapat dipandang sebagai “kuasi partikel” seperti halnya foton pada gelombang cahaya/elektromagnet. Melalui konsep yang mirip “dualisme partikel-gelombang” ini, rambatan getaran kisi dalam zat padat dapat dianggap sebagai aliran fonon.

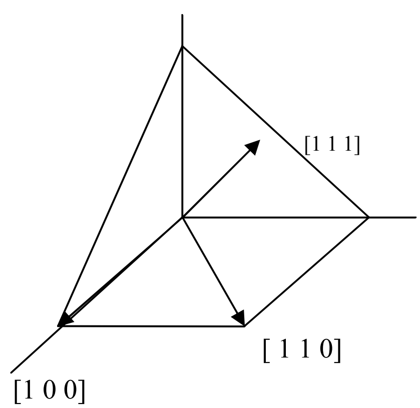
Beberapa konsep dualisme gelombang-pertikel ditunjukkan pada tabel 1.

Tabel 1. Beberapa eksitasi elementer pada zat padat.

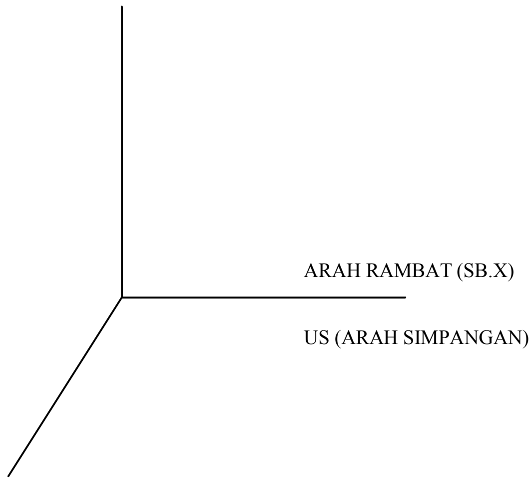
GELOMBANG	PARTIKEL
Gel. Elektromagnet	Foton
Gel. Elastik/getaran Kisi	Fonon
Gel. Elektron Kolektif	Plasmon
Gel. Magnetisasi	Magnon
Gel. Elektron + deformasi elastik	Polaron
Gel. Polarisasi	Eksiton

2. GETARAN KRISTAL YANG BERBASIS SATU ATOM (MONOATOMIK)

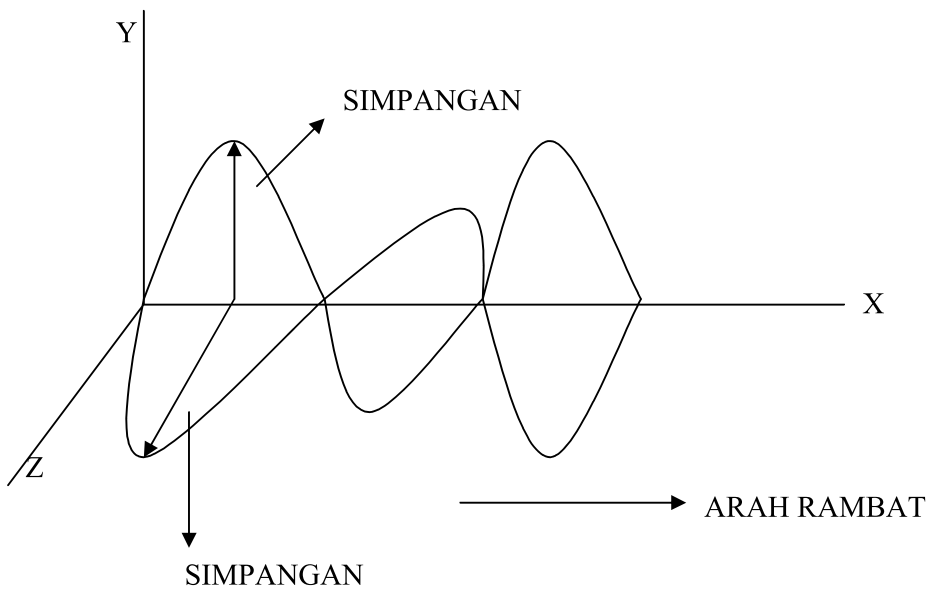
Kita mulai dengan kasus yang sederhana. Yaitu kasus yang melibatkan getaran kristal akibat adanya gelombang elastis yang merambat dalam arah [1 0 0] ; [1 1 0] ; [1 1 1].



Untuk setiap vektor gelombang ($\vec{k}$) terdapat 3 model getaran yaitu : 1 buah longitudinal dan 2 buah transversal.

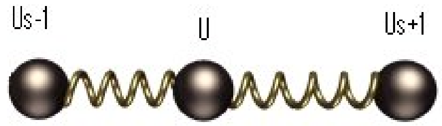


1 BUAH GELOMBANG LONGITUDINAL



2 BUAH GELOMBANG TRANSVERSAL

Kita anggap bahwa kristal akan merespon



Gelombang elastik secara linier terhadap gaya. Artinya : gaya yang bekerja pada bidang kristal yang ke : s adalah sebanding dengan selisih simpangannya.

Jadi:

$F_s = c\ (U_{s+1} - U_s) + c\ (U_{s-1} - U_s)$

$$\mathbf{F_s = c\ (U_{s+1} + U_{s-1} - 2U_s)} \text{..................................}\mathbf{(1)}$$

Dengan :

F_s = gaya yang bekerja pada bidang kristal yang ke : s

C = tetapan elastisitas

U_s = simpangan bidang kristal yang ke s

U_{s+1} = simpangan bidang kristal yang ke s+1

U_{s-1} = simpangan bidang kristal yang ke s-1

Persamaan gerak bidang kristal ke s adalah :

F = m. a = c. Δx

m. a = hukum newton

c. Δx = hukum hooke

$$\mathbf{m.\ \frac{d^2U_s}{dt^2} = c\ (U_{s+1} + U_{s-1} - 2U_s)} \text{..........................}\mathbf{(2)}$$

m = massa atom.

Solusi dari persamaan gerak ini tergantung pada waktu (t) yang dinyatakan oleh :

$U_s = e^{-i\omega t}$

Karena pers (2) merupakan turunan hanya terhadap waktu, maka :

$$\frac{d^2U_s}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}[\ e^{-i\omega t}] = -\omega^2.\ e^{-i\omega t}$$

$$U_s = e^{-i\omega t}$$

$$\frac{d^2U_s}{dt^2} = -\omega^2\ U_s$$

Karena itu pers (2) dapat ditulis :

$$\mathbf{-\omega^2\ U_s\ m = c\ (U_{s+1} + U_{s-1} - 2U_s)} \text{......................................}\mathbf{(3)}$$

Solusi:

$U_s = e^{-i\omega t}$ dapat ditulis sebagai berikut :

$U_s = e^{-i\omega t} \approx e^{-i2\pi v t}$

$= e^{-i2\pi v t \lambda/\lambda}$

$Us = e^{-ikx} = e^{-iksa}$

Secara lengkap U_s dapat ditulis sebagai berikut:

$$\mathbf{U_s = U.\, e^{-iksa}} \text{..}\mathbf{(4)}$$

U = amplitudo

Karena itu:

$U_{s+1} = U.\, e^{-ik(s+1)a} = U.\, e^{-iksa}.\, e^{+ika}$

$$\mathbf{U_{s+1} = U_s\, e^{ika}} \text{..}\mathbf{(5)}$$

Pers (5) → (3) didapat :

$-\omega^2 U_s m = c\,(U_s e^{ika} + U_s e^{-ika} - 2\,U_s)$

$$\mathbf{-\omega^2 m = c\,(e^{ika} + e^{-ika} - 2)} \text{...}\mathbf{(6)}$$

Karena $e^{+i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ maka $e^{ika} + e^{-ika} = 2\cos ka$

Sehingga persamaan (6) menjadi:

$\omega^2 m \quad = -c\,(2\cos ka - 2)$

$\omega^2 \quad = \dfrac{2c}{m}(1-\cos ka)$

$$\boldsymbol{\omega} \quad \mathbf{= [\frac{2c}{m}(1-\cos ka)]^{-1/2}} \text{.....................................}\mathbf{(7)}$$

Dengan $1-\cos ka = 2\sin^2(\frac{1}{2}ka)$, Persamaan (7) menjadi :

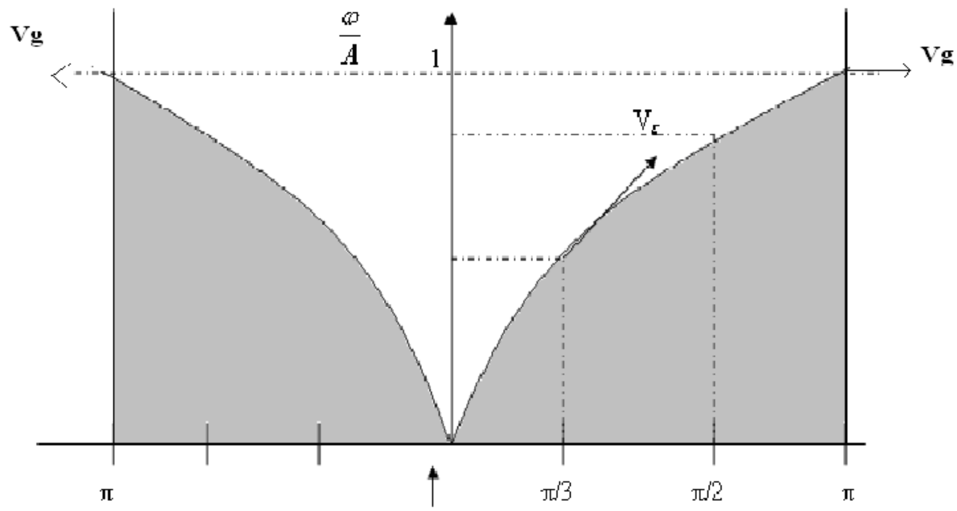
$\omega^2 = \dfrac{2c}{m}\, 2\sin^2(\frac{1}{2}ka)$

$$\boldsymbol{\omega} \mathbf{= 2\sqrt{\frac{c}{m}}\ \left|\sin \tfrac{1}{2} ka\right|} \text{.....................................}\mathbf{(8)}$$

$2\sqrt{\dfrac{c}{m}} \quad = A$ (amplitudo)

Persamaan (8) merupakan Persamaan Dispersi. Persamaan (8) menyatakan hubungan antara frekuensi sudut (ω) terhadap vektor gelombang (k). $\omega = f(k)$

Bila dinyatakan dengan grafik



Daerah Brillovin I

Sin π/2 = sin 90° → max = 1

Sin $\frac{\pi/2}{2}$ = sin 45° = ½ √2

Sin $\frac{\pi/3}{2}$ = sin 30° = ½

Kecepatan grup (kecepatan kelompok) vg

$V_g = \frac{d\omega}{dk}$ → gradien

$= \frac{d}{dk}\left(2\sqrt{\frac{c}{m}}\ \left|\sin \tfrac{1}{2} ka\right|\right)$

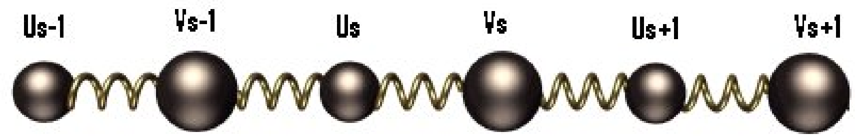
$$\mathbf{V_g = a\sqrt{\frac{c}{m}}\ \cos\tfrac{1}{2}\,ka}\ \textbf{.........................(9)}$$

Pada saat :

- ⇨ ka = π → $\frac{2\pi}{\lambda}$ a = π → λ = 2a
- ⇨ $V_g = a\sqrt{\frac{c}{m}}\ \cos\tfrac{1}{2}\,ka = 0$ → artinya : tidak ada gradien kemiringan (lihat di grafik)
- ⇨ ka = π/2 → $\frac{2\pi}{\lambda}$ a = π/2 → λ = 4a
- ⇨ $V_g = a\sqrt{\frac{c}{m}}\ \cos \pi/4$

$\approx 0{,}74\ a\ \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ → ada gradien kemiringan.

3. VIBRASI KRISTAL DIATOMIK



Persamaan gerak :

F = m.a = c. Δx

Untuk

$m_1 \rightarrow m_1 \dfrac{d^2U_s}{dt^2} = c\ \{(V_s - U_s) + (V_{s-1} - U_s)$

$$\mathbf{m_1 \dfrac{d^2U_s}{dt^2} = c\ \{ V_s + V_{s-1} - 2U_s\}.........(1)}$$

Untuk

$m_2 \rightarrow m_2 \dfrac{d^2U_s}{dt^2} = c\ \{(U_{s+1} - V_s) + (U_s - V_s)$

$$\mathbf{m_2 \dfrac{d^2U_s}{dt^2} = c\ \{U_{s+1} + U_s - 2\ V_s\}.........(2)}$$

Solusinya :

$$\mathbf{U_s = U.\ e^{i\,(ksa - \omega t)}}$$
$$\mathbf{V_s = V.\ e^{i\,(ksa - \omega t)}}$$
$$\mathbf{U_{s+1} = U.\ e^{i\,(ksa - \omega t)}.e^{ika}}$$
$$\mathbf{V_{s-1} = V.\ e^{i\,(ksa - \omega t)}.e^{-ika}......................................(3)}$$

Persamaan (3) dimasukkan ke persamaan (1) diperoleh

$U_s = U.\ e^{i\,(ksa - \omega t)}$

$\dfrac{dU_s}{dt} = -\,i\omega U.\ e^{i\,(ksa - \omega t)}$

$\dfrac{d^2U_s}{dt^2} = -\omega^2\ U.\ e^{i\,(ksa - \omega t)}$

$-m_1.U\ \omega^2\ e^{i\,(ksa - \omega t)} = c\{U.\ e^{i\,(ksa - \omega t)} + V.\ e^{i\,(ksa - \omega t)}.e^{-ika} - 2\ U.\ e^{i\,(ksa - \omega t)}\}$

$$-m_1.U\omega^2 = c\{U + Ve^{-ika} - 2U\} \qquad \textbf{..............................(4)}$$

Dengan cara yang sama bila persamaan (3) dimasukkan ke persamaan (2) didapat :

$$-m_2.V\omega^2 = cU(1 + e^{ika}) - 2cV\} \qquad \textbf{..............................(5)}$$

Dari persamaan (4) dan persamaan (5) bila dibuat determinant:

$$\begin{vmatrix} 2c - m_1\omega^2 & (-c)(1+e^{ika}) \\ (-c)(1+e^{ika}) & 2c\text{-}m_2\omega^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U \\ V \end{vmatrix} = |0|$$

$$\begin{vmatrix} 2c - m_1\omega^2 & (-c)(1+e^{ika}) \\ (-c)(1+e^{ika}) & 2c\text{-}m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\{(2c - m_1\omega^2)(2c - m_2\omega^2)\}\text{-}\{(-c)(1+e^{ika})\ (-c)(1+e^{-ika})\} \qquad = 0$$

$$(m_1m_2)\omega^4\text{-}\{2c(m_1+m_2)\}\omega^2\text{-}c^2(2+e^{ika+}\ e^{-ika}) \qquad = 0$$

Ingat

$e^{+ika} = \cos ka + i \sin ka$

$e^{ika} + e^{-ika} = 2 \cos ka$

Maka

$(m_1m_2)\omega^4\text{-}\{2c(m_1+m_2)\}\omega^2 + 2c^2(1- \cos ka) = 0$

Rumus abc:

$$(\omega_{12})^2 = \frac{2c(m_1+m_2) \pm \sqrt{\{2c(m_1+m_2)\}^2 - 4(m_1m_2)(2c^2)(1-\cos ka)}}{2(m_1m_2)}$$

Ingat

$1\text{-}\cos ka = \sin^2 \tfrac{1}{2} ka$

Maka

$$(\omega_1)^2 = c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) + c\sqrt{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^2 - \frac{4}{m_1m_2}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)} \qquad \textbf{........................(6)}$$

Persamaan (6) merupakan persamaan cabang optik (gelombang elektromagnetik)

$$(\omega_2)^2 = c\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) - c\sqrt{\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)^2 - \frac{4}{m_1m_2}\sin^2\left(\frac{ka}{2}\right)} \qquad \textbf{........................(7)}$$

Persamaan (7) merupakan persamaan cabang akustik (bunyi)

Grafik: $\vec{\omega} = f(\vec{k})$

Untuk

⇨ k=0 → $\omega^2_{op} = (2c)(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) \rightarrow \omega_{op} = \sqrt{(2c)(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})}$

$$\omega^2_{ak} = c(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) - c(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) = 0$$

⇨ k=π/a → $\omega^2_{op} = c(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) + c\sqrt{(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2})^2 - \frac{4}{m_1 m_2}}$

$$= c(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) + c\sqrt{(\frac{1}{m_1})^2 + (\frac{1}{m_2})^2 + \frac{2}{m_1 m_2} - \frac{4}{m_1 m_2}}$$

$$= c(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) + c\sqrt{(\frac{1}{m_1})^2 + (\frac{1}{m_2})^2 - \frac{2}{m_1 m_2}}$$

$$= c(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) + c\sqrt{(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2})^2}$$

$$= c(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) + c(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2})$$

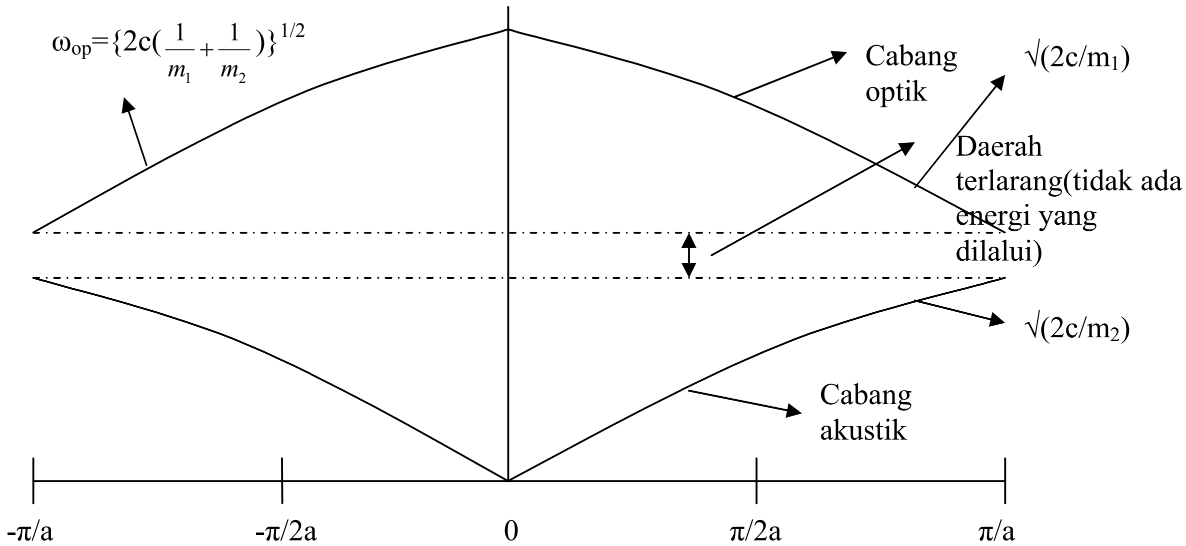
$$\boldsymbol{\omega^2_{op} = \frac{2c}{m_1}} \text{ ....}\textbf{(8)}$$

Dengan cara yang sama :

$$\omega^2_{ak} = c(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}) - c(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2})$$

$$\boldsymbol{\omega^2_{ak} = \frac{2c}{m_2}} \text{ ....}\textbf{(9)}$$

Bila $m_1 < m_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2c}{m_1}} > \sqrt{\frac{2c}{m_2}}$



Bila $m_1 > m_2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2c}{m_1}} < \sqrt{\frac{2c}{m_2}}$

Yang terjadi adalah tidak ada celah terlarang yang artinya untuk setiap energi selalu menghasilkan getaran

DAFTAR PUSTAKA

- **Diktat Pendahuluan Fisika Zat Padat oleh Dra.Wiendartun, M.Si**
- **Introduction To Solid State Physics Edition 6 oleh C.Kittel**