3 PROBABILITAS DARI GELOMBANG MATERI

A. Gelombang de Broglie

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

$$p = mv$$

$$\Psi_p\ (x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp\left[-\frac{i}{h}(Et - px)\right],$$

$$\Psi_p\ (x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h}} \exp\left[-\frac{i}{h}\left(\frac{p^2}{2\,m}t - px\right)\right],$$

persamaan tersebut dinamakan persamaan gelombang de Broglie dari materi. Kecepatan phase dari gelombang materi ialah: $v_p = E/p = p/2m$ sedangkan kecepatan partikelnya $v = p/m$.

B. Interpretasi Probabilitas

$$\rho(x,t) = |\Psi_{(x,\,t)}|^2 = \Psi^*_{(x,\,t)}\ \Psi_{(x,\,t)} = M^2(x,t)$$

$$\int |\Psi(x,t)|^2\, dx = \int \Psi^*(x,t)\ \Psi(x,t)\ dx =$$

$$\int |\Psi_{(x,\,t)}|^2\, dx = (1/2\pi h) \int \exp[\,(i/h)(Et - px] \exp[- i/h(Et - px]\, dx$$

$$\int |\Psi_{(x,\,t)}|^2\, dx = (1/2\pi h) \int dx$$

$$\langle x\rangle = \int x\ \rho(x,t)\ dx = \int \Psi^*_{(x,\,t)}\ x\ \Psi_{(x,\,t)}\, dx$$

$$\mathrm{Var}\ (x) = \langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle$$

$$\mathrm{Var}\ (x) = \int \Psi^*(x,t) \langle (x - \text{‘}\langle x\rangle)^2\rangle\ \Psi(x,t)\ dx$$

$$\langle p\rangle = \int p\ |\varphi\ (p)|^2\ dp = \int \varphi^*_{(p)}\ p\ \varphi_{(p)}\, dp$$

dengan $\varphi\ (p)$ adalah fungsi gelombang dalam ruang momentum. Dengan demikian apabila kita akan menentukan $\langle p\rangle$ sedangkan partikelnya digambarkan oleh $\Psi(x, t)$, maka pertama-tama kita harus mentransformasi $\Psi(x, t)$ menjadi $\varphi_{(p)}$, baru kemudian menghitung <p>. Tapi ada satu cara yang langsung untuk menghitung <p> dari fungsi gelombang Ψ(x, t), yaitu dengan mentrasformasi besaran dinamik menjadi operator sebagai berikut.

$$\Psi_p\ (\ x,\ t\ ),\ = (1/2\pi h)\ \exp\ [\ -\ (i/h)(Et\ -\ px]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi_p(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi h}}\ \ \exp\ [-\frac{i}{h}(Et - px]\right\}$$

$$\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi\ \ (x,t) = \hat{p}\ \ \psi(x,t)$$

Jadi variabel momentum p ditranslasi menjadi operator momentum, yaitu: $\hat{P} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, maka

$$\text{<p>} = \int \psi^*(x,t)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)\ \ dx$$

Soal : Buktikanlah <p> = $\int \psi^*(x,t)\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t)\ \ dx =$ = ∫ Ψ*(p) p Ψ(p t) dp.

Sedangkan variansi momentumnya adalah Var (p) = < (p - < p >)^2 >

C. Ketidakpastian Posisi dan Momentum

:

$$\Delta x = \sqrt{\text{Var}\ \ (x)} \qquad\qquad \Delta p = \sqrt{\text{Var}\ \ (p)}$$

D. Ketidakpastian Energi Kinetik

$$\text{<K>} = \int \Psi^*(x)\frac{\hat{P}^2}{2m}\Psi(x)\ \ dx = \int \Psi^*(x)\ \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right]\ \Psi(x)\ \ dx$$

$$\text{<K>} = \int \Psi^*(x)\ \ \hat{K}\ \ \Psi(x)\ \ dx$$

dengan $\hat{K}$ adalah operator energi kinetik yang besarnya samadengan $\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right]$.

E. Nilai Harap Energi Total

$$\text{<E>} = \int \Psi^*(x)\ \ (K + V)\ \ \Psi(x)\ \ dx = \int \Psi^*(x)\ \ \left[\hat{H}\right]\Psi(x)\ \ dx \qquad (3.18)$$

dengan $\hat{H}$ dinamakan operator Hamiltonian.

F. Kesimpulan

$$\langle A \rangle = \int \psi^*(x) \hat{A} \psi(x)\, dx \tag{3.19}$$

<u>Contoh SOAL:</u> Misalkan suatu partikel bermassa diam m bergerak sepanjang garis lurus dan pada suatu saat fungsi gelombangnya adalah:

$$\psi(x) = \begin{cases} c & \text{untuk } -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \\ 0 & \text{untuk ditempat lainnya} \end{cases}$$

Tentukanlah :

a. c apabila Ψ ternormalisasi = 1.

b. rapat kebolehjadian posisi P(x).

c. nilai harap posisi.

d. fungsi gelombang dalam ruang momentum.

e. rapat kebolehjadian momentum.

f. nilai harap momentum.

Penyelesaian :

a. kebolehjadian posisi x apabila Ψ ternormalisasi ialah:

$$\int_{a/2}^{-a/2} |\psi(x)|^2\, dx = 1$$

$$\int_{a/2}^{-a/2} c^2\, dx = 1$$

maka $c = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$

b. rapat kebolehjadian posisi

$$P(x) = |\psi(x)|^2 = c^2 = \frac{1}{a}$$

c. nilai harap posisi

$$\langle x\rangle = \int_{-a/2}^{a/2} xP(x)\,dx = \int_{-a/2}^{a/2} x\frac{1}{a}\,dx = 0$$

d. fungsi gelombang dalam ruang momentum

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-a/2}^{a/2}\psi(x)\,e^{-ipx/\hbar}\,dx$$

$$\varphi(p) = \frac{c}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-a/2}^{a/2}\left(\cos\frac{px}{\hbar} - i\sin\frac{px}{\hbar}\right)dx$$

$$\varphi(p) = \frac{c}{\sqrt{2\pi\hbar a}}\,\frac{a\sin\left(\frac{pa}{2\hbar}\right)}{\frac{pa}{2\hbar}}$$

e. rapat kebolehjadian momentum

$$P(p) = |\varphi(p)|^2 = \frac{A}{\pi}\frac{\sin^2 pA}{(pA)^2} \quad \text{dengan } A = \frac{a}{2\hbar}$$

f. nilai harap momentum

$$\langle p\rangle = \int_{-a/2}^{a/2}\psi^*(x)\hat{P}\psi(x)\,dx = \int_{-a/2}^{a/2}\psi^2(x)\left[\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\right]c\,dx = 0$$

Soal Latihan!.

Fungsi gelombang suatu partikel pada suatu saat adalah

$$\psi(x) = c\exp\left\{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2} + i\beta x\right\}$$ dengan c, a, x_0 dan β adalah konstanta positif.

Tentukanlah:

a. konstanta c jika $\psi(x)$ ternormalisasi

b. <x>

c. var <x>

d. <p>

e. var <p>