6 PENERAPAN PERSAMAAN SCHRODINGER PADA PERMASALAHAN PARTIKEL BEBAS DALAM RUANG TIGA DIMENSI

A. Partikel Bebas Dalam Koordinat Cartesius

:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x,y,z) = E\Psi(x,y,z) \tag{6.1}$$

$$\Psi(x,y,z) = x(x)y(y)z(z) \tag{6.2}$$

Substitusikan persamaan (6.2) ke dalam persamaan (6.1), diperoleh:

$$y(y)z(z)\frac{d^2x(x)}{d_{x^2}} + x(x)z(z)\frac{d^2y(y)}{d_{y^2}} + x(x)y(y)\frac{d^2z(z)}{d_{z^2}} = -k\ x(x)y(y)z(z) \tag{6.3}$$

dengan:

$$K^2 = \frac{2mE}{h^2} \tag{6.4}$$

Selanjutnya kedua ruas pers.(6.3) masing-masing kita bagi dengan $x(x)y(y)z(z)$, maka diperoleh persamaan

$$\frac{1}{x(x)}\frac{d^2x(x)}{d_{x^2}} + \frac{1}{y(y)}\frac{d^2y(y)}{d_{y^2}} + \frac{1}{z(z)}\frac{d^2z(z)}{d_{z^2}} = --k^2 \tag{6.5}$$

$$k^2 = k_{x^2} + k_{y^2} + k_{z^2} \tag{6.6}$$

Maka persamaan (6.5) dapat diungkapkan sebagai berikut,

$$\frac{1}{x(x)}\ \frac{d^2x(x)}{d_{x^2}} = -k_{x^2} \tag{6.7}$$

$$\frac{1}{y(y)}\ \frac{d^2y(y)}{d_{y^2}} = -k_{y^2} \tag{6.8}$$

$$\frac{1}{x(z)}\ \frac{d^2z(z)}{d_{z^2}} = -k_{z^2} \tag{6.9}$$

$$\frac{d^2 x(x)}{d_{x^2}} = k_{x^2}\, x(x) \tag{6.10}$$

Solusinya adalah

$$x(x) = Ae^{ik_x x} \tag{6.11}$$

Persamaan (6.8) diubah menjadi,

$$\frac{d^2 Y(Y)}{d_{Y^2}} = k_{Y^2}\, Y(Y), \tag{6.12}$$

solusinya adalah

$$y(y) = Be^{ik_y y}, \tag{6.13}$$

dan persamaan (6.9) diubah menjadi

$$\frac{d^2 z(z)}{d_{z^2}} = k_{z^2}\, z(z) \tag{6.14}$$

Solusinya adalah

$$Z(z) = Ce^{ik_z z} \tag{6.15}$$

Pada persamaan (6.11), (6.13) dan persamaan (6.15) huruf A, B, C menyatakan konstanta integrasi. Substitusikan persamaan (6.11), (6.13) dan persamaan (6.15) ke dalam persamaan (6.2) maka diperoleh:

$$\Phi(x, y, z) = ABC.e^{ik(k_x x + k_y y + k_z z)} \tag{6.16}$$

atau
$$\underline{\Phi(r) = D.e^{ik\hat{r}}} \tag{6.17}$$

$$E = \frac{h^2 k^2}{2m}, \tag{6.17}$$

B. Gelombang datar

:

$$\left(\frac{-h^2}{2m}\nabla^2 + V(r)\right)\Psi = ih\frac{\partial \Psi}{\partial t} \tag{6.18}$$

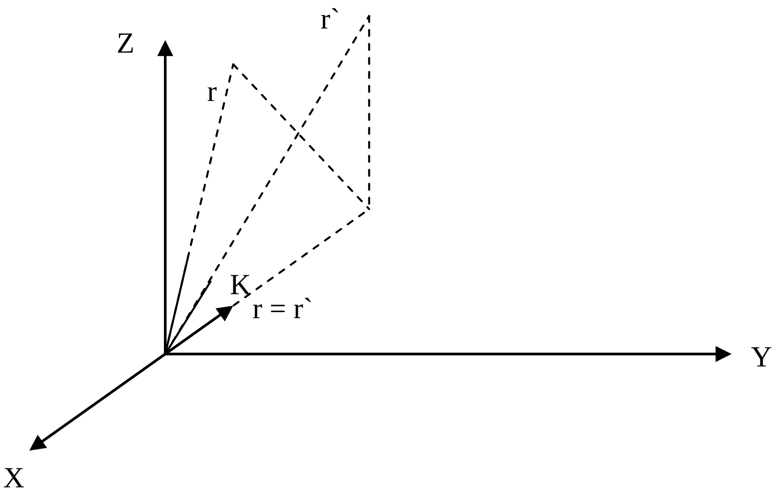
Solusi persamaan tersebut adalah

$$\Psi_i\ (r.t) = A.e^{i(k.\hat{r} - \Phi t)} \tag{6.19}$$

yang merupakan persamaan gelombang bidang. Pada tiap saat $\Psi_i(r.t)$ adalah konstan pada permukaan $\hat{k}.\hat{r}$ = konstan. Permukaan tersebut normal terhadap k. Sekarang kita tinjau permukaan seperti itu. Proyeksi $\hat{r}$ pada $\hat{k}$:

$$r = \frac{\hat{k}.\hat{r}}{k}. \tag{6.20}$$

Setiap titik pada permukaan ini adalah konstan. Yang seperti ini adalah perpindahan normal antara pusat koordinat dan permukaan. Untuk lebih jelasnya lihat gambar berikut :



Gambar 6.1 Skema Gelombang Bidang

Gambar 6.1 Gelombang datar pada setiap saat sesuai pers.(6.19) adalah konstan pada permukaan $\hat{k}.\hat{r}$ = konstan, dan permukaan tersebut normal terhadap k. Fungsi delta dirac untuk tiga dimensi didefinisikan sebagai perkalian.

$$\delta(r - r') = \delta(y - y') \tag{6.21}$$

Referensi fungsi delta tersebut adalah

$$\delta(r - r`) = \delta(x - x`)\delta(y - y`)\delta(z - z`) \tag{6.22}$$

dengan

$$\delta \text{ k} = \text{dk}_x \text{ dk}_y \text{ dk}_z \tag{6.23}$$

Konstanta A pada persamaan (6.19) dapat ditentukan dengan cara menormalisasikan sebagai berikut :

$$(\psi k, \psi k) = A^2 \int e^{-ik`r} e^{ikr} d^3 r = 1$$

$$1 = A^2 \int e^{ir(k-k`)} d^3 r$$

$$1 = A^2 \frac{(2\pi)^3}{(2\pi)^3} \int e^{ir(k-k`)} d^3r$$

$$1 = A^2 (2\pi)^3 \delta(k - k`) \text{ untuk k = k`}$$

$$A = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \qquad (6.24)$$

Jadi, dengan demikian fungsi gelombang ternormalisasinya adalah

$$\Psi_1(r) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\hat{k}.\hat{r}} \qquad (6.25)$$

C. Partikel Bebas dalam Sistim Koordinat Bola

Momentum angular didefinisikan sebagai berikut.

$$\hat{L} = \bar{r}\ x\ \bar{p} \qquad (6.26)$$

Momentum angular totalnya adalah

$$\hat{L} = (\bar{r}\ x\ \bar{p})^2 = r^2\ p^2 - (\bar{r}.\bar{p})^2 \qquad (6.27)$$

dengan p adalah momentum linier.

Anda sudah mempelajari bahwa Hamiltonian partikel bebas diungkapkan dengan persamaan:

$$H = \frac{p^2}{2m} \qquad (6.28)$$

Dengan menggunakan harga p^2 dari persamaan (6.27) maka,

$$H = \frac{\bar{r}.\bar{p}}{2mr^2} + \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{\gamma^2 r}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} \qquad (6.29)$$

dengan $\gamma(\ r\ ) = \frac{1}{r}(\ddot{r}.\ddot{p})$ adalah komponen radial dari momentum partikel. Tapi sebelum kita pakai dalam mekanika kuantum, harus diyakinkan dulu bahwa operator tersebut bersifat Hermitian. Dalam persamaan (6.29) terdapat dua operator yaitu $\hat{\gamma}\ r^2$ dan $r^{-2}\ \hat{L}^2$. Sekarang kita akan selidiki terlebih dahulu bagaimana hermisivitas kedua operator tersebut. Suatu operator dikatakan Hermitian bila adjointnya sama dengan operator itu sendiri. Adjoint dari Operator $r^{-2}\ \hat{L}^2$ dituliskan sebagai berikut,

$$(r^{-2}\hat{L}^2)^+ = (\hat{L}^2)^+\ (r-2)^+ = \hat{L}^2 r^{-2} = r^{-2}\ \hat{L}^2 \qquad (6.30)$$

Jadi dengan demikian operator $r^{-2}\ \hat{L}^2$ adalah Hemitian.

Catatan : Kita bisa menuliskan $\hat{L}^2 r^{-2} = r^{-2}\hat{L}^2$ karena $\hat{L}^2$ komut dengan r^{-2}

Selanjutnya kita lihat hermisivitas operator $\hat{\gamma}$, berikut,

$$\hat{\gamma}_r = r^{-1}(\bar{r}.\bar{p}) = r^{-1}(\hat{x}.\hat{p}_x + \hat{y}.\hat{p}_y + \hat{z}.\hat{p}_z)$$

$$\begin{aligned}
(\hat{\gamma} r)^+ &= \{r^{-1}(\hat{x}\,\hat{p}_x + \hat{y}\,\hat{p}_y + \hat{z}\,\hat{p}_z)\}^+ \\
&= (\hat{x}.\hat{p}_x)^+(r^{-1})^+ + (\hat{y}.\hat{p}_y)^+(r^{-1})^+ + (\hat{z}.\hat{p}_z)^+(r^{-1})^+ \\
&= \hat{p}_{x^+}\hat{x}^+(r^{-1})^+ + \hat{p}_{y^+}\hat{y}^+(r^{-1})^+ + \hat{p}_{z^+}\hat{z}^+(r^{-1})^+ \\
&= \hat{p}_{x^+}\,\hat{x}r^{-1} + \hat{p}_{y^+}\hat{y}^+ r^{-1} + \hat{p}_{z^+}\hat{z}(r^{-1})
\end{aligned}$$

Karena p dan X tak komut maka urutan penulisannya tak boleh dibalik atau $\hat{p}_X \hat{X} \neq \hat{X}\hat{p}_X$ dan juga yang lainnya. Kita lihat bahwa $\hat{\gamma} r^+ \neq \hat{\gamma} r$. Hal ini berarti operator $\hat{\gamma} r$ tidak hermitian dan membawa konsekuensi bahwa operator $\hat{H}$ seperti diungkapkan oleh persamaan (6.29) tidak Hermitian.

Bagaimana caranya supaya Hamiltonian dengan memasukkan suku momentum angular bersifat Hermitian?. Kita coba sekarang mengubah mementum radial ke dalam bentuk simetris demgam cara menulisnya sebagai berikut :

$$\hat{p} r = \frac{1}{2}(\hat{\gamma} r + \hat{\gamma} r^+ \qquad (6.31)$$

Atau:

$$\hat{p} r = \frac{1}{2}(\frac{1}{r}\bar{r}.\bar{p} + \bar{p}.\bar{r}\frac{1}{r}) \qquad (6.32)$$

Suku pertama pada persamaan (6.32) menyatakan komponen p dalam arah r dan diungkapkan sebagai berikut

$$\frac{1}{r}\bar{r}.\bar{p} = -i\hbar\frac{1}{r}r.\nabla = -i\hbar\frac{\partial}{\partial r} \qquad (6.33)$$

Sedangkan suku kedua pada persamaan (6.32) adalah

$$\hat{p}.\hat{r}\frac{1}{r} = -i\hbar\nabla.e_r \qquad (6.34)$$

dengan e_r adalah vektor satuan radius $e_r = \frac{\bar{r}}{r}$

Substisusi persamaan (6.34) dan persamaan (6.33) ke dalam persamaan (6.32) maka

$$\hat{p}.\hat{r} = -\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \nabla.e_r\right) \tag{6.35}$$

Misalkan f(r) adalah fungsi yang diferensiabel dari vektor radius $\bar{r}$. tinjauan operasi :

$$\hat{p}_r\ f(r) = -\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \nabla.\hat{e}_r\right)f(r)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial r} + \hat{e}_r.\nabla f(r) + f(r)\nabla.e_r\right)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{2f(r)}{r}\right)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2}\left(\frac{2\partial f(r)}{\partial r} + \frac{f(r)}{r}\right)$$

$$= -\frac{i\hbar}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}rf(r)$$

$$\hat{p}_r = -\frac{i\hbar}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r \tag{6.36}$$

Dengan menggunakan ungkapan $\hat{p}_r$ di atas, maka persamaan Hamiltonian dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_r^2}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} \tag{6.37}$$

Tetapi sebelumnya telah Anda ketahui bahwa penjabaran Hamiltonian yang benar untuk partikel bebas adalah seperti diungkapkan dalam persamaan (6.28) yaitu:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}2^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

Bagaimana kita bisa meyakinkan bahwa penjabaran Hamiltonian seperti diungkapkan persamaan (6.37) adalah benar. Untuk menjawab masalah tersebut mari kita pelajari bagaimana penjabaran operator Laplace ∇^2 dalam koordinat bola. Pada modul matematika fisika atau dalam buku-buku analisa vektor dibahas tentang bagaimana mentransformasi sistem koordinat. Operator Laplace dalam sistem koordinat bola diungkapkan dengan.

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \qquad (6.38)$$

Sekarang kita tinjau kembali persamaan (3.36):

$$\hat{p}_r^{\,2} = (-i\hbar)^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\right)^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r\right)$$

$$\hat{p}_r^{\,2} = -\hbar^2\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r \qquad (6.39)$$

Sedangkan operator $\hat{L}^2$ dalam koordinat bola sudah kita bahas sebelumnya dan diungkapkan dalam:

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \qquad (6.40)$$

Substisusi persamaan (6.39) dan persamaan (6.40) kedalam persamaan (6.37)

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_r^{\,2}}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r - \frac{\hbar^2}{2mr^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right)$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right\}\right)$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

Ternyata hasilnya tepat sama seperti ungkapan Hamiltonian pada persamaan (6.28) jadi dengan demikian.

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = \frac{\hat{p}_r^{\,2}}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2}$$

Hal tersebut adalah ungkapan Hamiltonian dalam term momentum anguler.

Untuk memperjelas penjelasan tersebut, kerjakan soal-soal berikut sebagai latihan!.

1. Tunjukkanlah bahwa operator $\hat{r}$ dan $\hat{p}\,r$ tak komut!.

2. Tunjukkanlah bahwa operator energi kinetik $\bar{k} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ adalah Hermitian !

3. Tentukanlah fungsi eigen dari operator $\hat{p}\,r$ dengan nilai eigen yang berkaitan $\hbar k$.

4. Buktikanlah bahwa $\left[\hat{L}^2 .r^{-2}\right] = 0$

5. Bagaimanakah Hamiltonian dari N partikel bebas tak berinteraksi bermassa m.

Partikel bebas ialah suatu partikel yang bergerak dalam ruang yang medan potensinya nol (zero potentials). Hamiltonian untuk sebuah partikel bebas bermassa m di ungkapkan dengan H = $\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$ karena medan potensialnya V® = 0, dalam sistem koordinat Cartesian fungsi eigen (fungsi gelombang) dari partikel itu ialah $\varphi k(r) = A\ e^{i\bar{k}.7}$ dengan energi eigen $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

Hamiltonian partikel bebas dalam sistem koordinat bola dapat dibentuk dengan cara lain yaitu dengan memasukkan suku momentum angular L. meskipun demikian tetap harus dipenuhi bahwa operator Hamiltonian yang dibentuk harus bersifat Hermitian. Dengan mengubah komponen mementum dalam arah radial menjadi bentuk yang simetris ternyata syarat tersebut dapat dipenuhi. Hamiltonian partikel bebas dalam jabaran momentum radial dan momentum angular ialah

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}\hbar^2}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} \tag{6.41}$$

Bila Hamiltonian tersebut ditransformasikan kedalam sistem koordinat bola akan diperoleh bentuk persamaan yang sama dengan yang dihasilkan oleh Hamiltonian bentuk pertama. Dengan demikian Hamiltonian partikel bebas dapat diungkapkan dalam kedua bentuk tersebut yaitu

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 = \frac{\hat{p}\,r^2}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2\,mr_2} \tag{6.42}$$

Soal Latihan:

Untuk menguji pemahaman anda terhadap materi yang telah disajikan, kerjakan latihan soal soal berikut!.

1) Suatu partikel bermassa m bergerak dalam ruang yang didalamnya terdapat sumur potensial.

$$V(r) \begin{Bmatrix} 0 & r < a \\ \alpha & r \geq a \end{Bmatrix}$$

   a. Pada daerah manakah partikel tersebut akan berperilaku sebagai partikel bebas dan bagaimanakah bentuk persamaan Schrodinger tak bergantung waktunya dalam sistem koordinat bola.

   b. Pada daerah manakah partikel tidak lagi berperilaku sebagai partikel bebas dan bagaimanakah bentuk persamaan Schrodinger tak bergantung waktunya dalam sistem koordinat Cartesian.

2) Berapa banyakkah keadaan eigen (fungsi gelombang) independen dari partikel bebas yang bergerak dalam ruang dengan energi $E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ dalam

   a. Representasi koordinat cartesian

   b. Representasi koordinat Speris (bola)

3) Pada t=0 partikel bebas berada dalam keadaan superposisi

$$\psi(r.o) = \frac{\pi.\frac{3}{2}}{2} \sin\, 3x\; e^{i}(5y+2)$$

   Jika energi partikel diukur pada t = 0, berapa harga energi partikel tersebut ?

D. Fungsi Gelombang Radial

1. Fungsi gelombang radial partikel bebas

Persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu untuk partikel bebas dalam koordinat bola diungkapkan sebagai berikut :

$$\frac{1}{2m}\left(\hat{p}_r^2 + \frac{\hat{L}^2}{r^2}\right)\varphi_{k\ell m} = E_{k\ell m}\ \varphi_{k\ell m} \tag{6.43}$$

sebelumnya anda sudah mempelajari bahwa $\frac{\hat{p}_r^2}{2m}$ adalah operator energi kinetik radial yaitu berupa fungsi yang hanya bergantung pada r. Dan $\hat{L}^2$ adalah operator momentum angular yaitu berupa fungsi yang bergantung pada variabel sudut (θ,ϕ). Solusi persamaan (6.43) dapat kita tentukan dengan melakukan sevarasi variabel sebagai berikut :

$$\varphi_{k\ell m}(r,\theta,\phi) = R_{k\ell}(r)\, Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{6.44}$$

persamaan (6.43) diungkapkan dalam koordinat bola

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\varphi_{k\ell m} = E_{k\ell m}\ \varphi_{k\ell m} \quad (6.45)$$

kita substistusikan persamaan (3.44) ke dalampersamaan (3.45)

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\varphi_\ell^m(\theta,\varphi)\frac{1}{r}\frac{\partial^2 R_{k\ell}(r)}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}R_{k\ell}(r)\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_\ell^m(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}R_{k\ell}(r)\frac{1}{}\frac{\partial^2 Y_\ell^m(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right]s$$

$$= E_{k\ell m}R_{k\ell}(r)\,Y_\ell^m(\theta,\phi)$$

elanjutnya kedua ruas persamaan masing-masing kita bagi dengan:

$R_{k\ell}(r)\,Y_\ell^m(\theta,\phi)$, $maka$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{R_{k\ell}(r)}\frac{1}{r}\frac{\partial^2 R_{k\ell}(r)}{\partial r^2}r + \frac{1}{r^2}\frac{1}{Y_\ell^m(\theta,\phi)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y_\ell^m(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{Y_\ell^m(\theta,\phi)}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_\ell^m(\theta,\phi)}{\partial\phi^2}\right]$$

$$= E_{k\ell m}$$

(6.46)

Ruas kanan persamaan (6.46) berupa konstanta yaitu $E_{k\ell m}$ maka ruas kiri juga haruslah berupa konstanta. Untuk itu kita misalkan.

$$\frac{1}{Y_\ell^m(\theta,\phi)}\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\sin\theta\frac{dY_\ell^m(\theta,\phi)}{d\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{1}{Y_\ell^m(\theta,\phi)}\frac{d^2Y_\ell^m(\theta,\phi)}{d\phi^2}=-k \qquad (6.47)$$

maka persamaan (6.46) menjadi

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left(\frac{1}{r}\frac{1}{R_{k\ell}(r)}\frac{d^2R_{k\ell}(r)}{dr^2}r-\frac{k}{r^2}\right)=E_{k\ell m} \qquad (6.48)$$

Dalam modul fisika matematika atau buku matematika untuk fisika lainnya dinyatakan bahwa persamaan di atas ada solusinya bila dipilih k = $\ell(\ell+1)$, maka persamaan (6.48) menjadi

$$\frac{1}{r}\frac{d^2R_{k\ell}(r)}{dr^2}r-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}R_{k\ell}(r)=-\frac{2mE_{k\ell m}}{\hbar^2} \qquad (6.49)$$

dengan :

$$E=\frac{\hat{p}^2}{2m}=\frac{\hbar^2k^2}{2m} \qquad (6.50)$$

Kita misalkan

$$X=kr\ maka\ r=\frac{x}{k} \qquad (6.51)$$

$$dr^2=\frac{1}{k^2}dx^2 \qquad (6.52)$$

substitusikan harga-harga pers.(6.50),(6.51),(6.52) pada persamaan (6.49) maka:

$$\frac{d^2}{dx^2}R(x)+\frac{2}{x}\frac{dR(x)}{dx}1+\left[1-\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\right]R(x)=0\,. \qquad (6.53)$$

Persamaan (6.53) adalah persamaan nilai eigen untuk fungsi gelombang radial R(x) yaitu berupa persamaan differenial linier yang bergantung pada parameter integer 1. solusi kompleks dari persamaan differensial linier tersebut adalah berupa fungsi–fungsi hankel speris pertama adalah positif (+) dan jenis kedua negatif (-) yaitu

$$h_\ell^{(+)}(x)=C_\ell(x)\frac{e^{+ic}}{x} \qquad (6.53.a)$$

dan

$$h_\ell^{(-)}(x)=C_\ell(x)\frac{e^{-ix}}{x} \qquad (6.53.b)$$

dengan C_ℓ adalah koefisien kompleks berupa polinomial dari X^{-1} yang berbentuk

$$C_\ell^{(+)} = (-i)^{\ell}\sum_{n=0}^{\ell}\frac{\ell}{2^n n!}\frac{(\ell+n)!}{(\ell-n)!}(-ix)^{-n} \qquad (6.54.a)$$

dan

$$C_\ell^{(-)} = (i)^{\ell}\sum_{n=0}^{\ell}\frac{\ell}{2^n n!}\frac{(\ell+n)!}{(\ell-n)!}(ix)^{-n} \qquad (6.54.b)$$

Contoh : Tentukanlah beberapa fungsi Hankel pertama. Untuk harga $\ell = 0$ dan $\ell = 1$

Jawab :

Untuk harga $\ell = 0$

$$C_0^{(+)} = (-i)^0\frac{1}{2^0 0!}\frac{(0+0)!}{(0-0)!}(-ix)^{-0} = 1$$

maka $h_0^{(+)}(x) = \dfrac{e^{ix}}{x}$

$$C_0^{(-)} = (i)^0\frac{1}{2^0 0!}\frac{(0+0)!}{(0-0)!}(ix)^{-0} = 1$$

maka $h_0^{(-)}(x) = \dfrac{e^{-ix}}{x}$

Untuk harga $\ell = 1$

$$C_i^{(+)} = (-i)^1\sum_{n=0}^{1}\frac{1}{2^n n!}\frac{(1+n)!}{(1-n)!}(-ix)^{-n}$$

$$C_i^{(+)} = (-i)\left\{\frac{1}{2^0 0!}\frac{(1+0)!}{(1-0)!}(-ix)^{-0} + \frac{1}{2^1 1!}\frac{(1+1)!}{(1-1)!}(-ix)^{-1}\right\}$$

$$= (-i)\left\{1 - \frac{1}{ix}\right\} = \left(-i + \frac{1}{x}\right)$$

maka $h_1^{(+)}(x) = \left(-i + \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{e^{ix}}{x}$

Dengan cara sama dapat dihitung $C_1^{(-1)} = (i)^1\displaystyle\sum_{n=0}^{1}\frac{1}{2^n n!}\frac{(1+n)!}{(1-n)!}(ix)^{-n} = \left(i + \frac{1}{x}\right)$

maka $h_1^{(-1)}(x) = \left(i + \dfrac{1}{x}\right)\dfrac{e^{-ix}}{x}$

Set solusi yang equivalen dari persamaan differensial linier adalah fungsi-fungsi Bessel Speris yang secara sederhana dinyatakan sebagai kombinasi linier dari fungsi-fungsi Hankel speris yaitu

$$J_1(x) = \frac{1}{2i}\left[h_1^{(+)}(x) - h_1^{(-)}(x)\right] \tag{6.54.c}$$

Contoh : Tentukanlah fungsi Bessel Speris J_o (x) dan J_1 (x)

$$J_0(x) = \frac{1}{2i}\left[h_0^{(+)}(x) - h_0^{(-)}(x)\right] = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ix}}{x} - \frac{e^{-ix}}{x}\right) = \frac{\sin x}{x}$$

$$J_1(x) = \frac{1}{2i}\left[h_1^{(+)}(x) - h_1^{(-)}(x)\right] = \frac{1}{2i}\left[\left(-i + \frac{1}{x}\right)\frac{e^{ix}}{x} - \left(i + \frac{1}{x}\right)\frac{e^{-ix}}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x^2} - i\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{x}\right)\right] = \frac{\sin x}{x^2} - \frac{Cosx}{x}$$

Bentuk solusi persamaan differensial linier lainnya yang ekuivalen adalah fungsi –fungsi Newmann Speris yang diungkapkan sebagai berikut

$$N_\ell(x) = \frac{1}{2}\left[h_\ell^{(+)}(x) + h_\ell^{(-)}(x)\right] \tag{6.55}$$

Contoh : Tentukanlah fungsi-fungsi Neumann Speris untuk $\ell = 0\, dan\ \ell = 1$

$$N_0(x) = \frac{1}{2}\left[h_0^{(+)}(x) + h_0^{(-)}(x)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{ix}}{x} + \frac{e^{-ix}}{x}\right) = -\frac{\cos x}{x}$$

$$N_1(x) = \frac{1}{2}\left[h_1^{(+)}(x) + h_1^{(-)}(x)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(-i + \frac{1}{x}\right)\frac{e^{ix}}{x} + \left(i + \frac{1}{x}\right)\frac{e^{-ix}}{x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-i\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\right) + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{x^2}\right] = -\frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x}{x^2}$$

Dalam term Bessel Speris dan Newmann Speris . fungsi-fungsi Hankel Speris dapat diungkapkan sebagai berikut :

$$h_\ell^{(+)}(x) = N\ell(x) + i\, j\ell(x) \tag{6.56}$$

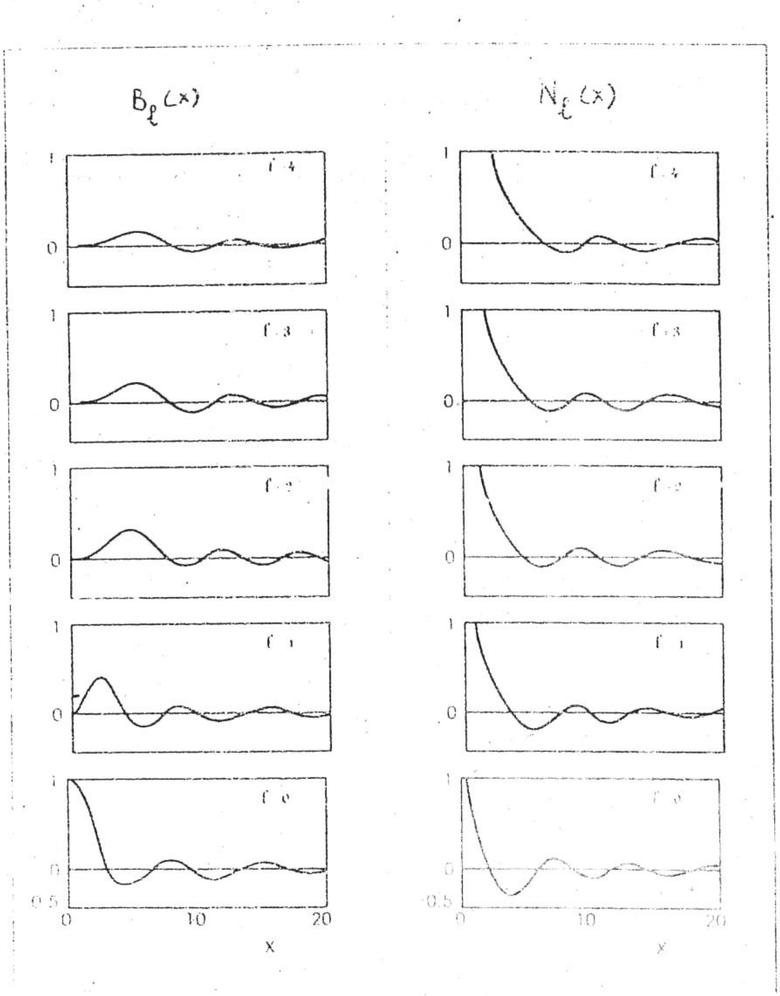
$$h_\ell^{(-)}(x) = N\ell(x) - i\, j\ell(x) \tag{6.57}$$

Dengan demikian keadaan eigen dan nilai eigen dari Hamiltonian partikel bebas dalam koordinat speris ialah

$$\varphi_{k\ell m}(r.\theta.\phi) = j_\ell\, 9kr)Y_\ell^m(\theta.\phi) \qquad (6.58)$$

dan

$$E_k = \frac{h^2k^2}{2m} \qquad (6.59)$$



Gambar 6.2 Fungsi –fungsi Bessel Speris dan fungsi-fungsi Neumann Speris untuk ℓ = 0, 1, 2, 3, ...