BAB VI

MODEL ELEKTRON BEBAS
(GAS FERMI)

MATERI

6.1. elektron bebas dalam satu dimensi.
- 6.1.1.tingkat energi
- 6.1.2.distribusi Fermi-Dirac
- 6.1.3.energi Fermi

6.2. elektron bebas dalam tiga dimensi.
- 6.2.1.energi Fermi untuk tiga dimensi.
- 6.2.2.kecepatan Fermi
- 6.1.3.temperatur Fermi
- 6.1.4.kapasitas panas elektron bebas.

INDIKATOR

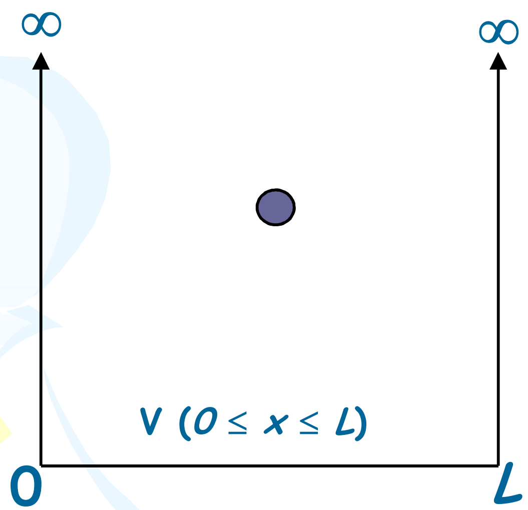
Mahasiswa harus dapat :

- Menentukan tingkat energi electron bebas .
- Menjelaskan arti fisis distribusi Fermi-Dirac.
- Menghitung energi Fermi.
- Menghitung kecepatan Fermi.
- Menghitung suhu Fermi.
- Menghitung kapasitas panas elektron bebas.

MODEL ELEKTRON BEBAS

(Free Elektron Models)

Bayangkan sebuah elektron dengan massa m yang terkungkung oleh sebuah kotak yang panjangnya L dan lebarnya tak terhingga, atau kita sebut saja dengan *sumur potensial*.



Kita asumsikan bahwa energi potensial dari daerah 0 sampai L ini tidak ada (0) dan tidak ada interaksi antara elektron dengan elektron lain atau dengan inti atom (independent elektron approximation).

Kita tahu persamaan gelombang Schrodinger untuk fungsi gelombang $\Psi(x)$ adalah

$$E\psi(x) = H\psi(x) + U\psi(x) \quad \text{……………1)}$$

dimana energi potensial dari persamaan tersebut sama dengan 0 (nol), dan

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

maka persamaannya menjadi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) = E\psi(x) \quad \text{……………2)}$$

solusi dari persamaan diatas adalah

$\psi(x)$ = *A sin kx + B cos kx*

agar $\psi(x=0)$ = $\psi(L=x=0)$ = 0 maka

$\psi(0)$ = *A sin k(0) + B cos k(0) = 0*

$\psi(x)$ = *A sin kx ....3)*

persamaan 3 disubtitusikan ke persamaan 2 maka diperoleh

$$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} A \sin kx + E A \sin kx = 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(-k^2) A \sin kx = E A \sin kx$$

maka didapat persamaan

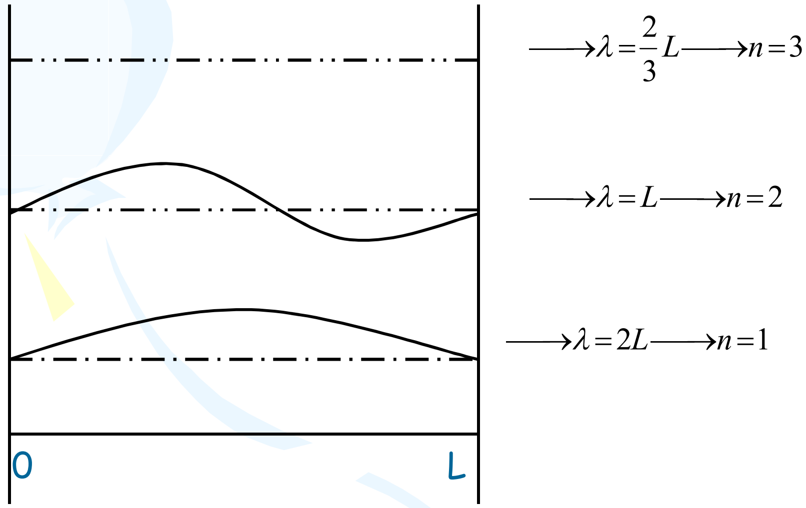
$E = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$ dimana $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ....4) kita ingat lagi bahwa $\psi(x=0) = \psi(L=x=0) = 0$, maka

$$\psi(x=L) = A \sin kL = 0$$

berarti $kL = n\pi$, atau $k = \dfrac{n\pi}{L}$ ……………5)

perhatikan persamaan 4 dan 5, kalau digabungkan maka akan menjadi

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{L} \text{ atau } L = \frac{n\lambda}{2}$$



Berdasarkan persamaan 6 diatas kita ketahui bahwa untuk :

- n = 1, maka L = $\dfrac{\lambda}{2}$
- n = 2, maka L = λ , dan
- n = 3, maka L = $\dfrac{3\lambda}{2}$

Apabila jumlah bilangan kuantumnya kita tambah terus sampai n buah, maka energinya dapat digambarkan oleh persamaan :

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$$

Dalam setiap tingkat energi (*n*), maka ditempati oleh 2 elektron dimana masing-masing elektron tersebut ada yang spin up dan spin down. Oleh karena itu apabila ada N buah elektron maka terdapat

$$n = \frac{N}{2}$$

tingkat energi, maka tingkat energi tertinggi yang ditempati elektron pada keadaan dasar (temperatur 0^0K) adalah

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N\pi}{2L}\right)^2$$ tingkat energi ini disebut **energi Fermi**

DISTRIBUSI FERMI DIRACT

Distribusi fermi diract
dapat menjelaskan peluang suatu partikel untuk berada di tingkat energi E pada saat T>0

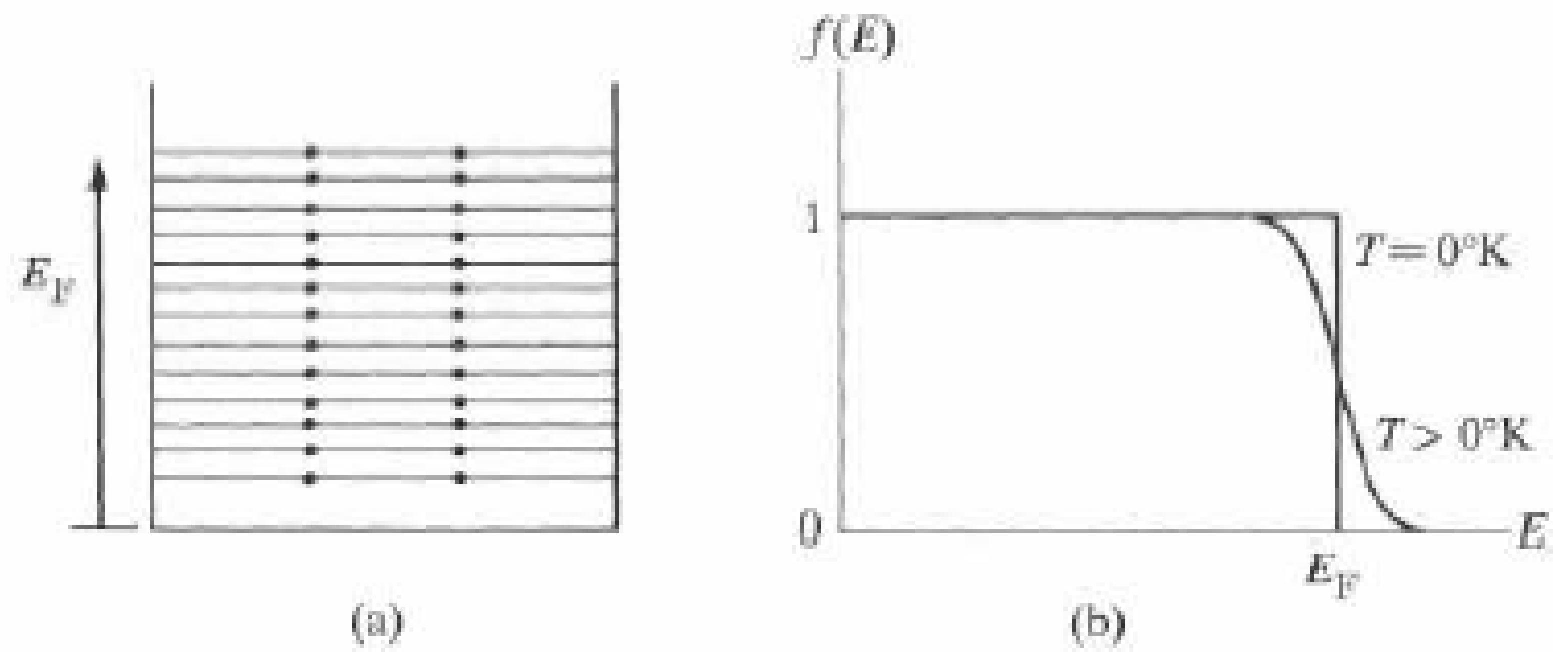
Fungsi distribusi fermi diract

$$f(E)=\frac{1}{\left\{e^{\frac{(E-\mu)}{k_b T}}+1\right\}}$$

Keterangan :

μ = Potensial kimia (pada T = 0^0K, μ =E_f)

f(E) = Peluang suatu partikel untuk berada di tingkat energi E



E_F
(a)
$f(E)$
1
0
$T = 0°K$
$T > 0°K$
E
E_F
(b)

Untuk T= 0

$E < E_f$ maka $f(E) = 1$

$E > E_f$ maka $f(E) = 0$

Untuk T > 0

Dari grafik diatas tingkat energi (E) makin tinggi maka peluang untuk tetap diam semakin kecil sehingga peluang untuk loncat akan semakin besar. Sehingga tingkat energi yang lebih tinggi dari E_f juga ada yang terisi (memiliki peluang)

Sehingga:

$$(E-\mu) > k_b T$$

$$f(E) = \frac{1}{\left\{ e^{\frac{(E-\mu)}{k_b T}} \right\}} = e^{\frac{(\mu-E)}{k_b T}}$$

Untuk sistem 3 dimensi

Partikel bebas V(x) = 0
P.S. -

$$\frac{\hbar}{2m}\left(\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}\right)\psi_{(x,y,z)} = E\psi_{(x,y,z)}$$

$$\psi_{(x,y,z)} = F(x)F(y)F(z)$$

untuk menentukan $\psi_{(x,y,z)}$ kita gunakan metode pemisahan variabel (x, y, z)

sehingga

$$\frac{\hbar}{2m}\left(\underbrace{\frac{1}{F(x)}\frac{d^2}{dx^2}}_{c_1}+\underbrace{\frac{1}{F(y)}\frac{d^2}{dy^2}}_{c_2}+\underbrace{\frac{1}{F(z)}\frac{d^2}{dz^2}}_{c_3}\right)=\frac{EF(x)F(y)F(z)}{F(x)F(y)F(z)}$$

Solusinya :

$$F(x) = A_x e^{ik_x x}$$

$$F(y) = A_y e^{ik_y y}$$

$$F(z) = A_z e^{ik_z z}$$

$$\psi_{(x,y,z)} = A\, e^{\left(ik_x x + ik_y y + ik_z z\right)}$$

$$\psi_{(r)} = A\, e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{r}\right)}$$ simpangan didalam logam

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + j\hat{k}$$

$$\vec{k} = k_x\hat{i} + k_y\hat{j} + k_z\hat{k}$$

Syarat:

$$\left|\vec{k}\right| = k_x k_y k_z = 0; \frac{2\pi}{L}; \frac{4\pi}{L}; \ldots; \frac{2n\pi}{L}$$ Dengan n = 0,1,2,3,4, ...

$$E = \frac{\hbar}{2m}k^2 = \frac{\hbar}{2m}\left(k_x{}^2 + k_y{}^2 + k_z{}^2\right)$$

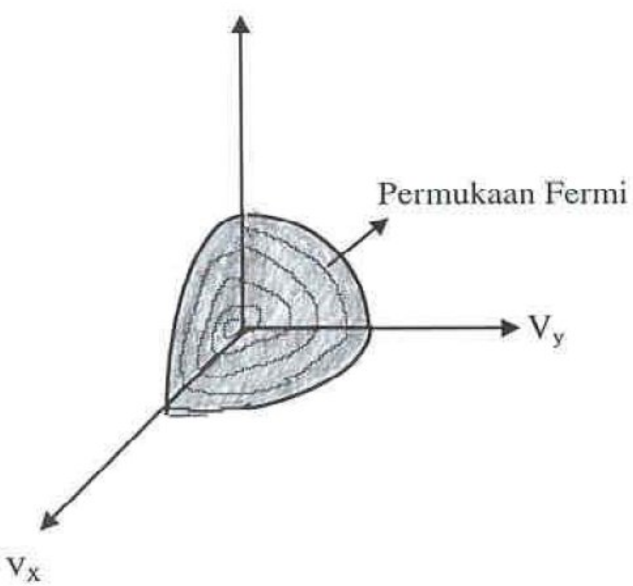
Pada keadaan dasar

$$E_f = \frac{\hbar}{2m}k_f{}^2$$

$$k_f = \left(\frac{2m}{\hbar}E_f\right)^{1/2} \qquad \ldots \qquad *$$

.

kita bayangkan elektron berada dalam sebuah bola



Bola Fermi dalam “ruang” kecepatan pada kuadran I

Maka : elemen volume dalam ruang :

$k = V_c = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^3$ ditempati oleh 2 buah (1 buah orbit $\longrightarrow$ 1 fungsi gelombang)

Jumlah orbit di dalam volume kalau yang berjari-jari adalah

$$\upsilon = \frac{2V_m}{V_e}$$

$$\upsilon = \frac{2\frac{4}{3}\pi\left(k_f\right)^3}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3} = \frac{V}{3\pi^2}\left(k_f\right)^3 \qquad \ldots \qquad *$$

$$k_f = \left(\frac{3\pi^2\upsilon}{V}\right)^{1/3}$$

Dengan * $\longrightarrow$ *

$$\upsilon = \frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^3}E_f\right)^{3/2}$$

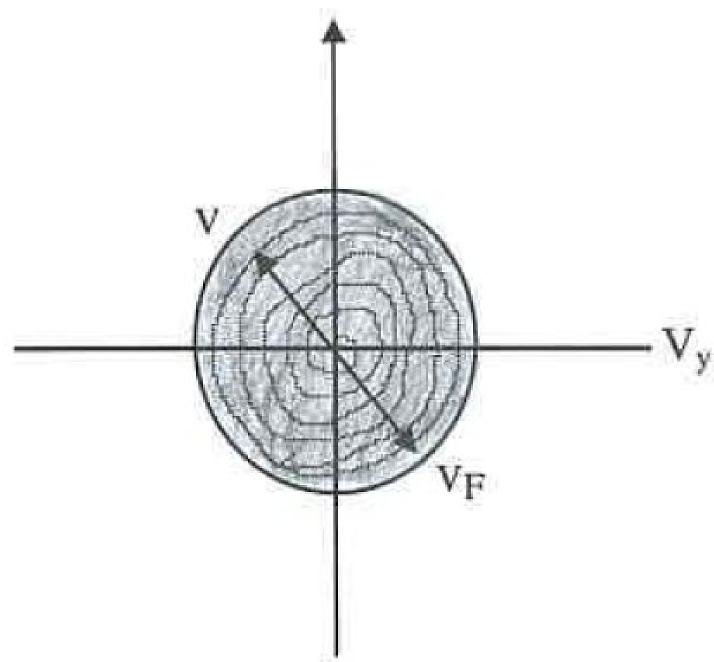
$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 \upsilon}{V}\right)^{2/3}$$

Bila $\frac{\upsilon}{V} = n$ = konsentrasi elektron

Maka : kecepatan pada permukaan sermi (v_F)

$$v_F = \frac{\hbar k_F}{m} = \frac{\hbar}{m}\left(\frac{3\pi^2 \upsilon}{V}\right)^{1/3}$$

Bila digambarkan dalam ruang kecepatan (*v x* , *v y* , *v z*) akan diperoleh permukaan Fermi yang berbentuk permukaan bola dan disebut bola Fermi, seperti pada gambar dibawah. Pada suhu 0ok tidak ada titik di luar bola, artinya bahwa kecepatan elektron maksimum adalah .



Proyeksi bola Fermi pada bidang vy-vz

RAPAT KEADAAN (DENSITY OF STATE)

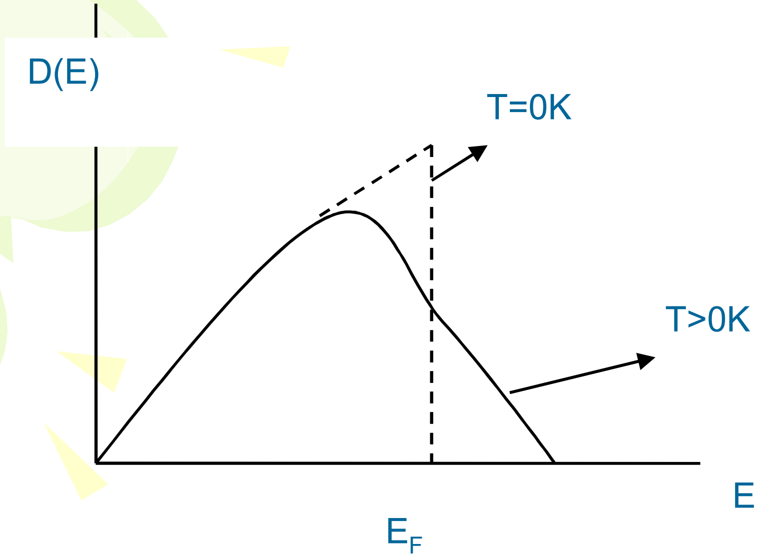
$$D(E)=\frac{\text{JUMLAH ORBITAL}}{\text{SATUAN RENTANG ENERGI}}=\frac{dN_E}{dE}$$

$$E=\frac{h^2}{2m}k^2=\frac{h^2}{2m}\left(3\pi^2\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$N^{\frac{2}{3}}=\frac{2m}{h^2}\frac{V^{2/3}}{\left(3\pi^2\right)^{2/3}}\times E \quad\Rightarrow\quad N=\left(\frac{2mE}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\times\frac{V}{3\pi^2}$$

$$D(E)=\frac{d}{dE}\left\{\frac{V}{3\pi^2}\times\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\times E^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$D(E)=\frac{V}{2\pi^2}\times\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}\times E^{1/2}$$



dari *

$$N = \underbrace{\frac{V}{3\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}}_{c} \cdot E^{\frac{3}{2}}$$

$$\ln N = \ln C \cdot E^{\frac{3}{2}}$$

$$\ln N = \frac{3}{2}\ln E + \ln C$$

$$\frac{dN}{N} = \frac{3}{2}\frac{dE}{E}$$

$$\frac{dN}{N} = \frac{3N}{2E}$$

jadi :

$\therefore D(E) = \dfrac{dN}{dE} = \dfrac{3N}{2E} \Rightarrow$ bentuk lain dari fungsi rapat keadaan.

KAPASITAS PANAS UNTUK ELEKTRON (Cv)

Persoalan yang mengakibatkan kesulitan terbesar dalam perkembangan teori elekton logam adalah mengenai kapasitas panas dari konduksi elektron.

Dari mekanika klasik

- energi untuk satu derajat kebebasan adalah :

$$U = \tfrac{1}{2} k_B . T$$

- sedangkan untuk partikel tunggal (3 derajat kebebasan) adalah:

$$U = 3 . \tfrac{1}{2} k_B . T = \tfrac{3}{2} k_B . T$$

- Kapasitas panas untuk 1 partikel :

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \tfrac{3}{2} k_B$$

- maka untuk N buah partikel kapasitas panasnya :

$$C_V = N . \frac{dU}{dT} = \tfrac{3}{2} N k_B$$

kontribusi elektronik pada temperatur kamar biasanya kurang dari 0,01 dari nilai sesungguhnya.

Bila $\frac{T}{T_F} = 0{,}01 \Longrightarrow E_F = \frac{\hbar}{2m} k_F^2 = k_B T_F$

$T_F = \frac{E_F}{k_B}$ merupakan temperatur fermi untuk T >> K

Pada suhu rendah (kBT << EF), distribusi Fermi Dirac diberikan oleh persamaan

$$F(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}$$

Bila perubahan energi adalah
U $\rightarrow$ U(T) – U(0),
dimanaU(T) = energi setelah elektron pindah dari keadaan dasar

$$U = \int_0^{\infty} E.D(E).F(E)dE - \int_0^{E_F} E.D(E)dE$$

Bila $$N = \int_0^{E_F} D(E)F(E)dE = \int_0^{\infty} D(E)F(E)dE$$

$$NE_F = \int_0^{\infty} D(E)F(E)E_F dE = \left[\int_0^{E_F} + \int_{E_F}^{\infty}\right] D(E)F(E)E_F dE$$

$$U = \int_{E_F}^{\infty} D(E)F(E)(E - E_F)dE + \int_0^{E_F} D(E)(E_F - E)(1 - F(E))dE$$

maka kapasitas panasnya :

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{d}{dT}\left[\int_{E_F}^{\infty} D(E)F(E)(E - E_F)dE + \int_0^{E_F} D(E)(E_F - E)dE + \int_0^{E_F} D(E)(E - E_F)F(E)dE\right]$$

karena integrasi bergantung pada suhu adalah hanya F(E) maka deferensiasinya terhadap suhu hanta berlaku untuk suhu-suhu yang mengandung F(E) saja. Sehingga:

$$C_V = \frac{d}{dT}\int_0^\infty D(E)F(E)(E-E_F)dE$$

$$C_V = k_B\int_0^\infty D(E)(E-E_F)\frac{dF}{dTk_B}dE$$

$$F(E) = \frac{1}{e^{(E-E_F/k_B.T)}+1} \Longrightarrow \frac{dF}{dk_BT} = \frac{dF}{d\tau}(e^{(E-E_F)/\tau}+1)^{-1}$$

$$\frac{dF}{d\tau} = \frac{E-E_F}{\tau^2} = \frac{e^{(E-E_F)/\tau}}{\left\{e^{(E-E_F)/\tau}+1\right\}^2}$$

untuk T<<1

$$C = k_B D(E_F)\int_0^\infty \frac{(E-E_F)^2}{\tau^2}\frac{e^{(E-E_F)/\tau}}{\left\{e^{(E-E_F)/\tau}+1\right\}^2}dE$$

misal x =(E-EF)/τ $\Longrightarrow$

$E = \infty \qquad x = \infty$

$E = 0 \qquad x = -\,{}^{E_F}\!/\!_{\tau}$

$$C = k_B D(E_F) \int_{-E_F/\tau}^{\infty} x^2 \frac{e^x}{e^x+1} \tau dx$$

$$C = k_B{}^2 T D(E_F) \int_{-E_F/\tau} x^2 \frac{e^x}{(e^x+1)} dx = k_B T D(E_F) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{e^x}{\left(e^x \div 1\right)^2} dx$$

$$C_V = \frac{\pi^2}{3} k_B{}^2 T D(E_F)$$

$$D(E) = \tfrac{3}{2}\frac{N}{E} \Longrightarrow D(E_F) = \tfrac{3}{2}\frac{N}{E_F}$$

$$C_V = \tfrac{\pi^2}{3} k_B{}^2 T . \frac{3N}{2E_F} \Longrightarrow E_F = k_B T_F$$

$$C_V = \tfrac{\pi^2}{3} k_B{}^2 \frac{T}{2k_B T_F} \Longrightarrow C_V = \tfrac{\pi^2}{2} k_B{}^2 N \frac{T}{T_F}$$

kapasitas panas untuk elektron

Dari percobaan kapasitas panas pada temperatur rendah seperti pada temperatur Debye dan temperatur Fermi dapat ditulis dalam bentuk :

$$C = \alpha T + \beta T^3$$

Kondisi elektron lebih dominan pada temperatur rendah konstanta α dan β bisa dihasilkan dengan mencocokkan data percobaan.

Capasitas panas total (Cv tot) = (Cv phonon + Cv elektron)

Cv total = $C_V = \frac{12}{5}\pi^4 N K_B \left(\frac{T}{\Theta}\right)^3$ + $C_V = \frac{\pi^2}{2} k_B{}^2 N \frac{T}{T_F}$

kapasitas panas untuk phonon

kapasitas panas untuk elektron

Latihan Soal

1. Jelaskan konsep dan persamaan elektron bebas dalam satu dimensi untuk :
   a. tingkat energi
   b. distribusi Fermi-Dirac
   c. energi Fermi

2. Jelaskan konsep dan persamaan elektron bebas dalam tiga dimensi untuk :
   a. energi Fermi
   b. kecepatan Fermi
   c. temperatur Fermi
   d. kapasitas panas elektron bebas.
   e. kapasitas panas total

3. Dengan menganggap bahwa setiap atom Helium (He) memberikan kontribusi tiga electron bebas kepada gas electron, massa atom He = 1u (sma) dan rapat massa (ρ) He = 0,081 gr/cm^3.

Hitunglah :

a. energi Ferminya (kunci : = 6,85 $.10^{-16}$ erg
= 6,85 $.10^{-23}$ joule

b. temperatur Fermi (kunci : T_f = 4,96 K)

c. kecepatan Fermi (v = 1,745.10^2 m/s)

d. capasitas panas electron pada suhu 300 K.

e. rapat keadaan (density of state) pada $E = E_f$ untuk volume 1 cm^3.

catatan : 1 joule = 10^7 erg