5 PERSAMAAN SCHRODINGER

Ekuivalensi ini bersesuaian dengan solusi umum persamaan (5.1) untuk gelombang harmonik monokromatik tak teredam dalam arah + x yaitu :

$$Y = A\ e^{-i\,\omega\,(t - x/v)} \qquad (5.2)$$

atau

$$Y = A \cos [\omega(t\text{-}x/v)] - i\sin [\omega(t\text{-}x/v)] \qquad (5.3)$$

A. Persamaan Schrodinger Bergantung Waktu

:

$$i\hbar\ \delta\Psi/\delta t = -\hbar^2/2m\ (\delta^2\Psi/\delta x^2 + \delta^2\Psi/\delta y^2 + \delta^2\Psi/\delta z^2\ ) + V\ (x,y,z)\Psi \qquad (5.16)$$

B. Persamaan Schrodinger Tak Bergantung Waktu

$$\Psi = A\ e^{-(i/\hbar)(Et\text{-}px)} = A\ e^{-(iE/\hbar)t}\ e^{(ip/\hbar)x}$$

$$\Psi = \Psi\ e^{-(iE/\hbar)t} \qquad (5.17)$$

dengan $\Psi = \ e^{-(ip/\hbar)t}$. Jadi Ψ merupakan perkalian dari fungsi gelombang bergantung waktu $e^{-(iE/\hbar)t}$ dan fungsi gelombang bergantung pada kedudukan Ψ. . Subtitusikan persamaan (5.17) ke dalam persamaan (5.15) maka diperoleh:

$$i\hbar\Psi\left(-iE/\hbar\right)e^{-(iE/\hbar)t} = -\frac{\hbar^2}{2m}e^{-(iE/\hbar)t}\frac{\partial^2\Psi}{dx^2} + v\Psi e^{-(iE/\hbar)t}$$

$$E\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{dx^2} + v(x)\Psi \qquad \text{atau}$$

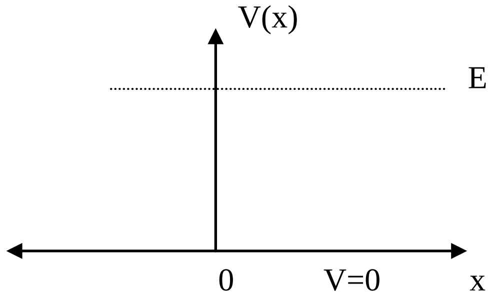
$$\frac{\partial^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V\right)\Psi = 0 \qquad (5.18)$$

$$\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right) + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V\right)\Psi = 0 \qquad (5.19)$$

C. Aplikasi Persamaan Schrodinger Pada Permasalahan Sederhana untuk Kasus Satu Dimensi.

1. Partikel Bebas *(Free Particle)*

a. Proton di Dalam Siklotron



Gambar 5.1 Grafik Energi partikel bebas

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \mathrm{E}\Psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \frac{-2m}{\hbar^2}\mathrm{E}\Psi(x)$$

$$misal : k^2 = \frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = k^2\Psi(x)$$

Solusinya adalah : $\Psi(x) = \mathrm{A}e^{ikx} + \mathrm{B}e^{-ikx}; dengan\ \ k = \sqrt{\frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}}$

Ada dua kemungkinan yaitu :

1. <u>Partikel bergerak ke kanan</u>

   B = 0 dan $\Psi(x) = \mathrm{A}e^{ikx}$

   Energi partikelnya ialah : $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}(\mathrm{A}e^{ikx}) = \mathrm{E}\,\mathrm{A}e^{ikx}$

   $$\frac{k^2\hbar^2}{2m}\mathrm{A}e^{ikx} = \mathrm{E}\,\mathrm{A}e^{ikx}$$

   Atau : $\mathrm{E} = \frac{k^2\hbar^2}{2m}$

   Konstanta normalisasi A dapat ditentukan sebagai berikut :

   Jika panjang lintasan partikel itu $0 \le x \le L$

$$\int_0^L (Ae^{ikx})^*(Ae^{ikx})\,dx = 1$$

$$A^2 \int_0^L dx = 1 \longrightarrow A = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

Maka persamaan keadaannya adalah : $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$ dengan $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar}}$

$\Psi(x,t) = \psi(x) \,.\, \psi(t)$

$$= \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} e^{(\frac{-i}{\hbar})Et}$$

Bila dinyatakan dalam variable gelombang semuanya :

$E = h\upsilon$ maka $\frac{E}{\hbar} = 2\pi\upsilon = \omega$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(kx-\omega t)}$$

Harga rata-rata dari variabel momentumnya :

$$\langle P \rangle = \int_0^L \Psi(x)^* \hat{P} \Psi(x) dx$$

$$\langle P \rangle = \int_0^L \left(\frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}\right)^* \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} dx = \frac{k\hbar}{L}\int_0^L dx = k\hbar$$

Energi partikel dapat dicari sebagai berikut :

Subsitusi $\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}$ ke dalam persamaan Schrodinger

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}(Ae^{ikx}) = E(\frac{1}{\sqrt{L}} Ae^{ikx})$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{L}}(ik)^2 e^{ikx} = E(\frac{1}{\sqrt{L}} Ae^{ikx})$$

$$E = +\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

2. <u>Partikel bergerak ke kiri</u>

A=0

Ψ(x) = B e^{-ikx}

Dengan cara yang sama, tentukanlah : a) B b) ψ(x,t) c) <P> d)E

a) konstanta normalisasi B dapat dicari sebagai berikut :

Ψ(x) = B e^{-ikx} ; A = 0

$$\int_0^L (\mathrm{B}e^{-ikx})*(\mathrm{B}e^{-ikx})dx = 1$$

$$\int_0^L \mathrm{B}e^{ikx}\mathrm{B}e^{-ikx}dx = 1$$

$$\mathrm{B}^2\int_0^L dx = 1$$

$$\mathrm{B} = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

$$b)\Psi(x,t) = \Psi(x)\Psi(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L}}e^{-ikx}e^{(\frac{-i}{\hbar})\mathrm{E}t}$$

$$\mathrm{E} = \hbar\upsilon \rightarrow \frac{\mathrm{E}}{\hbar} = \frac{\hbar\upsilon}{\hbar} = 2\pi\upsilon = \omega$$

$$= \frac{1}{\sqrt{L}}e^{-ikx}e^{-i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{L}}e^{-i(kx+\omega t)}$$

c) <P> = …….?

$$<\mathrm{P}> = \int_0^L \Psi*(x)\hat{\mathrm{P}}\Psi(x)dx = \int_0^L (\frac{1}{\sqrt{L}}e^{-ikx})*(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x})(\frac{1}{\sqrt{L}}e^{-ikx})dx$$

$$= -\int_0^L \frac{k}{L}\hbar e^0 dx = <\mathrm{P}> = -\frac{k}{L}\hbar L = -k\hbar$$

d) E = ………?

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-ikx}$$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{L}} e^{-ikx}\right) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{L}} e^{-ikx}\right)$$

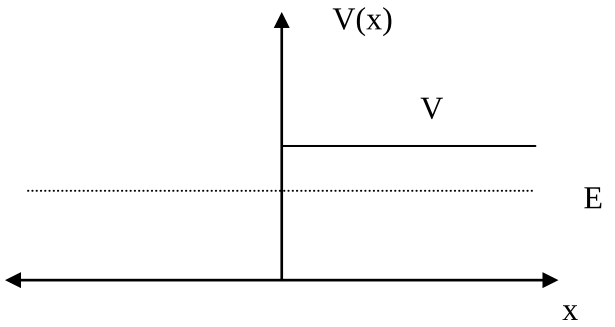
$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{L}}(-ik)^2 e^{-ikx} = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{L}} e^{-ikx}\right)$$

$$\mathrm{E} = \frac{-\hbar^2 k^2}{2m}$$

2. Partikel dalam Keadaan Terikat *(Bound States)*

a. Elektron-Elektron Konduksi yang Berada di Permukaan Logam

t :



Gambar 5.2 Grafik Energi elektron pada permukaan logam

- Daerah I : x < 0

  V(x) = 0 ; energi partikel E

  Persamaan schrodingernya ialah:

$$\frac{-\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \mathrm{E}\Psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \frac{-2m\mathrm{E}}{\hbar^2}\Psi(x)$$

$$misal : k_1^{\,2} = \frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = -k_1^{\,2}\Psi(x)$$

$$\Psi_I(x) = \mathrm{A}e^{ik_1x} + \mathrm{B}e^{-ik_1x}$$

- Daerah II ; x > 0

V (x) = V , E < V

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)+V\Psi(x)=E\Psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)=\frac{-2m(E-V)}{\hbar^2}\Psi(x)$$

$$=\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}\Psi(x)$$

$$Misal : k_{2^2} = \frac{2m(V-E)}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)=k_{2^2}\Psi(x)$$

Solusi ialah $\Psi(x) = C_e^{k_2 x} + D_e^{-k_2 x}$

Fungsi yang diinginkan ialah fungsi gelombang berkelakuan baik :

$\Psi_{II}(x) \to 0$

$\lim x \to \infty$

Maka C = 0 dari $\Psi_{II}(x) = D_2^{-ik2x}$

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx} : x < 0 \\ De^{-k2x} ; x > 0 \end{cases}$$

Solusi dari fungsi gelombang yang diperoleh masih terputus di x = 0 (tak kontinu) maka, kita gunakan rumus penyambung atau persamaan kontinuitas.

$$\Psi_I(x) = \Psi_{II}(x)$$

$$\frac{d\Psi_I(x)}{dx} = \frac{\Psi_{II}(x)}{dx} \quad x=0$$

$\Rightarrow$ A+B=D..............1)

Ik_1 A – ik_1B = -k_2D............2)

Dari dua persamaan tersebut dapat ditentukan harga konstanta A,B dan D

A+B=D	(k_2)	-k_2A+k_2B=-k_2D
ik_1 A – ik_1B = -k_2D	1	ik_1 A – ik_1B = -k_2D +
		(k_2+ik_1)A+(k_2-ik_1)B=0

$$(k_2+ik_1)A=(k_2-ik_1)B$$

$$B= \frac{ik_1 + k_2}{ik_1 - k_2} A$$

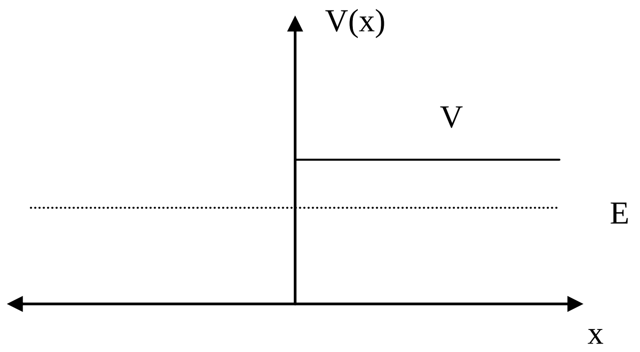
$$D = A$$

$$\begin{array}{l|l|l} A+B=D & ik_1 & ik_1\,A + ik_1B = -k_1D \\ ik_1\,A - ik_1B = -k_2D & 1 & ik_1\,A - ik_1B = -k_2D \quad + \\ \hline & & 2ik_1\,A=(ik_1-k_2)D \end{array}$$

$$D = \frac{2ik_1}{ik_1 - k_2} A$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + \frac{ik_1+k_2}{ik_1-k_2}A; x\le 0 \\ \frac{2ik_{11}}{ik_1-k_2}A; x\ge 0 \end{cases}$$

b. Neutron yang mencoba melepaskan diri dari inti



Gambar 5.3 Grafik Energi Neutron

Daerah I : x < 0

V(x) = 0 ; energi partikel E

Persamaan schrodinger ialah :

$$\frac{-\hbar}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \mathrm{E}\Psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \frac{-2m\mathrm{E}}{\hbar^2}\Psi(x)$$

$$misal: k_1{}^2 = \frac{2m\mathrm{E}}{\hbar^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = -k_1{}^2\Psi(x)$$

$$\Psi_I(x) = \mathrm{A}e^{ik_1x} + \mathrm{B}e^{-ik_1x}$$

Daerah x>0

V(x)=V ;energi E >V

Persamaan schrodingernya : $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + V\Psi(x) = E\Psi(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \frac{-2m(E-V)}{h^2}\Psi(x)$$

$$= \frac{2m(V-E)}{h^2}\Psi(x)$$

$$Misal: k_2{}^2 = \frac{2m(V-E)}{h^2}$$

$$\Psi_{II}(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x}$$

Syarat gelombang yang berkelakuan baik : $\Psi(x) = Ce^{ik_2x}$ dan D=0

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}; x<0 \\ Ce^{ik_2x}; x>0 \end{cases}$$

Persamaan kontinuitasdi x=0 agar fungsi gelombang tersebut berkesinambungan:

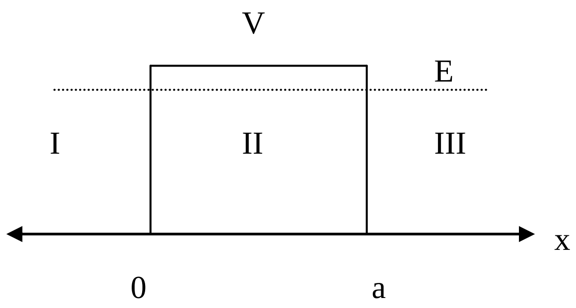
$$\left.\begin{array}{l} \Psi_I(x) = \Psi_{II}(x) \\ \frac{d}{dx}\Psi_I(x) = \frac{d}{dx}\Psi_{II}(x) \end{array}\right| x=0$$

A+B=C	(k_1)	k_1A-k_1B=k_1C
K_1A-k_1B=k_2C	1	k_1A-k_1B=k_2C +
		2k_1A=(k_1+k_2)C

$$C=\frac{2k_1}{k_1+k_2}A$$

$$\Psi(x)=\begin{cases} Ae^{ik_1x}+\frac{ik_1-k_2}{ik_1+k_2}A; x\leq 0 \\ \frac{2ik_{11}}{ik_1+k_2}A; x\geq 0 \end{cases}$$

c. Partikel α yang Mencoba Melepaskan Diri dari *Barrier Coulomb*



Gambar 5.4 Grafik Energi Partikel **α**

Daerah I ; x<0

V(x)=0 energinya E<V

Persamaan schrodingernya : $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)+V\Psi(x)=E\Psi(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)=\frac{-2mE}{\hbar^2}\Psi(x)$$

$\Psi_I(x)=$ dengan $k_1=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

Daerah II ; 0<x<a

V(x)=0

Persamaan schrodingernya : $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)+V\Psi(x)=E\Psi(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)=\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\Psi(x)$$

$\Psi_{II}(x)=Ce^{ik_2x}+De^{-ik_2x}$ dengan $k_2=\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$

Daerah III ; x>a

V(x)=0

Persamaan schrodingernya : $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)+V\Psi(x)=E\Psi(x)$

$\Psi_{III}(x)=Fe^{ik_2x}+Ge^{-ik_1x}$ dengan $k_1=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

Pada daerah ini, partikelnya merupakan partikel bebas artinya tidak ada sesuatu yang menyebabkan partikel untuk dipantulkan kembali jadi G=0

$\Psi_{III}(x)=Fe^{ik_2x}$

$$\Psi(x)=\begin{cases} Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x};x\langle 0 \\ Ce^{k_2x}+De^{-k_2x};0\langle x\langle a \\ Fe^{ik_1x};x\rangle a \end{cases}$$

Persamaan tersebut masih terputus di x=0 dan x=a maka digunakan persamaan kontinuitas:

$$\left.\begin{aligned}\Psi_I(x)&=\Psi_{II}(x)\\ \frac{d\Psi_I(x)}{dx}&=\frac{\Psi_{II}(x)}{dx}\end{aligned}\right| x=0$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi_I(x)&=\Psi_{II}(x)\\ \frac{d\Psi_I(x)}{dx}&=\frac{\Psi_{II}(x)}{dx}\end{aligned}\right| x=a$$

A+B=C+D.......................1)

$ik_1A-ik_1B=k_2C-k_2D$..........2)

$Ce^{k_2a}+De^{-k_2a}=Fe^{ik_1a}$..................3)

$k_2Ce^{k_2a}-k_2De^{-k_2a}=ik_1Fe^{ik_1a}$............4)

Dari kempat persamaan tersebut dapat dicari konstanta A,B,C,D dan F.

Dari persamaan 1 dan 2 :

A+B=C+D	(ik_1)	$ik_1A+ik_1B=Ik_1C-ik_1D$
$ik_1A-ik_1B=k_2C-k_2D$	(1)	$ik_1A-ik_1B=k_2C-k_2D$ +

$2ik_1A=(ik_1+k_2)C+(ik_1+k_2)D$..................5)

Dari persamaan 3) dan 4)

$Ce^{k_2 a} + De^{-k_2 a} = Fe^{ik_1 a}$ | (ik_1) | $ik_1Ce^{k_2 a} + ik_1De^{-k_2 a} = ik_1Fe^{ik_1 a}$

$k_2Ce^{k_2 a} - k_2De^{-k_2} = ik_1Fe^{ik_1 a}$ | (1) | $k_2Ce^{k_2 a} - k_2De^{-k_2 a} = ik_1Fe^{ik_1 a}$

$(ik_1 - k_2)\, Ce^{k_2 a} = -(ik_1 - k_2)\, De^{k_2 a}$

$$D = \frac{(ik_1 - k_2)}{-(ik_1 - k_2)} \frac{e^{2k_2 a}}{e^{-k_2 a}} C$$

$$D = \frac{(k_2 - ik_1)}{-(ik_1 + k_2)} e^{2k_2 a} ..C..........6)$$

Subsitusi 6) ke 5) :

$$2ik_1 A = (ik_1 + k_2)C + (ik_1 - k_2)\left\{\frac{(k_2 - ik_1)}{(ik_1 + k_2)} e^{2k_2 a} C\right\}$$

$$2ik_1 A = \left\{(ik_1 + k_2) + (ik_1 - k_2)\frac{(k_2 - ik_1)}{(ik_1 + k_2)} e^{2k_2 a}\right\} C$$

$$C = \frac{2ik_1(ik_1 + k_2)}{(ik_1 + k_2)^2 + (ik_1 + k_2)(k_2 + ik_1)e^{2k_2 a}} A............7)$$

Subsitusi 7) ke 6) :

$$D = \frac{(k_2 - ik_1)}{-(ik_1 + k_2)} e^{2k_2 a} \left\{\frac{2ik_1(ik_1 + k_2)}{(ik_1 + k_2)^2 + (ik_1 + k_2)(k_2 + ik_1)e^{2k_2 a}}\right\} A..........8)$$

Subsitusi 7) ke 8) :

$$\Rightarrow \left\{\frac{2ik_1(ik_1 + k_2)}{(ik_1 + k_2)^2 + (ik_1 - k_2)(k_2 - ik_1)e^{2k_2 a}} Ae^{2k_2 a}\right\} +$$

$$\left[\frac{(k_2 + ik_1)}{(ik_1 + k_2)} e^{2k_2 a} \left\{\frac{2ik_1(ik_1 + k_2)A}{(ik_1 + k_2)^2 + (ik_1 - k_2)(k_2 - ik_1)e^{2k_2 a}}\right\} e^{-k_2 a} = Fe^{ik_1 a}\right.$$

$$\Rightarrow 2ik_1 A \left\{\frac{e^{2k_2 a}(ik_1 + k_2)(k_2 - ik_1)}{(ik_1 + k_2)^2 + (ik_1 - k_2)(k_2 - ik_1)e^{2k_2 a}}\right\} = Fe^{ik_1 a}$$

$$\Rightarrow F = \frac{2ik_1(e^{2k_2 a})(ik_1 + k_2)(k_2 - ik_1)}{(ik_1 + k_2)^2 + (ik_1 - k_2)(k_2 - ik_1)e^{2k_2 a}} \frac{1}{e^{2k_2 a}} A$$

$$\Rightarrow F = \frac{2ik(ik_1 + k_2)(k_2 - ik_1)\left(e^{k_2 a - ik_1 a}\right)}{(ik_1 + k_2)^2 + (ik_1 - k_2)(k_2 - ik_1)e^{2k_2 a}} A$$

Subsitusi 7) dan 8) ke 1)

B = C + D –A

$$= \frac{2ik_1(ik_1+k_2)A + 2ik_1(k_2+k_1)e^{2k_2a}A}{(ik_1+k_2)^2+(ik_1-k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}} - A$$

$$= A\left[\frac{2ik_1(ik_1+k_2)+2ik_1(k_2+k_1)e^{2k_2a} - \{(ik_1+k_2)^2+(ik_1-k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}\}}{(ik_1+k_2)^2+(ik_1-k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}}\right]$$

$$= A\left[\frac{2ik_1(ik_1+k_2)+2ik_1(k_2+k_1)e^{2k_2a} - (ik_1+k_2) - (ik_1-k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}}{(ik_1+k_2)^2+(ik_1-k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}}\right]$$

$$= A\left[\frac{2ik_1(ik_1+k_2)+ik_1(k_2+k_1)e^{2k_2a} - (ik_1+k_2)^2 + k_2(k_2-ik_1)e^{2k_2a}}{(ik_1+k_2)^2+(ik_1-k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}}\right]$$

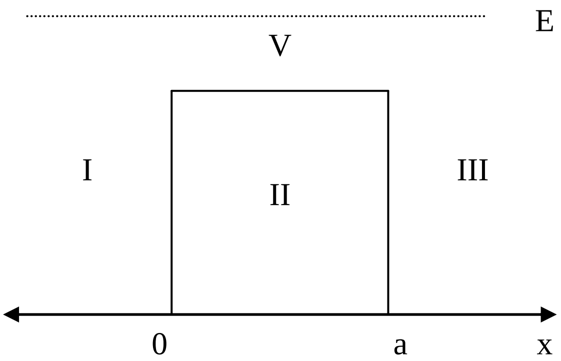
$$= A\left[\frac{2ik_1(ik_1+k_2)+(ik_1+k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a} - (ik_1+k_2)^2}{(ik_1+k_2)^2+(ik_1-k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}}\right]$$

$$= A\left[\frac{(ik_1+k_2)\{2ik_1+(ik_1+k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a} - (ik_1+k_2)\}}{(ik_1+k_2)^2+(ik_1-k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}}\right]$$

maka persamaan keadaan dari partikel tersebut ialah

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + \left[\dfrac{(ik_1+k_2)\{2ik_1+(k_2-ik_1)e^{k_2a} - (ik_1+k_2)\}}{(ik_1+k_2)^2+(ik_1+k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}}\right]e^{-ik_1x}A; x \le 0 \\ \dfrac{2ik_1(ik_1+k_2)}{(ik_1+k_2)^2+(ik_1-k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}}e^{k_2x}A + \left(\dfrac{2ik_1(k_2-ik_1)e^{2k_2a}}{(ik_1+k_2)^2+(ik_1-k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}}\right)e^{-k_2x}a; 0 < x < a \\ \left(\dfrac{2ik_1(ik_1+k_2)(k_2-ik_1)e^{k_2a-ik_1a}}{(ik_1+k_2)^2+(ik_1-k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}}\right)e^{ik_1x}A; x \ge 0 \end{cases}$$

d. Elektron yang Dihamburkan Oleh Atom yang Terionisasi Negatif



Gambar 5.5 Grafik energi elektron yang dihamburkan oleh Atom terionisasi negatif

Daerah I ; x<0

V(x)=0

Persamaan Schrodingernya, $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)+V\Psi(x)=E\Psi(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)=\frac{-2mE}{\hbar^2}\Psi(x)$$

$\Psi_I(x)=Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x}$ dengan $k_1=\sqrt{\frac{-2m(E}{\hbar^2}}$

Daerah II ; 0<x<a

V(x)=V energinya E>V

Persamaan schrodingernya : $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)+V\Psi(x)=E\Psi(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)=\frac{2m}{\hbar^2}(E-V)\Psi(x)=\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)$$

$\Psi_{II}(x)=Ce^{ik_2x}+De^{-ik_2x}$ dengan $k_2=\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}$

Daerah III ; x>a

V(x)=0

Persamaan Schrodingernya, $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)=E\Psi(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \frac{-2mE}{\hbar^2}\Psi(x)$$

$\Psi_{III}(x) = Fe^{ik_1x} + Ge^{-ik_1x}$ dengan $k_1 = \sqrt{\frac{2m(E}{\hbar^2}}$

Pada daerah ini partikel dianggap sebagai partikel bebas sehinnga G=0

$$\Psi_{III}(x) = Fe^{ik_1x}$$

maka persamaan keadaannya ialah

$$\Psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}; x\langle 0 \\ Ce^{k_2x} + De^{-k_2x}; 0\langle x\langle a \\ Fe^{ik_1x}; x\rangle a \end{cases}$$

Persamaan tersebut masih terputus di x=0 dan x=a maka digunakanlah persamaan kontinuitas :

$$\left.\begin{aligned} \Psi_I(x) &= \Psi_{II}(x) \\ \frac{d\Psi_I(x)}{dx} &= \frac{\Psi_{II}(x)}{dx} \end{aligned}\right| x=0$$

$$\left.\begin{aligned} \Psi_{II}(x) &= \Psi_{III}(x) \\ \frac{d\Psi_{II}(x)}{dx} &= \frac{\Psi_{II}(x)}{dx} \end{aligned}\right| x=a$$

A+B=C+D.......................1)

$Ik_1A-ik_1B=k_2C-k_2D$..........2)

$Ce^{k_2a} + De^{-k_2a} = Fe^{ik_1a}$.....................3)

$ik_2Ce^{k_2a} - k_2De^{-k_2a} = ik_1Fe^{ik_1a}$.............4)

Mencari konstanta A,B,C,D & G.

Dari persamaan 1) dan 2) :

A+B=C+D	(ik_1)	$Ik_1A+ik_1B= Ik_1C-ik_1D$
$Ik_1A-ik_1B=k_2C-k_2D$	(1)	$Ik_1A-ik_1B= k_2C-k_2D$ +
		$2ik_1A=(ik_1+k_2)C+(ik_1+k_2)D$.......................5)

Dari persamaan 3) dan 4) :

$Ce^{k_2a} + De^{-k_2a} = Fe^{ik_1a}$	(ik_1)	$ik_1Ce^{k_2a}+ik_1De^{-k_2a} = ik_1Fe^{ik_1a}$
$k_2Ce^{k_2a} - k_2De^{-k_2} = ik_1Fe^{ik_1a}$	(1)	$k_2Ce^{k_2a} - k_2De^{-k_2a} = ik_1Fe^{ik_1a}$

$$(ik_1-k_2)\,Ce^{k_2a} = -(ik_1-k_2)\,De^{k_2a}$$

$$D=\frac{(ik_1-k_2)}{-(ik_1-k_2)}\frac{e^{2k_2a}}{e^{-k_2a}}C$$

$$D=\frac{(k_2-ik_1)}{-(ik_1+k_2)}e^{2k_2a}\ldots\ldots\ldots.6)$$

Subsitusi 6) ke 5) :

$$2ik_1A=(ik_1+k_2)C+(ik_1-k_2)\left\{\frac{(k_2-ik_1)}{(ik_1+k_2)}e^{2k_2a}C\right\}$$

$$2ik_1A=\left\{(ik_1+k_2)+(ik_1-k_2)\frac{(k_2-ik_1)}{(ik_1+k_2)}e^{2k_2a}\right\}C$$

$$C=\frac{2ik_1(ik_1+k_2)}{(ik_1+k_2)^2+(ik_1+k_2)(k_2+ik_1)e^{2k_2a}}A\ldots\ldots\ldots\ldots7)$$

Substitusi 7) ke 6), diperoleh :

$$D=\frac{2k_1e^{2ik_2a}}{(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_2a}}A\ldots\ldots\ldots8)$$

Substitusi 7) ke 8) ke 3), diperoleh :

$$\Rightarrow F=\frac{4k_1k_2e^{ik_2a-ik_1a}}{(k_1+k_2)\left\{(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_1a}\right\}}A$$

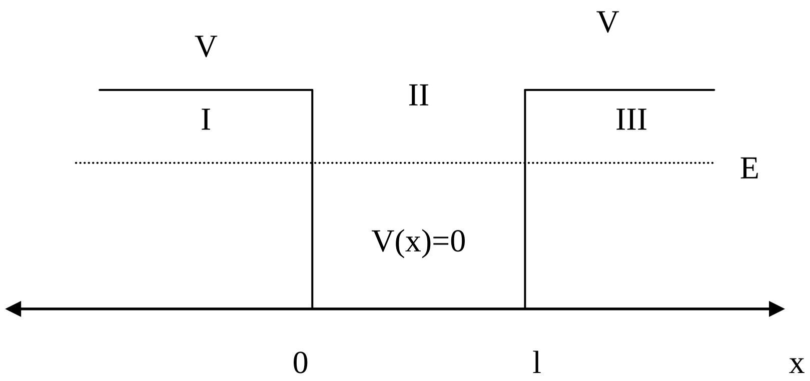
Subsitusi 7) dan 8) ke 1)

B = C + D –A

$$B=\frac{2k_1(k_2-k_1)+2k_1e^{2ik_2a}(k_1+k_2)-(k_1+k_2)\left\{(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_2a}\right\}}{(k_1+k_2)\left\{(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_2a}\right\}}A$$

$$\Psi(x)\begin{cases} Ae^{ik_1x}+\left\{\dfrac{2k_1(k_2-k_1)+2k_1e^{2ik_1a}(k_1+k_2)-(k_1+k_2)\left[(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_2a}\right]}{(k_1+k_2)\left[(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_2a}\right]}\right\}e^{-ik_1x}A; x\le 0 \\ \dfrac{2k_1(k_2-k_1)}{(k_1+k_2)\left[(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_2a}\right]}e^{ik_2x}A+\dfrac{2k_1e^{2ik_2a}}{(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_2a}}e^{-ik_2a}A; 0\le x\le a \\ \dfrac{4k_1k_2e^{ik_2a-ik_1a}}{(k_1+k_2)\left[(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_2a}\right]}e^{ik_1x}A; x\ge a \end{cases}$$

e. Neutron yang terikat dalam inti



Gambar 5.6 Grafik energi neutron yang terikat dalam inti

Daerah I ; x<0

V(x)=V ; E<V

Persamaan Schrodingernya, $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)+V\Psi(x)=E\Psi(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)=\frac{-2m(V-E)}{\hbar^2}\Psi(x)$$

$$\Psi_I(x)=Ae^{k_1x}+Be^{-k_1x}$$

dengan menerapkan syarat fungsi berkelauan baik yaitu lim x mendekati negatif tak hingga maka nilai fungsi harus berhingga, maka haruslah B = 0 sehingga solusi didaerah satu ialah

$\Psi_I(x)=Ae^{k_1x}$ dengan $k_1=\sqrt{\frac{-2m(V-E)}{\hbar^2}}$

Daerah II ; 0<x<l

V(x)=0

Persamaan Schrodingernya, $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)+V\Psi(x)=E\Psi(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)=\frac{-2mE}{\hbar^2}\Psi(x)$$

$\Psi_{II}(x)=Ce^{ik_1x}+De^{-ik_1x}$ dengan $k_2=\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}$

Daerah III ; x>l

V(x)=V energinya E<V

Persamaan schrodingernya : $\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)+V\Psi(x)=E\Psi(x)$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x)=\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}\Psi(x)$$

$$\Psi_{III}(x)=Fe^{k_1x}+Ge^{-k_1x}$$

Syarat fungsi berkelakuan baik : $\lim_{x\to o}\Psi_{III}(x)\to 0 \quad F = 0$

$$\Psi_{III}(x)=Ge^{-k_1x}$$

$$\Psi(x)=\begin{cases} Ae^{k_1x} & ;\ x<0 \\ Ce^{ik_1x}+De^{-ik_1x} & ;\ 0<x<l \\ Ge^{-k_1x} & ;\ x>l \end{cases}$$

Fungsi tersebut masih terputus di titik x=0 dan x=l maka digunakan persamaan kontinuitas :

$$\left.\begin{aligned}\Psi_I(x)&=\Psi_{II}(x)\\ \frac{d\Psi_I(x)}{dx}&=\frac{\Psi_{II}(x)}{dx}\end{aligned}\right|\ x=0$$

$$\left.\begin{aligned}\Psi_{II}(x)&=\Psi_{III}(x)\\ \frac{d\Psi_{II}(x)}{dx}&=\frac{\Psi_{II}(x)}{dx}\end{aligned}\right|\ x=l$$

A = C+D.......................1)

k_1A-= ik_2C – ik_2D ....2)

$$Ce^{k_2 l} + De^{-k_2 l} = Ge^{ik_1 l} \text{.................3)}$$

$$ik_2 Ce^{k_2 l} - k_2 De^{-k_2 l} = -k_1 Ge^{ik_1 l} \text{............4)}$$

Mencari konstanta A,C,D dan G.

Dari persamaan 1 dan 2

$$\begin{array}{l|c|l} A = C + D & (ik_2) & ik_2A = ik_2C - ik_2D \\ k_1A = ik_2C - ik_2D & (1) & k_1A = ik_2C - ik_2D \quad + \end{array}$$

$$(ik_2 - k_1)A = 2ik_2D$$

$$D = \frac{(k_2 - k_1)}{2ik_2} A \text{.......... ....5)}$$

Subsitusi 5) ke 1)

C = A – D

$$C = \frac{(ik_2 - k_1)}{2ik_2} A$$

$$C = \frac{2ik_2 - ik_2 + k_1}{2ik_2} A$$

$$C = \frac{ik_2 + k_1}{2ik_2} A \text{.....................6)}$$

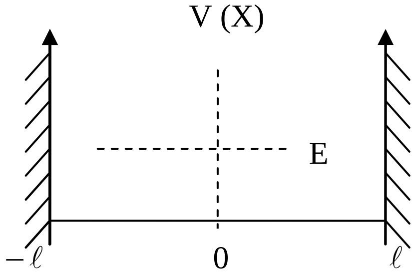
Subsitusikan 5) dan 6) ke 3)

$$\left\{ \frac{(k_2 + k_1)}{2ik_2} e^{ik_2 l} + \frac{(k_2 - k_1)}{2ik_2} e^{-ik_2 l} \right\} A = Ge^{-k_1 l}$$

$$G = \left\{ \frac{(k_2 + k_1) e^{ik_2 l} + (k_2 - k_1) e^{-ik_2 l}}{2ik_2 e^{-ik_2 l}} \right\} A$$

$$\Psi (x) = \begin{cases} Ae^{k_1 x} ;\ x \le 0 \\ \dfrac{(k_2 + k_1)}{2ik_2} Ae^{ik_2 l} + \dfrac{(k_2 - k_1)}{2ik_2} Ae^{-ik_2 l} ; 0 \le x \le l \\ \dfrac{(k_2 + k_1) e^{ik_2 l} + (k_2 - k_1) e^{-ik_2 l}}{2ik_2 e^{-ik_2 l}} Ae^{-k_1 x} ; x \ge l \end{cases}$$

f. Molekul Gas yang Terperangkap di Dalam Kotak



Gambar 5.7 Grafik energi partikel dalam kotak

Karena besar dinding potensialnya tak hingga, maka partikel tidak mempunyai peluang untuk loncat ke daerah x < -l dan x > l berarti, solusinya hanya terletak di daerah –l ≤ x ≤ l dengan V(x) = 0.

Persamaan Schrodingernya :

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + V\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) = \frac{-2mE}{\hbar^2}\Psi(x)$$

$$\Psi(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \quad \text{dengan } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

Atau Ψ(x) = A (cos kx + i sin kx) + B (cos kx – i sin kx)

= (A + B)cos kx + i (A - B) sin kx

= C cos kx + D sin kx

dengan C = A + B dan D = i (A- B)

Dilihat dari solusinya, ada dua kemungkinan yaitu :

1. Ψ(x) = C cos kx ; D=0

Fungsi gelombang yang dipilih harus memenuhi syarat batas:

Ψ(-l) = Ψ(l) = 0

Ψ(-l) = 0 dan Ψ(l) = 0

C cos k (-l) = 0 C cos kl = 0

C cos (-kl) =0

C cos kl = 0

Kedua syarat sudah terpenuhi, maka dicari harga kl yaitu :

C cos kl = 0

Cos kl = nπ/2   dengan n =1,3,5,7,…   (bilangan ganjil)

$$k = \frac{n\pi}{2l} maka \Psi(x) = C\cos\frac{n\pi}{2l}x$$

Harga C dapat dicari dengan menormalisasikan fungsi tersebut :

$$\int_{-l}^{l} \Psi^*(x) = 1$$

$$C^2 \int_{-l}^{l} \cos^2 \frac{n\pi}{2l} x dx = 1 \rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{l}}$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} \cos\frac{n\pi}{2l} x dengan : n = bilangan ganjil$$

$$energinya yaitu : \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi}{2l}x\right) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi}{2l}x\right)$$

$$\mathrm{E} = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{2l}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi}{2l}x = \mathrm{E}\frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{8ml^2}$$

$$\mathrm{E}_n = \frac{\hbar^2}{32ml^2} n^2$$

dengan n bilangan ganjil

2. ψ(x) = D sin kx   ; C=0

   Fungsi gelombang yang dipilih harus memenuhi syarat batas:

   Ψ(-l) = Ψ(l) = 0

   Ψ(-l) = 0 dan Ψ(l) = 0

   D sin – (kl) = 0 D sin (kl) = 0

   -D sin kl =0 D sin kl =0

   Sin kl = 0 sin kl = 0

   Kedua syarat sudah terpenuhi, maka dicari harga kl, yaitu :

   D sin kl = 0

   sin kl = 0

   kl = nπ

   k = nπ/l, dengan : n = 0,1,2,3,4,..

$$\Psi(x) = D\sin\frac{n\pi}{l}x$$

Konstanta D diperoleh dengan cara menormalisasikan fungsi tersebut :

$$D^2\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi}{2l}x\,dx = 1 \rightarrow D = \frac{1}{\sqrt{l}}$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$energinyayaitu: \frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x\right) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

$$\mathrm{E} = \frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = \frac{\hbar^2 n^2}{8ml^2}$$

$$dengan: n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$n \rightarrow n = \frac{n'}{2}(n' = bilangangenap)$$

$$\mathrm{E}_n = \frac{\hbar^2 n^2}{32ml^2}; n = bilangangenap$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n'\pi}{l}x; n' = bilangangenap$$

Persamaan keadaan dari molekul yang terperangkap dalam kotak ternyata mempunyai paritas ganjil dan genap, dengan energi

$$\mathrm{E}_n = \frac{\hbar^2 n^2}{32ml^2}$$

Untuk n =1

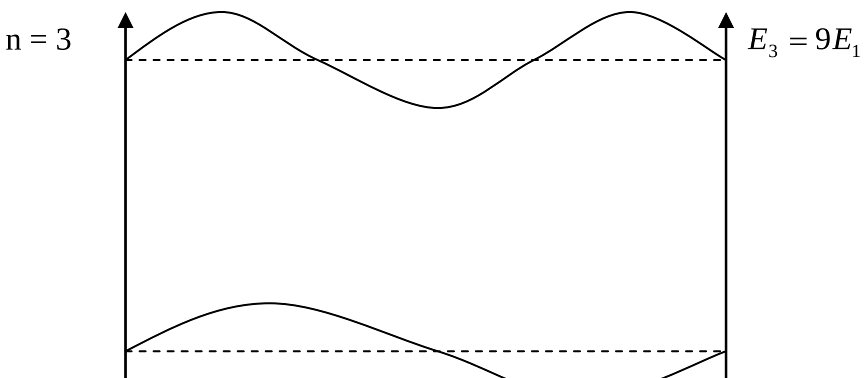
$$k = \frac{\pi}{2l} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2l} \Rightarrow 2l = \frac{1}{2}\lambda$$

$$n = 2$$

$$k = \frac{\pi}{l} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{l} \Rightarrow 2l = \lambda$$

$$n = 3$$

$$k = \frac{3\pi}{2l} \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{3\pi}{2l} \Rightarrow 2l = \frac{3}{2}\lambda$$



$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos \frac{3\pi}{2\ell} x$$

n = 2 $\qquad E_2 = \frac{4h^2}{32m\ell^2} = 4E_1$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \sin \frac{n\pi}{2\ell}$$

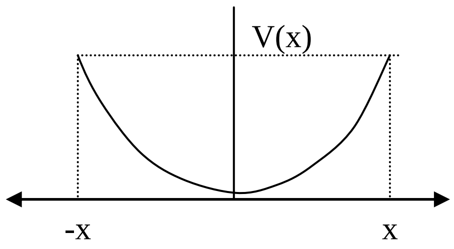
n = 1 $\qquad E_1 = \frac{h^2}{32m\ell^2}$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \cos \frac{n\pi}{2\ell} x$$

$-\ell$ $\qquad \ell$

Gambar 5.8 Energi partikel dalam kotak pada berbagai orde

g. Molekul Diatomik yang Bervibrasi Membentuk Osilator Harmonik Sederhana



Gambar 5.9 Grafik Energi Osilator Harmonik Sederhana Molekul Diatomik

Persamaan Schrodingernya ialah :

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \frac{1}{2}kx^2\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{mk}{\hbar^2}x^2\right)\Psi(x) = 0$$

misal : $\frac{2mE}{\hbar^2} = \lambda^2$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \left(\lambda^2 - \frac{mk}{\hbar^2}x^2\right)\Psi(x) = 0$$

misal : $\frac{mk}{\hbar^2} = \frac{1}{\chi_0^4} \rightarrow \chi_0 = \left(\frac{\hbar^2}{mk}\right)^{\frac{1}{4}}$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\Psi(x) + \left(\lambda^2 - \frac{x^2}{\chi_0^4}\right)\Psi(x) = 0 \text{..............1)}$$

misal : $\beta = \frac{x}{\chi_0}$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\beta}\frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{\chi_0}\frac{d}{d\beta} \rightarrow \frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\chi_0^2}\frac{d}{d\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\chi_0^2}\frac{d^2}{d\beta^2}\Psi(\beta) + \left(\lambda^2 - \frac{\beta^2}{\chi_0^4}\right)\Psi(\beta) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\beta^2}\Psi(\beta) + (\lambda^2\chi_0^2 - \beta_2)\Psi(\beta) = 0 \text{..............2)}$$

dengan : $\lambda^2\chi_0^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}\sqrt{\frac{\hbar^2}{mk}}$

Solusi dari persamaan 2) salah satunya yaitu dengan teknik *trial & error*. Kita pilih sembarang fungsi $\Psi(\beta)$ dimana fungsi yang dipilih harus memenuhi syarat fungsi berkelakuan baik, yaiutu:

$$\lim_{\beta \to \infty} \Psi(\beta) \rightarrow 0$$

Misal fungsi sembarang itu ialah :

$$\Psi(\beta) = \varphi(\beta)\, e^{-\frac{1}{2}\beta^2} \text{ .... .3)}$$

Diuji : $\lim_{\beta \to \infty} \Psi(\beta) \rightarrow 0$ (dipenuhi)

Substitusi persamaan 3) ke persamaan 2) :

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\beta^2}\Psi(\beta) + \left({}^2\chi_0^2 - \beta^2\right)\varphi(\beta)e^{-\frac{1}{2}\beta^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\beta}\left[e^{-\frac{1}{2}\beta^2}\frac{d\varphi(\beta)}{d\beta} - \beta e^{-\frac{1}{2}\beta^2}\varphi(\beta)\right] + \left({}^2\chi_0^2 - \beta^2\right)\varphi(\beta)e^{-\frac{1}{2}\beta^2} = 0$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{2}\beta^2}\frac{d\varphi(\beta)}{d\beta} - -\beta e^{-\frac{1}{2}\beta^2}\frac{d\varphi(\beta)}{d\beta} - -e^{-\frac{1}{2}\beta^2}\varphi(\beta) + \beta^2 e^{-\frac{1}{2}\beta^2}\varphi(\beta) - \beta e^{-\frac{1}{2}\beta^2}\frac{d\varphi(\beta)}{d\beta}$$

$$+ \left({}^2\chi_0^2 - \beta^2\right)\varphi(\beta)e^{-\frac{1}{2}\beta^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\varphi(\beta)}{d\beta^2} - 2\beta\frac{d\varphi(\beta)}{d\beta} + \left({}^2\chi_0^2 - 1\right)\varphi(\beta) = 0 \ldots\ldots 4)$$

Persamaan 4) ini dinamakan persamaan Hermite

Solusi dari persamaan Hermite dicari dengan cara deret

$\varphi(\beta)$ dijabarkan dalam bentuk deret sebagai berikut :

$$\varphi(\beta) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l b^l \ldots\ldots\ldots\ldots 5)$$

$$\varphi(\beta) = a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + a_3\beta^3 + \ldots$$

Substitusi persamaan 5) ke persamaan 4) :

$$\Rightarrow \frac{d^2}{d\beta^2}\left(a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \ldots\right) - 2\beta\frac{d}{d\beta}\left(a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \ldots\right)$$

$$+ \left({}^2\chi_0^2 - 1\right)\left(a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 + \ldots\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left(2a_2 + 6a_3\beta + 12a_4\beta^4 + \ldots\right) - 2\beta\left(a_1 + 2a_2\beta + 3a_3\beta^3 + \ldots\right)$$

$$+ \left({}^2\chi_0^2 - 1\right)\left(a_0 + a_1\beta + a_2\beta^2 = \ldots\right) = 0$$

$$\Rightarrow \left[2a_2 + \left({}^2\chi_0^2 - 1\right)a_0\right]\beta_0 + \left[6a_3 - 2a_1 + \left({}^2\chi_0^2 - 1\right)a_1\right]\beta$$

$$+ \left[12a_4 - 4a_2 + \left({}^2\chi_0^2 - 1\right)a_2\right]\beta^2 + \left[20a_5 - 6a_3 + \left({}^2\chi_0^2 - 1\right)a_3\right]\beta^3 + \ldots = 0$$

Atau secara umum dapat diungkapkan sebagai berikut :

$$(l+1)(l+2)a_{l+2} - 2la_l + (\lambda^2\chi_0^2 - 1)a_l \, \beta^l = 0$$

$$dengan : l = 0,1,2,3,\ldots$$

$$karena \beta \neq 0, maka :$$

$$(l+1)(l+2)a_{l+2} - 2la_l + (\lambda^2\chi_0^2 - 1)a_l = 0$$

$$atau : \frac{a_{l+2}}{a_l} = \frac{2l - (\lambda^2\chi_0^2 - 1)}{(l+1)(l+2)} = \frac{2l + 1 - (\lambda\chi_0)^2}{(l+1)(l+2)}$$

Untuk l besar atau l mendekati ∞ : $\frac{a_{l+2}}{a_l} \approx \frac{2}{l}$

Berarti ada dua solusi, yaitu :

$$1. \varphi(\beta) = a_0 + a_2\beta^2 + a_4\beta^4 + \ldots (genap)$$

$$2. \varphi(\beta) = a_1 + a_3\beta^3 + a_5\beta^5 + \ldots (ganjil)$$

Perbandingan antar dua sukunya yaitu $\frac{2}{l}\beta^2$

Jadi, deret tersebut mempunyai kelakuan asimptotik untuk seluruh rentang l sebanding dengan : $e^{2\beta^2} atau \varphi(\beta) \approx e^{2\beta^2}$ ……6)

Substitusi persamaan 6) ke persamaan 5):

$$\Psi(\beta) = \varphi(\beta) e^{-\frac{1}{2}\beta^2} = e^{\frac{3}{2}\beta^2}$$

Bila diuji dengan : $\lim_{\beta \to \infty} \Psi(\beta) \neq 0$ (berarti ada kesalahan)

Untuk mengatasi hal tersebut, maka dilakukan cara dengan mengubah deret menjadi bentuk polinom yaitu dengan melakukan pemotongan suku deret. Misal rentang harga l tidak sampai ∞ tapi sampai l tertentu, misal sampai l max

Itu diperoleh bila $\frac{a_{l+2}}{a_l} = 0$

$$\Rightarrow \frac{2l + 1 - (\lambda\chi_0)^2}{(l+1)(l+2)} = 0$$

$$atau : 2l + 1 - (\lambda\chi_0)^2 = 0$$

$$maka : 2l + 1 = (\lambda\chi_0)^2$$

Karena l = 0,1,2,3,… kita ganti saja dengan $(2n+1) = (\lambda\chi_0)^2$ …..7)

Substitusi persamaan 7) ke 4) dengan mengganti Ψ (β) dengan polinomial Hermite H_n (β) :

$$\frac{d^2}{d\beta^2}H_n(\beta) - 2\beta\frac{d}{d\beta}H_n(\beta) + 2nH_n(\beta) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8)$$

Lihat persamaan 3) :

$$\Psi(\beta) = \varphi(\beta)e^{-\frac{1}{2}\beta^2} \; menjadi: \Psi(\beta) = H_n(\beta)e^{-\frac{1}{2}\beta^2}$$

Dengan : $H_n(\beta) = e^{\beta^2}(-1)^n \frac{d^n}{d\beta^n}e^{-\beta^2}$

$$H_0(\beta) = e^{\beta^2}$$
$$H_1(\beta) = 2\beta \qquad \text{dgn : } \beta = \frac{x}{\chi_0} \quad \text{dan} \quad \chi_0 = \left(\frac{\hbar^2}{mk}\right)^{\frac{1}{4}}$$
$$H_2(\beta) = 4\beta^2 - 2$$

Solusinya yaitu :

$\Psi(\beta) = A_n H_n(\beta)e^{-\frac{1}{2}\beta^2}$ dengan A_n = konstanta

A_n dapat dicari sebagai berikut :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(\beta)\Psi(\beta)d\beta = 1 \rightarrow A_n^2 = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{2}}n!2^n}$$

$$A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi^{\frac{1}{2}}n!2^n}}$$

$$\Rightarrow A_n^2 = \begin{cases} 0; m \neq n \\ \pi^{\frac{1}{2}}n!2^n; m = n \end{cases}$$

$$A_0 = \pi^{-\frac{1}{4}}$$

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi^{\frac{1}{2}}.2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi^{-\frac{1}{4}}$$

$$\Psi_0(\beta) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{1}{2}\beta^2}$$

$$\Psi_1(\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi^{-\frac{1}{2}} 2\beta e^{-\frac{1}{2}\beta^2}$$

D. Rapat Probabilitas

1. Proton di dalam berkas siklotron

Kasus 1

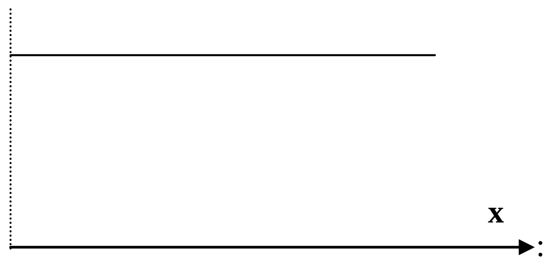
$$\rho(x) = \Psi^*(x)\Psi(x)$$

$$\rho(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}\right)^* \left(\frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx}\right) = \frac{1}{L}$$

Kasus 2

$$\rho(x) = \Psi^*(x)\Psi(x)$$

$$\rho(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{L}} e^{-ikx}\right)^* \left(\frac{1}{\sqrt{L}} e^{-ikx}\right) = \frac{1}{L}$$



Gambar 5.10 Sketsa grafik rapat probabilitas sebagai fungsi posisi

2. Elektron-Elektron Konduksi yang Berada di Permukaan Logam

$$\rho_1(x) = \Psi_1^*(x)\Psi_1(x)$$

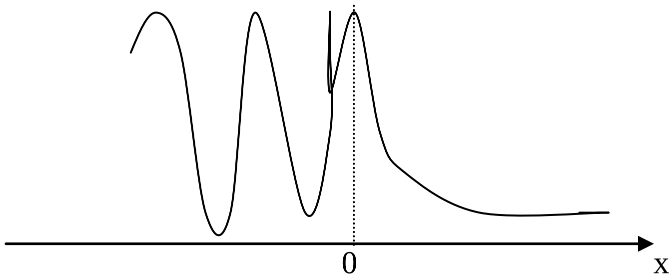
$$\rho_1(x) = \left(Ae^{ik_1x} + \frac{ik_1 + k_2}{ik_1 - k_2} Ae^{-ik_1x}\right)^* \left(Ae^{ik_1x} + \frac{ik_1 + k_2}{ik_1 - k_2} Ae^{-ik_1x}\right)$$

$$= 2A^*A + \left(\frac{-ik_1 + k_2}{-ik_1 - k_2}\right) A^*Ae^{2ik_1x} + \left(\frac{ik_1 + k_2}{ik_1 - k_2}\right) A^*Ae^{-2ik_1x}$$

$$\rho_2(x) = \Psi_2^*(x)\Psi_2(x)$$

$$\rho_2(x) = \left(\frac{2ik_1}{ik_1 - k_2} A e^{-k_2 x}\right)^* \left(\frac{2ik_1}{ik_1 - k_2} A e^{-k_2 x}\right) = \frac{4k_1^2}{k_1^2 + k_2^2} A^* A e^{-2k_2 x}$$

:



Gambar 5.11 Sketsa grafik hubungan rapat probabilitas neutron konduksi terhadap posisinya

3. Neutron yang Mencoba Melepaskan Diri dari Inti

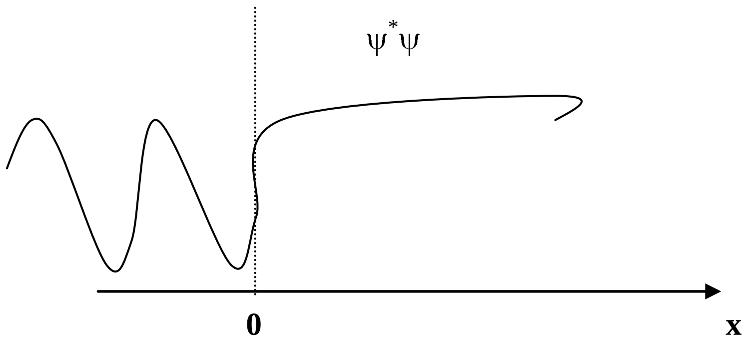
$$\rho_1(x) = \Psi_1^*(x)\Psi_1(x)$$

$$\rho_1(x) = \left(A e^{ik_1 x} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A e^{-ik_1 x}\right)^* \left(A e^{ik_1 x} + \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} A e^{-ik_1 x}\right)$$

$$= A^* A + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right) A^* A e^{-2ik_1 x} + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right) A^* A e^{2ik_1 x} + \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2 A^* A$$

$$\rho_2(x) = \Psi_2^*(x)\Psi_2(x)$$

$$\rho_2(x) = \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} A e^{ik_2 x}\right)^* \left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2} A e^{ik_2 x}\right) = \frac{4k_1^2}{(k_1 + k_2)^2} A^* A$$



Gambar 5.12 Sketsa grafik hubungan rapat probabilitas neutron yang melepaskan diri dari inti terhadap posisinya

4. Partikel α yang Mencoba Melepaskan Diri dari Potensial Coulomb

$$\rho_1(x) = A^*A + A^*Ae^{-2ik_1x}\left[\frac{(k_1+k_2)\{2ik_1 + (k_2 - ik_1)e^{2k_2a} - (k_1+k_2)\}}{(k_1+k_2)^2 (k_1-k_2)(k_2+ik_1)e^{2k_2a}}\right]$$

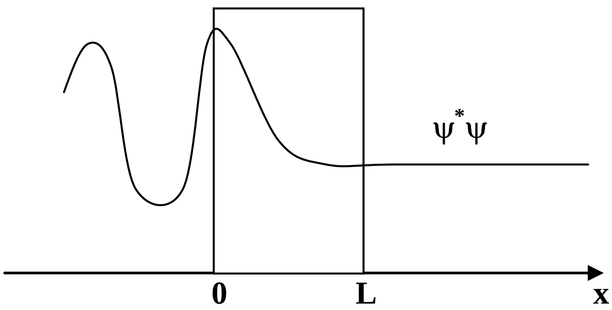
$$+ A^*Ae^{2ik_1x}\left[\frac{(-ik_1+k_2)\{2ik_1 + (k_2+ik_1)e^{2k_2a} - (-ik_1+k_2)\}}{(-ik_1+k_2)^2 + (-ik_1-k_2)(k_2+ik_1)e^{2k_2a}}\right]$$

$$+ A^*A\left[\frac{(k_1+k_2)\{2ik_1 + (k_2-ik_1)e^{2k_2a} - (-ik_1+k_2)\}}{(k_1+k_2)^2 + (k_1-k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}}\right]^2$$

$$\rho_2(x) = 4k_1^2A^*A\left\{\frac{1}{\left[(-ik_1+k_2)^2 + (-ik_1-k_2)(k_1+k_2)e^{2k_2a}\right]\left[(k_1+k_2)^2 (k_1-k_2)(k_2-ik_1)e^{2k_2a}\right]}\right\}$$

$$e^{2k_2x}(-ik_1+k_2)(k_1+k_2) + e^{2k_2a}(-ik_1+k_2)^2 + e^{2k_2a}(k_1+k_2)^2 + e^{-2k_2x+4k_2a}(-ik_1+k_2)(k_1+k_2)$$

$$\rho_3(x) = 4k_1^2A^*A\left\{\frac{\left[(-ik_1+k_2)(k_1+k_2)\right]^2e^{2ik_1a}}{(-ik_1+k_2)^2 + (-ik_1-k_2)(k_1+k_2)e^{2k_2a}}\right\}$$



Gambar 5.13 Sketsa grafik probabilitas partikel α

5. Elektron yang dihamburkan oleh ion yang terionisasi negatif

$$\rho_1(x) = A^*A + A^*Ae^{-2k_1x}\left\{\frac{2k_1(k_2-k_1)+2k_1e^{2ik_2a}(k_1+k_2)-(k_1+k_2)\left[(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_2a}\right]}{(k_1+k_2)\left[(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{21k_2a}\right]}\right\}$$

$$+A^*Ae^{2ik_1x}\left\{\frac{2k_1(k_2-k_1)+2k_1e^{-2ik_2a}(k_1+k_2)-(k_1+k_2)\left[(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_2a}\right]}{(k_1+k_2)\left[(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{-2ik_2a}\right]}\right\}$$

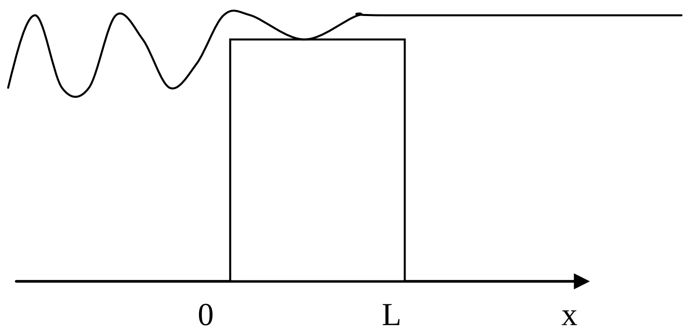
$$+A^*Ae\left\{\frac{1}{(k_1+k_2)^2\left[(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{-2ik_2a}\right]\left[(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_2a}\right]}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[2k_1(k_2-k_1)+2k_1e^{-2ik_2a}(k_1+k_2)-(k_1+k_2)\left((k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{-2ik_2a}\right)\right]\\ \left[2k_1(k_2-k_1)+2k_1e^{2ik_2a}(k_1+k_2)-(k_1+k_2)\left((k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_2a}\right)\right]\end{array}\right\}$$

$$\rho_2(x) = \frac{4k_1^2A^*A}{\left[(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{-2ik_2a}\right]\left[(k_2-k_1)+(k_1-k_2)e^{2ik_2a}\right]}$$

$$\left\{\frac{(k_1-k_2)^2}{(k_1+k_2)^2}+\frac{(k_2-k_1)e^{-2ik_2a}+(k_2-k_1)e^{-2ik_2a+2ik_2x}}{(k_1+k_2)}+1\right\}$$

$$\rho_3(x) = 4k_1^2A^*Ae^{-2k_2a}\left\{\frac{\left[(-ik_1+k_2)(k_2-ik_1)\right](k_1+k_2)^2}{\left[(-ik_1+k_2)^2+(-ik_1-k_2)(k_1+k_2)\right]\left[(k_1+k_2)^2+(k_1-k_2)(-ik_1+k_2)\right]}\right\}$$



Gambar 5.14 Sketsa grafik probabilitas elektron yang dihamburkan ion

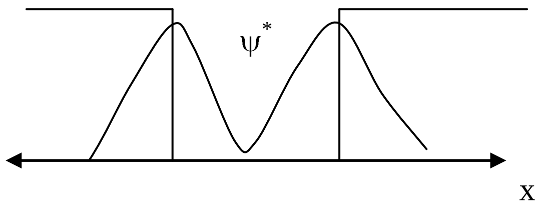
6. Neutron yang terikat dalam inti

$$\rho_1(x) = (Ae^{k_1 x})^* (Ae^{k_1 x}) = A^* A e^{2k_1 x}$$

$$\rho_2(x) = \frac{A^* A}{4k_2^2}\left[(k_1^2 + k_2^2) + (k_1 + k_2)^2 e^{-2ik_2 x} + (k_1 - k_2)^2 e^{2ik_2 x} + (-ik_1 + k_2)^2\right]$$

$$\rho_3(x) = \frac{A^* A}{4_2^2}\left[(k_1^2 + k_2^2) + (k_1 + k_2)^2 e^{-2ik_2 l} + (k_1 - k_2)^2 e^{2ik_2 l} + (-ik_1 + k_2)^2\right]$$

Grafiknya :



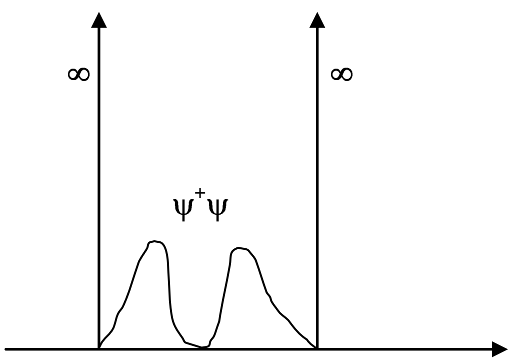
Gambar 5.15 Sketsa grafik probabilitas neutron dalam inti

7. Molekul gas yang terperangkap dalam kotak

$$\rho(x) = \frac{1}{L}\cos^2 \frac{n\pi}{2l} x; n = bil.ganjil$$

atau :

$$\rho(x) = \frac{1}{L}\sin^2 \frac{n\pi}{2l} x; n = bil.genap$$

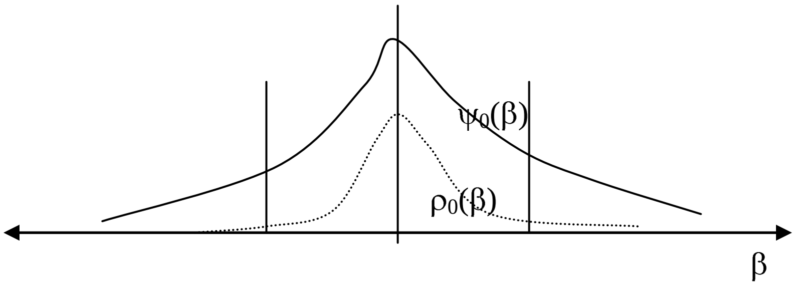


Gambar 5.16 Sketsa grafik probabilitas partikel dalam kotak

8. Molekul diatomik yang bervibrasi membentuk osilator sederhana

$$\rho_0(\beta) = \pi^{-\frac{1}{2}} e^{-\beta^2}$$

$$\rho_1(\beta) = 2\pi^{-\frac{1}{2}} \beta^2 e^{-\beta^2}$$



Gambar 5.17. Sketsa grafik probabilitas osilator harmonik sederhana Molekul diatomik