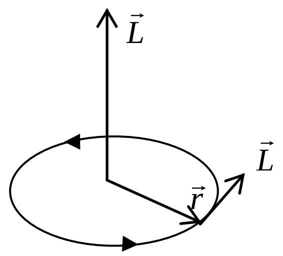
8 NILAI EIGEN DAN FUNGSI EIGEN DARI OPERATOR MOMENTUM SUDUT

A. Sifat Dasar Momentum Sudut

$$\vec{L} = \vec{r}\ x\ \vec{p} \qquad (8.1)$$



Gambar 8.1 Definisi klasik momentum angular
Arah $\vec{L}$ mengikuti aturan putaran skrup kanan

B. Komponen-Komponen Momentum Orbital dalam Kerangka Koordinat Cartesian

$$\vec{r} = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z \qquad (8.2)$$

$$\vec{p} = \hat{i}\ p_x + \hat{j}\ p_y + \hat{k}\ p_z \qquad (8.3)$$

Dengan cara yang sama komponen-komponen momentum angular dapat dituliskan

$$\vec{L} = \hat{i}\ L_x + \hat{j}\ L_y + \hat{k}\ L_z \qquad (8.4)$$

$$\vec{l} = \vec{r}x\vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \qquad (8.5)$$

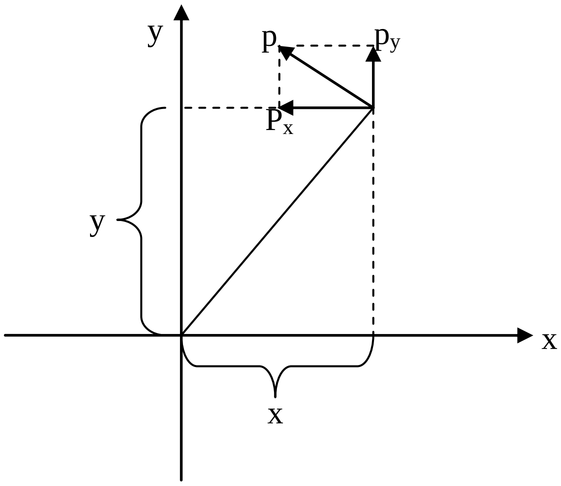
$$\vec{L} = (yp_z - zp_y)\hat{i} + (zp_x - xp_z)\hat{j} + (xp_y - yp_x)\hat{k} \qquad (8.6)$$

Dengan demikian berdasarkan pers (8.4) dan pers. (8.5) dapat kita identifikasi bahwa komponen-komponen momentum sudut adalah sebagai berikut :

$$L_x = y\ p_z - z\ p_y \qquad (8.7)$$

$$L_y = z\, p_x - x\, p_z \qquad (8.8)$$

$$L_z = x\, p_y - y\, px \qquad (8.9)$$



Gambar 8.2 Momen dari momentum terhadap pusat sumbu koordinat
$L_z = x\, p_y - y\, p_x$

Anda telah pelajari dalam modul pengantar fisika kuantum bahwa setiap besaran yang bisa diamati dan diukur (*observable*) dapat dikaitkan dengan operatornya. Coba anda ingat lagi konsep postulat kuantisasi.

Tabel 8.1 Besaran dinamis dan operatornya

Besaran Dinamis	Operator
Posisi X, Y, Z	$\hat{X}$, $\hat{Y}$, $\hat{Z}$
Momentum linear	
P_x	$\hat{P}_x = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial x}$
P_y	$\hat{P}_y = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial y}$
P_z	$\hat{P}_z = \dfrac{\hbar}{i}\dfrac{\partial}{\partial z}$
Momentum sudut L_x , L_y , L_z	$\hat{L}_X$, $\hat{L}_Y$, $\hat{L}_Z$

Dengan demikian maka momentum angular dapat diungkapkan sebagai berikut:

$$\hat{L}_X = \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y = -i\hbar\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \right) \tag{8.10}$$

$$\hat{L}_y = \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z = -i\hbar\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \right) \tag{8.11}$$

$$\hat{L}_z = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x = -i\hbar\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x} \right) \tag{8.12}$$

Operator momentum linearnya $\hat{P}$ bila kita perluas ke dalam ruang tiga dimensi dapat dituliskan seperti :

$$\hat{P} = (\hat{P}_x, \hat{P}_y, \hat{P}_z) = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\hat{P} = -i\hbar\nabla \tag{8.13}$$

Dengan ∇ adalah operator nabla atau operator Laplace. Persamaan (8.10), (8.11), (8.13) berdasarkan persamaan (8.13) dapat dituliskan sebagai:

$$\hat{L} = -i\hbar \; \vec{r} \times \vec{\nabla} \tag{8.14}$$

C. Relasi Komutasi

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \tag{8.15}$$

Anda juga sudah mempelajari komutator antara operator posisi dan momentum ialah

$$\left[\hat{X}_i, \hat{P}_j\right] = +\, i\hbar \; \delta_{ij} \tag{8.16}$$

Sekarang kita gunakan apa yang sudah kita pelajari untuk menghitung komutator antara operator momentum angular. Komutator antara operator $\hat{L}_X$ dan $\hat{L}_Y$ ialah:

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_x, \hat{L}_y\right] &= \hat{L}_X \hat{L}_Y - \hat{L}_Y \hat{L}_X \\
&= \left(\hat{Y}\hat{P}_{\hat{z}} - \hat{Z}\hat{P}_y\right)\left(\hat{Z}\hat{P}_x - \hat{X}\hat{P}_z\right) - \left(\hat{Z}\hat{P}_x - \hat{X}\hat{P}_z\right)\left(\hat{Y}\hat{P}_z - \hat{Z}\hat{P}_y\right) \\
&= \hat{Y}\hat{P}_z\hat{Z}\hat{P}_x - \hat{Y}\hat{P}_z\hat{X}\hat{P}_z - \hat{Z}\hat{P}_y\hat{Z}\hat{P}_x + \hat{Z}\hat{P}_y\hat{X}\hat{P}_z - \hat{Z}\hat{P}_x\hat{Y}\hat{P}_z + Z\hat{P}_x\hat{Z}\hat{P}_y + \hat{X}\hat{P}_z\hat{Y}\hat{P}_z - \hat{X}\hat{P}_z\hat{Z}\hat{P}_y \\
&= \left(\hat{Y}\hat{P}_z\hat{Z}\hat{P}_x - \hat{Z}\hat{P}_x\hat{Y}\hat{P}_z\right) + \left(\hat{Z}\hat{P}_x\hat{Z}\hat{P}_y - \hat{Z}\hat{P}_y\hat{Z}\hat{P}_x\right) + \left(\hat{X}\hat{P}_z\hat{Y}\hat{P}_z - \hat{Y}\hat{P}_z\hat{X}\hat{P}_z\right) + \\
&\quad \left(\hat{Z}\hat{P}_y\hat{X}\hat{P}_z - \hat{X}\hat{P}_z\hat{Z}\hat{P}_y\right)
\end{aligned}$$

$$= [\hat{Y}\hat{P}_z, \hat{Z}\hat{P}_x] + [\hat{Z}\hat{P}_x, \hat{Z}\hat{P}_y] + [\hat{X}\hat{P}_z, \hat{Y}\hat{P}_z] + [\hat{Z}\hat{P}_y, \hat{X}\hat{P}_z]$$

$$= \hat{Y}[\hat{P}_z, \hat{Z}]\hat{P}_x + [\hat{Z}, \hat{Z}]\hat{P}_x\hat{P}_y + \hat{X}\hat{Y}[\hat{P}_z, \hat{P}_z] + \hat{X}\hat{P}_y[\hat{Z}, \hat{P}_z]$$

$$= -i\hbar\, \hat{Y}\hat{P}_x + 0 + 0 + i\hbar\hat{X}\hat{P}_Y$$

$$= i\hbar(-\hat{Y}\hat{P}_X + \hat{X}\hat{P}_y)$$

$$= i\hbar(\hat{X}\hat{P}_y - \hat{Y}\hat{P}_x)$$

$$= i\hbar\hat{L}_2$$

:

$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar\,\hat{L}_x \qquad (8.17)$$

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar\,\hat{L}_y \qquad (8.18)$$

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar\,\hat{L}_z \qquad (8.19)$$

Latihan :

1. Buktikanlah ketiga relasi tersebut.

   Relasi komutator tersebut dapat digabungkan ke dalam satu persamaan vektor tuggal sebagai berikut :

$$\vec{L}\, x\, \vec{L} = i\hbar\, \vec{L} \qquad (8.20)$$

   Relasi komutator di atas merupakan relasi yang mendasar di antara komponen-komponen dari setiap vektor momentum angular. Persamaan tersebut menyatakan bahwa rotasi-rotasi yang berturutan dari kerangka koordinat tertentu dalam dua arah yang berbeda bukan merupakan operasi yang komut.

   Besar dari vektor momentum angular adalah akar dari momentum angular total yaitu :

$$L = \sqrt{L^2} = \sqrt{L.L} \qquad (8.21)$$

   Operator momentum angular total adalah operator vektor

$$\vec{L} = \hat{i}\hat{L}_x + \hat{j}\hat{L}_y + \hat{k}\hat{L}_z \qquad (8.22)$$

   dari persamaan (8.22) dapat kita tentukan bahwa :

$$\hat{L}^2 = \hat{L}.\hat{L} = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2 \qquad (8.23)$$

Operator $\hat{L}^2$ berkomutasi atau komut dengan setiap komponen dari operator vektor momentum angular. Hal itu berarti operator-operator tersebut mempunyai fungsi eigen-fungsi eigen yang simultan. Untuk itu mari kita buktikan pernyataan tersebut yaitu dengan menghitung komutator $\hat{L}_z^2$ dan $\hat{L}^2$ sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
\left[\hat{L}_z^2, \hat{L}^2\right] &= \left[\hat{L}_z^2, \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2\right] \\
&= \left[\hat{L}_z^2, \hat{L}_x^2\right] + \left[\hat{L}_z^2, \hat{L}_y^2\right] + \left[\hat{L}_z^2, \hat{L}_z^2\right] \\
&= \left[\hat{L}_z^2, \hat{L}_x^2\right] + \left[\hat{L}_z^2, \hat{L}_y^2\right] + 0 \\
&= \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x . \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_z, \hat{L}_y . \hat{L}_y\right] \\
&= \hat{L}_x \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_z, \hat{L}_x\right] \hat{L}_x + \hat{L}_y \left[\hat{L}_z, \hat{L}_y\right] + \left[\hat{L}_z, \hat{L}_y\right] \hat{L}_y \\
&= i\hbar \hat{L}_x \hat{L}_y + i\hbar \hat{L}_y \hat{L}_x - i\hbar \hat{L}_y \hat{L}_x - i\hbar \hat{L}_x \hat{L}_y \\
&= 0
\end{aligned}$$

Dengan cara yang sama dapat kita buktikan bahwa

$$\left[\hat{L}_x, \hat{L}^2\right] = \left[\hat{L}_y, \hat{L}^2\right] = 0 \qquad \textit{atau}$$

$$\left[\hat{L}, \hat{L}^2\right] = 0$$

Sifat lainnya dari operator momentum angular adalah bahwa operator $\hat{L}^2$ dan $\hat{L}$ juga komponen-komponennya bersifat hermitian.

Contoh : Tunjukkanlah bahwa operator $\hat{L}_x$ bersifat hermitian.

Jawab : Bila $\hat{L}_x$ bersifat hermitian harus dipenuhi bahwa :

$$\hat{L}_x = \hat{L}_x^{+}$$

$$
\begin{aligned}
\hat{L}^+{}_x &= (yp_z - zp_y)^+ = (yp_z)^+ - (zp_y)^+ \\
&= \hat{p}_z^+ \hat{y}^+ - \hat{p}_y^+ \hat{z}^+ \\
&= \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}\right)^+ \hat{y}^+ - \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right)^+ \hat{z}^+ \\
&= \left(\frac{\hbar}{i}\right)^+ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^+ \hat{y}^+ - \left(\frac{\hbar}{i}\right)^+ \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^+ \hat{z}^+ \\
&= \left(-\frac{\hbar}{i}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)^+ \hat{y} - \left(-\frac{\hbar}{i}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) \hat{z} \\
&= \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}\right) \hat{y} - \left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \hat{z} \\
&= \hat{p}_z \hat{y} - \hat{p}_y \hat{z} \\
&= \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \\
&= \hat{L}_x
\end{aligned}
$$

Jadi diperoleh $\hat{L}^+{}_x = \hat{L}_x$ yang berarti operator $\hat{L}_x$ adalah Hermitian.

2. Tunjukkan bahwa operator-operator momentum angular berikut bersifat Hermitian.
   a. $\hat{L}^2$ b. $\hat{L}$ c. $\hat{L}_x$ d. $\hat{L}_y$

D. Operator-Operator Shift

Operator Shift didefinisikan sebagai berikut :

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y \tag{8.24}$$

$$\hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y \tag{8.25}$$

Operator $\hat{L}_+$ dinamakan operator penaik (*rasing operator*) dan operator $\hat{L}_-$ dinamakan operator penurun (*lowering operator*). Apa yang akan dinaikkan atau diturunkan oleh kedua operator tersebut? Nanti kita akan pelajari bahwa sifat kedua operator ini serupa dengan operator kreasi dan operator anihilasi. Kedua operator $\hat{L}_+$ dan $\hat{L}_-$ tak bersifat Hermitian tapi satu sama lain merupakan adjointnya.

Contoh : Buktikan bahwa operator $\hat{L}_+$ dan $\hat{L}_-$ tidak Hermitian.

Bukti :

$$
\begin{aligned}
(\hat{L}_+)^+ &= (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)^+ \\
&= \hat{L}_x^{\,+} + (i\hat{L}_y)^+ \\
&= \hat{L}_x^{\,+} + (i)^+ L_y^{\,+} \\
&= \hat{L}_x - iL_y
\end{aligned}
$$

$$
(\hat{L}_+)^+ \neq \hat{L}_+ \; tapi \; (\hat{L}_+)^+ = \hat{L} \tag{8.26}
$$

Jadi operator $\hat{L}_+$ tak Hermitian

$$
\begin{aligned}
(\hat{L}_-)^+ &= (\hat{L}_x - i\hat{L}_y)^+ \\
&= \hat{L}_x^{\,+} - (i\hat{L}_y)^+ \\
&= \hat{L}_x^{\,+} - (i)^+ L_y^{\,+} \\
&= \hat{L}_x + iL_y
\end{aligned}
$$

$$
(\hat{L}_-)^+ \neq \hat{L}_- \; tapi \; (\hat{L}_-)^+ = \hat{L}_+ \tag{8.27}
$$

Jadi operator $\hat{L}_-$ tak Hermitian

Dengan demikian operator $\hat{L}_+$ dan $\hat{L}_-$ tak bersifat Hermitian tapi satu sama lain merupakan adjointnya.

Sekarang mari kita hitung komutator antara operator shift dengan operator momentum sudut orbital dan juga dengan komponen-komponennya yaitu : $[\hat{L}_z, \hat{L}_+]$, $[\hat{L}_z, \hat{L}_-]$, $[\hat{L}^2, \hat{L}_-]$, $[\hat{L}_x, \hat{L}_+]$ dan yang lainnya.

$$
\begin{aligned}
[\hat{L}_z, \hat{L}_+] &= [\hat{L}_z, \hat{L}_x + i\hat{L}_y] \\
&= [\hat{L}_z, \hat{L}_x] + i\,[\hat{L}_z, \hat{L}_y] \qquad (menggunakan\ sifat\ komutator) \\
&= i\hbar\hat{L}_y + \hbar\hat{L}_x \\
&= \hbar(\hat{L}_x + \hat{L}_y) \\
&= \hbar\hat{L}_+
\end{aligned} \tag{8.28}
$$

jadi komutator antara $\hat{L}_z$ dan $\hat{L}_+$ menghasilkan $\hbar\hat{L}_+$

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{L}_z , \hat{L}_-\right] &= \left[\hat{L}_z , \hat{L}_x - i\hat{L}_y\right] \\
&= \left[\hat{L}_z , \hat{L}_x\right] + i\left[\hat{L}_z , \hat{L}_y\right] \qquad (menggunakan\ sifat\ komutator) \\
&= i\hbar\hat{L}_y - \hbar\hat{L}_x \qquad\qquad (8.29) \\
&= -\hbar(\hat{L}_x - \hat{L}_y) \\
&= -\hbar\hat{L}_+
\end{aligned}
$$

jadi komutator antara $\hat{L}_z$ dan $\hat{L}_-$ menghasilkan $-\hbar\hat{L}_-$.

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{L}^2 , \hat{L}_+\right] &= \left[\hat{L}_x{}^2 , \hat{L}_y{}^2 + \hat{L}_z{}^2 ,\ \hat{L}_x + i\hat{L}_y\right] \\
&= \left[\hat{L}_x{}^2 , \hat{L}_x\right] + i\left[\hat{L}_z{}^2 , \hat{L}_y\right] + \left[\hat{L}_y{}^2 , \hat{L}_x\right] + i\left[\hat{L}_y{}^2 , \hat{L}_y\right] + \left[\hat{L}_z{}^2 , \hat{L}_x\right] + i\left[\hat{L}_z{}^2 , \hat{L}_y\right] \\
&= 0 + i\hat{L}_x\left[\hat{L}_x , \hat{L}_y\right] + i\left[\hat{L}_x , \hat{L}_y\right]\hat{L}_x + \hat{L}_y\left[\hat{L}_y , \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_y , \hat{L}_x\right]\hat{L}_y + 0 + \\
&\quad \hat{L}_z\left[\hat{L}_z , \hat{L}_x\right] + \left[\hat{L}_z , \hat{L}_x\right]\hat{L}_z + i\hat{L}_z\left[\hat{L}_z , \hat{L}_y\right] + i\left[\hat{L}_z , \hat{L}_y\right]\hat{L}_z \\
&= -\hbar\hat{L}_x\hat{L}_z - \hbar\hat{L}_z\hat{L}_x - i\hbar\hat{L}_y\hat{L}_z - i\hbar\hat{L}_z\hat{L}_y + \hbar\hat{L}_z\hat{L}_y + i\hbar\hat{L}_y\hat{L}_z + \hbar\hat{L}_z\hat{L}_x + \hbar\hat{L}_x\hat{L}_z
\end{aligned}
$$

$$
\left[\hat{L}^2 , \hat{L}_+\right] = 0 \qquad (8.30)
$$

jadi komutator antara $\hat{L}^2$ dan $\hat{L}_+$ menghasilkan nol atau operator $\hat{L}^2$ dan $\hat{L}_+$ komut

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{L}_x , \hat{L}_+\right] &= \left[\hat{L}_x , \hat{L}_x + i\hat{L}_y\right] \\
. \qquad &= \left[\hat{L}_x , \hat{L}_x\right] + i\left[\hat{L}_x , \hat{L}_y\right] \qquad (menggunakan\ sifat\ komutator) \\
&= 0 + i(i\hbar\hat{L}_z) \\
&= -\hbar\hat{L}_z \qquad\qquad (8.31)
\end{aligned}
$$

jadi komutator antara $\hat{L}_x$ dan $\hat{L}_+$ menghasilkan $-\hbar\hat{L}_z$

Latihan :

3. Coba anda buktikan relasi komutator berikut :
   a. $\left[\hat{L}^2 , \hat{L}_-\right] = 0$
   b. $\left[\hat{L}^2 , \hat{L}_z\right] = 0$
   c. $\left[\hat{L}_z , \hat{L}_-\right] = 2\hbar\hat{L}_z$
4. Hitunglah komutator dari
   a. $\left[\hat{L}_x , \hat{L}_-\right]$

b. $[\hat{L}_y , \hat{L}_+]$

c. $[\hat{L}_y , \hat{L}_-]$

Selanjutnya marilah kita pelajari lebih jauh bagaimanakah relasi antara operator $\hat{L}^2$, Operator shift dan komponen-komponen vektor operator momentum angular orbital. Untuk itu kita kalikan $\hat{L}_+$ dan $\hat{L}_-$ sebagai berikut :

$$\hat{L}_+ \hat{L}_- = (\hat{L}_x + i\hat{L}_y)(\hat{L}_x - i\hat{L}_y)$$

$$\hat{L}_+ \hat{L}_- = \hat{L}_x{}^2 + \hat{L}_y{}^2 - i[L_x , L_x]$$

$$\hat{L}_+ \hat{L}_- = \hat{L}_x{}^2 + \hat{L}_y{}^2 + \hbar\hat{L}_z$$

$$\hat{L}_+ \hat{L}_- - \hbar\hat{L}_z = \hat{L}_x{}^2 + \hat{L}_y{}^2$$

$$\hat{L}_+ \hat{L}_- - \hbar\hat{L}_z + \hat{L}_z{}^2 = \hat{L}_x{}^2 + \hat{L}_y{}^2 + \hat{L}_z{}^2 = \hat{L}^2 \quad (8.32)$$

maka operator $\hat{L}^2$ dinyatakan dengan operator lainnya adalah

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z{}^2 - \hbar\hat{L}_z \quad (8.33)$$

bila operator perkaliannya dibalik maka akan diperoleh ungkapan yang berbeda-beda sebagai berikut :

$$\hat{L}_- \hat{L}_+ = (\hat{L}_x - i\hat{L}_y)(\hat{L}_x + i\hat{L}_y)$$

$$\hat{L}_- \hat{L}_+ = \hat{L}_x{}^2 + \hat{L}_y{}^2 + \hbar\hat{L}_z \quad (8.34)$$

$$\hat{L}_-\hat{L}_+ + \hbar\hat{L}_z + \hat{L}_z{}^2 = \hat{L}_x{}^2 + \hat{L}_y{}^2 + \hat{L}_z{}^2 = \hat{L}^2$$

atau

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z{}^2 + \hbar\hat{L}_z \quad (8.35)$$

jadi dengan demikian hubungan antara $\hat{L}^2$ dan operator lainnya dapat diungkapkan sebagi berikut :

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_\pm\hat{L}_\mp + \hat{L}_z{}^2 \mp \hbar\hat{L}_z \quad (8.36)$$

operator $\hat{L}^2$ bisa juga diungkapkan dengan bentuk lain yaitu kita jumlahkan $\hat{L}_-\hat{L}_+$ dengan $\hat{L}_+\hat{L}_-$

$$\begin{array}{rl} \hat{L}_+\hat{L}_- &= \hat{L}_x^{\,2}+\hat{L}_y^{\,2}+\hbar\hat{L}_z \\ \hat{L}_-\hat{L}_+ &= \hat{L}_x^{\,2}+\hat{L}_y^{\,2}-\hbar\hat{L}_z \\ \hline \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+ &= 2(\hat{L}_x^{\,2}+\hat{L}_y^{\,2}) \end{array} +$$

$$\frac{1}{2}(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+)+\hat{L}_z^{\,2} = \hat{L}_x^{\,2}+\hat{L}_y^{\,2}+\hat{L}_z^{\,2}=\hat{L}^2$$

sehingga diperoleh:

$$\hat{L}^2 = \frac{1}{2}(\hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_-\hat{L}_+)+\hat{L}_z^{\,2} \tag{8.37}$$

E. Nilai Eigen dari Operator Momentum Angular

Setelah anda memahami sifat-sifat dasar momentum sudut orbital, maka pada bagian ini kita akan mempelajari bagaimana menentukan nilai eigen dari momenmtum angular. Nilai eigen relevan terhadap dua jenis momentum angular yaitu orbital dan spin. Pada bagian ini kita akan menggunakan momentum angular umum yang diberi notasi J selain L yang menyatakan momentum angular orbital dan s untuk spin. Operator $\hat{J}$ dapat menyatakan $\hat{L}$ dan $\hat{s}$ atau juga menyatakan gabungan keduanya $\hat{L}+\hat{s}$. Momentum angular umum dinyatakan dalam komponennya adalah sebagi berikut :

$$J = i\,J_x + j\,J_y + k\,J_z \tag{8.38}$$

relasi komutasi antar komponen-komponennya adalah :

$$[\hat{J}_x\,,\,\hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z \tag{8.39}$$

$$[\hat{J}_y\,,\,\hat{J}_z] = i\hbar\hat{J}_x \tag{8.40}$$

$$[\hat{J}_z\,,\,\hat{J}_x] = i\hbar\hat{J}_y \tag{8.41}$$

momentum angular umum total dinotasikan dengan $\hat{J}^2$. Operator $\hat{J}^2$ ini komut dengan setiap komponen dari $\hat{J}$ yaitu :

$$[\hat{J}_x\,,\,\hat{J}^2] = [\hat{J}_y\,,\,\hat{J}^2] = [\hat{J}_z\,,\,\hat{J}^2] = 0 \tag{8.42}$$

Demikian pula pernyataan untuk operator shift dengan menggunakan momentum angular umum diubah menjadi operator *ladder* (Operator tangga) yaitu

$$\hat{J}_+ = \hat{J}_x + i\hat{J}_y \tag{8.43}$$

$$\hat{J}_- = \hat{J}_x - i\hat{J}_y \quad (8.44)$$

Relasi komutasinya :

$$[\hat{J}_z , \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm \quad (8.45)$$

$$[\hat{J}^2 , \hat{J}_z] = 0 \quad (8.46)$$

sedangkan hubungan antar operator momentum sudut orbital umum dengan operator lainnya diungkapkan sebagai berikut :

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_\pm \hat{J}_\mp + \hat{J}_z{}^2 \mp \hbar \hat{J}_z \quad (8.47)$$

dan

$$\hat{J}^2 = \frac{1}{2}(\hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_+ \hat{J}_-) + \hat{J}_z{}^2 \quad (8.48)$$

Dengan menggunakan relasi antara operator $\hat{J}^2, \hat{J}_z, \hat{J}_+$ dan $\hat{J}$ kita akan menentukan nilai eigen dari operator $\hat{J}_z$ dan $\hat{J}^2$. Persamaan nilai eigen untuk operator $\hat{J}_z$ ditulis :

$$\hat{J}_z \varphi_m = \hbar m \varphi_m \quad (8.49)$$

Dengan φ_m adalah fungsi eigen dari operator $\hat{J}_z$ dengan nilai $\hbar m$. Kita akan mempelajari batasan-batasan harga m pada persamaan nilai eigen tersebut.

Dalam modul Fisika Modern dan modul Pengantar Fisika Kuantum disebutkan bahwa m berupa kelipatan ganjil dari setengan atau integer.

$$m = 0 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ 1 \ , \ \frac{3}{2} \ , \ 2 \ , \ \frac{5}{2} \ , \ 3 \ , \ \ldots\ldots,$$

untuk itu mari kita tinjau relasi komutasi berikut :

$$[\hat{J}_z , \hat{J}_+] = \hbar \hat{J}_+$$

kalikan kedua ruas dengan φ_m maka

$$[\hat{J}_z , \hat{J}_+]\varphi_m = \hbar \hat{J}_+ \varphi_m$$

$$(\hat{J}_z \hat{J}_+ - \hat{J}_+ \hat{J}_z)\varphi_m = \hbar \hat{J}_+ \varphi_m$$

$$\hat{J}_z \hat{J}_+ \varphi_m = \hbar \hat{J}_+ \varphi_m + \hat{J}_+ \hat{J}_z \varphi_m$$

$$\hat{J}_z \hat{J}_+ \varphi_m = \hbar \hat{J}_+ \varphi_m + \hat{J}_+ \hbar m \varphi)_m$$

$$\hat{J}_z\hat{J}_+\varphi_m = \hbar(m+1)\hat{J}_+\varphi_m \tag{8.50}$$

Persamaan (8.50) menyatakan bahwa $\hat{J}_+\varphi_m$ adalah juga operator dari $\hat{J}_z$ dengan nilai eigen $\hbar(m+1)$ dan diungkapkan oleh $\hat{J}_+\varphi_m = \varphi_{m+1}$. Selanjutnya kita kalikan kedua ruas persamaan (8.50) dengan $\hat{J}_+$ dari kanan

$$[\hat{J}_z\,,\,\hat{J}_+]\hat{J}_+ = \hbar\hat{J}_+\hat{J}_+$$

kemudian kalikan dengan φ_m

$$\begin{aligned}
&[\hat{J}_z\,,\,\hat{J}_+]\hat{J}_+\,\varphi_m = \hbar\hat{J}_+\hat{J}_+\varphi_m \\
&(\hat{J}_z\hat{J}_+\hat{J}_+ - \hat{J}_+\hat{J}_z\hat{J}_+)\varphi_m = \hbar\hat{J}_+\hat{J}_+\varphi_m \\
&\hat{J}_z\hat{J}_+\hat{J}_+\varphi_m = \hbar\hat{J}_+\hat{J}_+\varphi_m + \hat{J}_+\hat{J}_z\hat{J}_+\varphi_m
\end{aligned} \tag{8.51}$$

Substitusikan persamaan (8.50) ke dalam pers.(8.51) :

$$\hat{J}_z\hat{J}_+\hat{J}_+\varphi_m = \hbar\hat{J}_+\hat{J}_+\varphi_m + \hat{J}_+\hbar(m+1)\hat{J}_+\varphi_m \tag{8.52}$$

$$\hat{J}_z\hat{J}_+\hat{J}_+\varphi_m = \hbar(m+2)\hat{J}_+\hat{J}_+\varphi_m \tag{8.53}$$

Persamaan (8.53) tersebut menyatakan bahwa $\hat{J}_z\hat{J}_+\hat{J}_+\varphi_m$ adalah juga fungsi eigen dari operator $\hat{J}_+$ dengan nilai eigen $\hbar(m+2)$ dan diungkapkan oleh:

$$\hat{J}_+(\hat{J}_+\varphi_m) = \hat{J}_+\varphi_{m+1} = \varphi_{m+2} \tag{8.54}$$

Dengan menggunakan cara yang sama seperti diuraikan diatas dapat dibuktikan bahwa :

$$\begin{aligned}
&\hat{J}_z\hat{J}_+\hat{J}_+\hat{J}_+\varphi_m = \hbar(m+3)\,\hat{J}_z\hat{J}_+\hat{J}_+\hat{J}_+\varphi_m \\
&atau \\
&\hat{J}_z J_+{}^3\varphi_m = \hbar(m+3)\,\hat{J}_+{}^3\varphi_m
\end{aligned} \tag{8.55}$$

berikutnya kita tinjau relasi komutasi berikut:

$$[\hat{J}_z\,,\,\hat{J}_-] = -\hbar\hat{J}_-$$

kalikan kedua ruas masing-masing dengan φ_m dari kanan

$$\begin{aligned}
&[\hat{J}_z\hat{J}_-]\varphi_m = -\hbar\hat{J}_-\varphi_m \\
&(\hat{J}_z\hat{J}_- - \hat{J}_-\hat{J}_z)\varphi_m = -\hbar\hat{J}_-\varphi_m \\
&\hat{J}_z\hat{J}_-\varphi_m = -\hat{J}_-\hat{J}_z\varphi_m + \hat{J}_-\hat{J}_z\varphi_m \\
&\qquad = -\hbar\hat{J}_-\varphi_m + \hat{J}_- m\hbar\varphi_m
\end{aligned}$$

$$=\hbar(m-1)\hat{J}_-\varphi_m \qquad (8.56)$$

Pers. (8.56) menyatakan bahwa $\hat{J}_-\varphi_m$ adalah juga fungsi eigen dari operator $\hat{J}_z$ dengan nilai eigen $\hbar(m-1)$ dan diungkapkan oleh $\hat{J}_-\varphi_m = \varphi_{m-1}$. Sekarang kita kalikan kedua ruas pers.(8.56) dengan $\hat{J}_-$ dan φ_m dari sebelah kanan

$$\begin{aligned} &[\hat{J}_z\hat{J}_-]\hat{J}_-\varphi_m = -\hbar\hat{J}_-\hat{J}_-\varphi_m \\ &(\hat{J}_z\hat{J}_-\hat{J}_- - \hat{J}_-\hat{J}_z\hat{J}_-)\varphi_m = -\hbar\hat{J}_-\hat{J}_-\varphi_m \\ &\hat{J}_z\hat{J}_-\hat{J}_-\varphi_m = -\hat{J}_-\hat{J}_z\hat{J}_-\varphi_m - \hbar\hat{J}_-\hat{J}_-\varphi_m \end{aligned} \qquad (8.57)$$

Substitusikan pers.(8.56) ke dalam persamaan di atas

$$\begin{aligned} &\hat{J}_z\hat{J}_-\hat{J}_-\varphi_m = \hat{J}_-\hbar(m-1)\hat{J}_-\varphi_m - \hat{J}_-\hat{J}_-\varphi_m \\ &\hat{J}_z\hat{J}_-\hat{J}_-\varphi_m = \hbar(m-2)\hat{J}_-\hat{J}_-\varphi_m \end{aligned} \qquad (8.58)$$

Persamaan (8.58) menyatakan bahwa $\hat{J}_-\hat{J}_-\varphi_m$ adalah juga fungsi eigen dari operator $\hat{J}_z$ dengan nilai eigen $\hbar(m-2)$ dan diungkapkan sebagai berikut:

$$\hat{J}_-(\hat{J}_-\varphi_m) = \hat{J}_-\varphi_{m-1} = \varphi_{m-2} \qquad (8.59)$$

Dengan menggunakan cara yang sama dapat dibuktikan bahwa :

$$\hat{J}_z\hat{J}_-\hat{J}_-\hat{J}_-\varphi_m = \hat{J}_z\hat{J}_-^{\,3}\varphi_m = \hbar(m-3)\hat{J}_-^{\,3}\varphi_m \qquad (8.60)$$

demikian seterusnya hingga secara umum dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\hat{J}_z\hat{J}_-^{\,n}\varphi_m = \hbar(m-n)\varphi_m \qquad (8.61)$$

dan

$$\hat{J}_-^{\,n}\varphi_m = \varphi_{m-n} \qquad (8.62)$$

Berdasarkan apa yang sudah kita pelajari di atas, sekarang kita sudah memperoleh generasi fungsi eigen dari operator $\hat{J}_z$ yang berasal dari fungsi eigen tunggal φ_m yaitu :

$$(\ldots\varphi_{m-2}\ ,\ \varphi_{m-1}\ ,\ \varphi_m\ ,\ \varphi_{m+1}\ ,\ \varphi_{m+2}\ ,\ \varphi_{m+3}\ ,\ \ldots)$$

Anda sudah mempelajari generasi fungsi eigen dan nilai eigen dari operator $\hat{J}_z$. Sekarang kita akan bahas kasus yang sama untuk operator momentum sudut orbital total umum $\hat{J}^2$. Sebelumnya sudah kita tunjukkan bahwa $\hat{J}_z$ berkomutasi dengan $\hat{J}^2$ .atau $[\hat{J}_z \hat{J}^2]=0$, dengan demikian operator-operator tersebut mempunyai fungsi eigen umum. Misalkan φ_m adalah sembarang fungsi eigen dari $\hat{J}^2$ dengan nilai eigen $\hbar^2 k^2$. Maka persamaan nilai eigennya dapat diungkapkan sebagai berikut:

$$\hat{J}^2 \varphi_m = \hbar^2 k^2 \varphi_m \tag{8.63}$$

Tinjau kembali pers. (8.30) dan nyatakan dengan momentum angular orbital umum:

$$[\hat{J}^2, \hat{J}_+]=0,$$

Kalikan kedua ruas persamaan itu dengan φ_m

$$\begin{aligned} [\hat{J}^2 \hat{J}_+]\varphi_m &= 0 \\ \hat{J}^2 \hat{J}_+ \varphi_m - \hat{J}_+ \hat{J}^2 \varphi_m &= 0 \\ \hat{J}^2 \hat{J}_+ \varphi_m &= \hat{J}_+ \hat{J}^2 \varphi_m \end{aligned} \tag{8.64}$$

substitusikan persamaan (8.63) pada pers.(8.64) maka diperoleh

$$\hat{J}^2 \hat{J}_+ \varphi_m = \hat{J}_+ \hbar^2 k^2 \varphi_m = \hbar^2 k^2 \hat{J}_+ \varphi_m \tag{8.65}$$

persamaan (8.65) tersebut menyatakan bahwa $\hat{J}_+ \varphi_m$ adalah juga fungsi eigen dari operator $\hat{J}^2$ dengan nilai eigen yang sama $\hbar^2 k^2$. Diungkapkan oleh :

$$\hat{J}_+ \varphi_m = \varphi_{m+1} \tag{8.66}$$

Selanjutnya kita kalikan persamaaan (8.64) dengan $\hat{J}_+$ dan φ_m dari kanan

$$\begin{aligned} [\hat{J}^2 \hat{J}_+]\hat{J}_+ \varphi_m &= 0 \\ \hat{J}^2 \hat{J}_+ \hat{J}_+ \varphi_m - \hat{J}_+ \hat{J}^2 \hat{J}_+ \varphi_m &= 0 \\ \hat{J}^2 \hat{J}_+ \hat{J}_+ \varphi_m &= \hat{J}_+ \hat{J}^2 \hat{J}_+ \varphi_m \end{aligned}$$

substitusi pers. (8.65) ke dalam persamaan di atas maka

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 \hat{J}_+ \hat{J}_+ \varphi_m &= \hat{J}_+ \hbar^2 k^2 \hat{J}_+ \varphi_m \\ \hat{J}^2 \hat{J}_+ \hat{J}_+ \varphi_m &= \hbar^2 k^2 \hat{J}_+ \hat{J}_+ \varphi_m \end{aligned} \tag{8.67}$$

Persamaan (8.67) menyatakan bahwa $\hat{J}_+ \hat{J}_+ \varphi_m$ adalah juga fungsi eigen dari operator $\hat{J}^2$ dengan nilai eigen yang sama $\hbar^2 k^2$. Berdasarkan apa yang sudah kita pelajari dapat disimpulkan bahwa seluruh fungsi eigen dari operator $\hat{J}^2$ berkaitan dengan nilai eigen yang sama yaitu $\hbar^2 k^2$. Pertanyaan kita adalah ada berapa banyak fungsi eigen tersebut?. Untuk menjawab permasalahan tersebut mari kita hitung harga rata-rata dari $\hat{J}^2$.

$$\left\langle \hat{J}^2 \right\rangle = \langle \varphi_m | \hat{J}^2 | \varphi_m \rangle = \langle \varphi_m | \hat{J}_x{}^2 \hat{J}_y{}^2 \hat{J}_z{}^2 | \varphi_m \rangle$$

$$\langle \varphi_m | \hbar^2 k^2 | \varphi_m \rangle = \langle \varphi_m | \hat{J}_x{}^2 | \varphi_m \rangle + \langle \varphi_m | \hat{J}_y{}^2 | \varphi_m \rangle + \langle \varphi_m | \hat{J}_z{}^2 | \varphi_m \rangle$$

$$\hbar^2 k^2 \langle \varphi_m | \varphi_m \rangle = \langle \varphi_m | \hat{J}_x{}^2 | \varphi_m \rangle + \langle \varphi_m | \hat{J}_y{}^2 | \varphi_m \rangle + m^2 \hbar^2 \langle \varphi_m \| \varphi_m \rangle$$

$$\hbar^2 k^2 = \langle \varphi_m | \hat{J}_x{}^2 | \varphi_m \rangle + \langle \varphi_m | \hat{J}_y{}^2 | \varphi_m \rangle + m^2 \hbar^2$$

karena besar $\langle \varphi_m | \hat{J}_x{}^2 | \varphi_m \rangle$ dan $\langle \varphi_m | \hat{J}_y{}^2 | \varphi_m \rangle$ selalu positif atau nol

$$\langle \varphi_m | \hat{J}_x{}^2 | \varphi_m \rangle \quad \geq 0$$

$$\langle \varphi_m | \hat{J}_y{}^2 | \varphi_m \rangle \quad \geq 0$$

maka $\hbar^2 k^2 \geq m^2 \hbar^2$ atau

$$|k| \geq |m| \tag{8.68}$$

jadi untuk suatu harga k > o maka harga yang mungkin untuk m dalam urutan persamaan (8.) berada di antara +k dan –k. jika m_{max} adalah harga maksimum dari m, dapat diasumsikan untuk suatu besaran momentum angular ħk maka

$$\hat{J}_+ \varphi_{\max} = 0 \tag{8.69}$$

dengan cara yang sama

$$\hat{J}_- \varphi_{\min} = 0 \tag{8.70}$$

Sekarang kita tinjau persamaan:

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_- \hat{J}_+ + \hat{J}_z{}^2 + \hbar \hat{J}_z$$

kalikan kedua ruas masing-masing dengan $\varphi_{m_{\max}}$

$$\hat{J}^2 \varphi_{m_{\max}} = \hat{J}_- \hat{J}_+ \varphi_{m_{\max}} + \hat{J}_z{}^2 \varphi_{m_{\max}} + \hbar \hat{J}_z \varphi_{m_{\max}}$$

Berdasarkan pers. (8.49) dan pers. (8.63) maka persamaan di atas menjadi:

$$\hbar^2 k^2 \varphi_{\max} = 0 + m_{\max}^2 \hbar^2 \varphi_{\max} + m_{\max} \hbar^2 \varphi_{\max}$$

$$\hbar^2 k^2 \qquad = \hbar^2 m_{\max}(m_{\max} + 1) \tag{8.71}$$

Cara yang sama kita lakukan dengan menggunakan persamaan :

$$\hat{J}^2 = \hat{J}_+\hat{J}_- + \hat{J}_z{}^2 - \hbar\hat{J}_z$$

kalikan kedua ruas masing-masing dengan $\varphi_{\min}$

$$\begin{aligned}
\hat{J}^2\varphi_{\min} &= \hat{J}_+\hat{J}_-\varphi_{\min} + \hat{J}_z{}^2\varphi_{\min} - \hbar\hat{J}_z\varphi_{\min} \\
\hbar^2k^2 &= 0 + \hbar^2 m_{\min}^2 - \hbar^2 m_{\min} \\
\hbar^2k^2 &= \hbar^2 m_{\min}(m_{\min} - 1)
\end{aligned} \tag{8.72}$$

dengan demikian peluang harga m untuk suatu harga $J^2 = \hbar^2k^2$ membentuk urutan yang simetris berpusat di m=0 sesuai gambar 8.3.

Dari pers. (8.71) dan pers. (8.72), diperoleh :

$$m_{\max}(m_{\max} + 1) = m_{\min}(m_{\min} - 1) \tag{8.73}$$

persamaan tersebut dipenuhi jika $m_{\max} = m_{\min}$ misalkan $m_{\max} = -j$ harga-harga j dapat berupa suatu integer (0, 1, 2, 3, 4, 5 …) atau setengah kali bilangan ganjil ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$). Dengan demikian jika j adalah suatu integer maka m juga integer dan jika j adalah $\frac{1}{2}$ kali bilangan ganjil maka m juga $\frac{1}{2}$ kali bilangan ganjil.

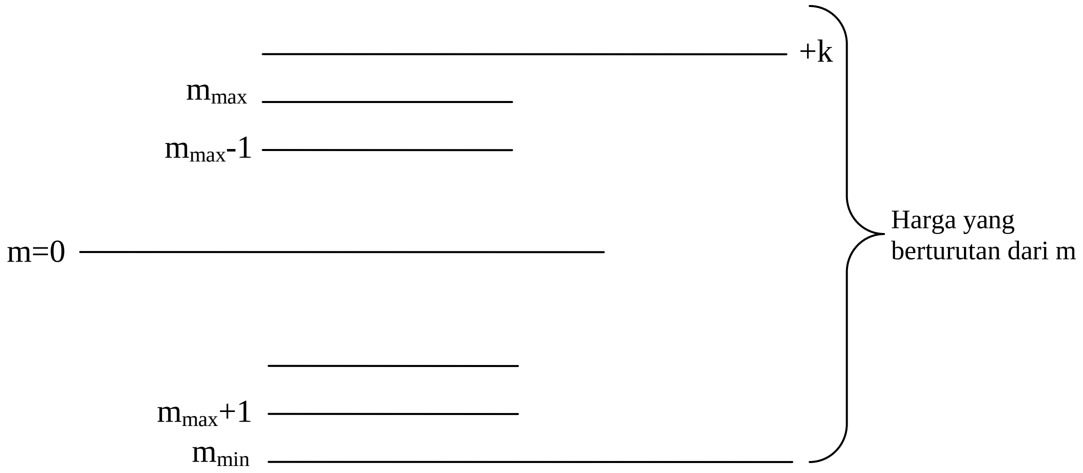
Contoh :

Bila j = 1 maka harga m adalah -1, 0, 1.

Bila j = 2 maka harga m adalah -2, -1, 0, 1, 2.

Bila j = $\frac{1}{2}$ maka harga m adalah $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Bila j = $\frac{3}{2}$ maka harga m adalah $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$.



Gambar 8.3 Peluang harga m untuk harga $J^2 = \hbar^2 k^2$

Dalam kasus j = m_{max} = m_{min} dan kita substitusikan ke dalam pers. (8.71) maka kita akan memperoleh nilai eigen-nilai eigen dari operator $\hat{J}^2$ yaitu

$$J^2 = \hbar^2 k^2 \hbar^2 j(j+1) \qquad (8.73)$$

F. Fungsi Eigen dari Operator Momentum Angular Orbital $\hat{L}^2$ *dan* $\hat{L}_z$

1. Harmonik Bola (*Spherical Harmonics*)

Pada bagian sebelumnya anda sudah mempelajari bagaimana menentukan nilai eigen dari suatu operator momentum angular orbital. Pada bagian ini anda akan mempelajari tentang bagaimana menentukan fungsi eigen dari operator momentum angular orbital. Pada bagian ini anda akan mempelajari tentang bagaimana menentukan fungsi eigen dari operator momentum angular. Terdapat dua cara atau dua teknik untuk menentukan fungsi eigen $\varphi_{\ell m}$ dari operator – operator momentum angular $\hat{L}^2$ *dan* $\hat{L}_z$

Pertama dengan cara langsung memecahkan persamaan-persamaan nilai eigen berikut:

$$\begin{aligned} L^2 \varphi_{\ell m} &= \hbar^2 \ell(\ell+1)\varphi_{\ell m} \\ \hat{L}_z \varphi_{\ell m} &= \hbar m \varphi_{\ell m} \end{aligned} \qquad (8.74)$$

<u>Kedua</u> mencari solusi persamaan :

$$\hat{L}_{+}\,\varphi_{\ell\ell}=0 \tag{8.75}$$

dengan $\varphi_{\ell\ell}$ adalah fungsi eigen-fungsi eigen dari operator $\hat{L}^{2}$ dan $\hat{L}_{Z}$ yang berkaitan dengan bilangan kuantum orbital ℓ

$$\{\varphi_{\ell m}\}\equiv\{\varphi_{\ell\ell},\varphi_{\ell,\ell-1},...,\varphi_{\ell,-\ell}\} \tag{8.76}$$

yang diperoleh dengan mengaplikasikan $\hat{L}_{-}$ pada $\varphi_{\ell\ell}$ yaitu :

$$\begin{aligned}\hat{L}_{-}\,\varphi_{\ell\ell}&=\varphi_{\ell,\ell-1}\\ \hat{L}_{-}\,\hat{L}_{-}\,\varphi_{\ell\ell}&=\hat{L}_{-}\,\varphi_{\ell,\ell-1}=\varphi_{\ell,\ell-2}\end{aligned} \tag{8.77}$$

Dalam teknik lainnya untuk memperoleh fungsi eigen $\varphi_{\ell m}$ sangat cocok sekali dan sangat praktis untuk bekerja dalam sistim koordinat spheres *(r,θ,ϕ)*. Sistim koordinat tersebut berkaitan dengan sistim koordinat Cartesian (x,y,z) melalui persamaan transformasi

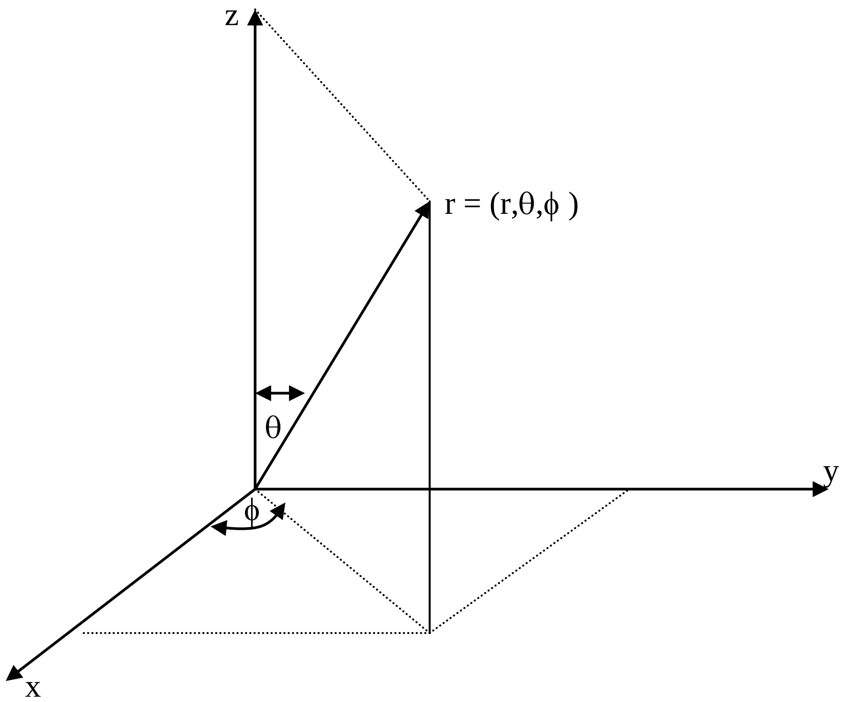
$$X = r\sin\theta\cos\phi \tag{8.78}$$

$$Y = r\sin\theta\sin\phi \tag{8.79}$$

$$Z = r\cos\phi \tag{8.80}$$

Berdasarkan transformasi tersebut maka komponen-komponen Cartesian adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\hat{L}_{X}&=\frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ \hat{L}_{X}&=\frac{\hbar}{i}\left[y\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial}{\partial r}\right)-z\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\phi}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right.\end{aligned} \tag{8.81}$$



Gambar 8.4 Transformasi koordinat Cartesian pada koordinat bola

Berdasarkan pers. (8.81) dan dengan bantuan gambar diatas diperoleh relasi-relasi berikut :

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\cos\theta = \frac{z}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\tan\phi = \frac{y}{x} \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\cos\phi\cos\theta}{r} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2}\cos^2\phi$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = -\frac{\sin\theta}{r} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\cos^2\phi}{x}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = -\frac{\sin\phi\cos\theta}{r} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{x}{r}$$

Dengan menggunakan relasi tersebut maka komponen dalam arah sumbu x dari momentum sudut orbital ditransformasikan pada sistim koordinat bola adalah

$$\hat{L}_X = \frac{\hbar}{i}\left\{ r\sin\theta\sin\phi\left(-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + 0 + \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) - r\cos\theta\left(\frac{\sin\phi\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{x}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{y}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right\}$$

$$\hat{L}_X = i\hbar\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cos\theta\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad (8.82)$$

Komponen $\hat{L}$ dalam arah sumbu y ialah :

$$\hat{L}_Y = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\hat{L}_Y = \frac{\hbar}{i}\left[z\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\right) - x\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]$$

$$\hat{L}_Y = \frac{\hbar}{i}\left[r\cos\theta\left(\frac{\cos\phi\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{y}{x^2}\cos^2\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\frac{x}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) - r\sin\theta\cos\phi\left(-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} + 0 + \frac{z}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]$$

$$\hat{L}_Y = i\hbar\left(-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \qquad (8.83)$$

Komponen $\hat{L}$ searah sumbu-z ialah:

$$\hat{L}_Z = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$\hat{L}_Z = \frac{\hbar}{i}\left[x\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\right) - y\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r}\right)\right]$$

$$\hat{L}_Z = \frac{\hbar}{i}\left[\begin{array}{l} r\sin\theta\cos\phi\left(\dfrac{\sin\phi\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} + \dfrac{\cos^2\phi}{x}\dfrac{\partial}{\partial\phi} + \dfrac{y}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\right) \\ -r\sin\theta\cos\phi\left(\begin{array}{l}\dfrac{\cos\phi\cos\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta} - \dfrac{y}{x^2}\cos^2\phi\dfrac{\partial}{\partial\phi} \\ +\dfrac{x}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\end{array}\right)\end{array}\right]$$

$$\hat{L}_Z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi} \qquad (8.84)$$

Operator momentum sudut orbital total dinyatakan dalam koordinat bola adalah sebagai berikut :

$$\hat{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right] \qquad (8.85)$$

Kita sekarang akan menentukan fungsi eigen $\varphi_{\ell m}$ dengan menggunakan teknik pertama. Solusi dari persamaan nilai eigen diatas dinamakan harmonik bola (*spherical harmonics*) dan secara umum dinotasikan oleh Y_ℓ^m. Sebelum kita bahas lebih jauh ada dua hal yang perlu kita perhatikan yaitu :

<u>Petama</u> operator-operator momentum angular bilamana dinyatakan dalam koordinat bola tidak bergantung pada r. Fungsi-fungsinya hanya bergantung pada variable (θ,ϕ). Hal tersebut berarti bahwa fungsi eigen-fungsi eigen dari operator $\hat{L}^2$ dan $\hat{L}_Z$ dapat dipilih tak bergantung pada r yaitu:

$$Y_\ell^m = Y_\ell^m(\theta,\phi) \tag{8.85}$$

<u>Kedua</u> fungsi eigen yang akan kita tentukan adalah fungsi eigen yang ternomalisasi yaitu :

$$\int\limits_{\substack{seluruh\\ ruang}} \left|Y_\ell^m\right|^2 dr = 1 \tag{8.86}$$

Persamaan nilai eigen untuk operator $\hat{L}_Z$ diungkapkan oleh

$$\frac{\partial}{\partial\phi} Y_\ell^m = imY_\ell^m \tag{8.87}$$

Persamaan tersebut hanya menentukan kebergantungan ϕ pada Y_ℓ^m misalkan:

$$Y_\ell^m(\theta,\phi) = \Theta_\ell^m(\theta)\Phi_m(\phi) \tag{8.88}$$

subtitusikan persamaan (8.88) ke persamaan (8.87) maka

$$\Theta_\ell^m(\theta)\frac{\partial\Phi_m(\phi)}{\partial\phi} = im\Theta_\ell^m(\theta)\Phi_m(\phi) \tag{8.89}$$

kemudian bagi kedua ruas dengan $\Theta_\ell^m(\theta)\Phi_m(\phi)$ maka

$$\frac{1}{\Phi_m(\phi)}\frac{\partial \Phi_m(\phi)}{\partial \phi} = im$$
$$\frac{\partial \Phi_m(\phi)}{\partial \phi} = im\Phi_m(\phi)$$
$$\frac{\partial \Phi_m(\phi)}{\Phi_m(\phi)} = im \ \partial\phi \tag{8.90}$$
$$\Phi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$$
$$m = 0,1,2,3....$$

Selanjutnya kita substitusikan pers (8.90) dan pers (8.85) kedalam pers (8.74):

$$-\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}\theta_\ell^m(\theta) = \hbar^2\ell(\ell+1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{im\phi}\Theta_l^m(\theta)$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta_\ell^m(\theta)}{d\theta}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]\Theta_\ell^m(\theta) = 0$$

misalkan

$$\mu = \cos\theta$$
$$d\mu = -\sin\theta\, d\theta$$
$$d\theta = \frac{1}{-\sin\theta}d\mu$$
$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\mu^2$$

substitusikan harga $d\theta$ dan $\sin^2\theta$ ke dalam pers (8.91) maka kita peroleh ungkapan dalam variable μ yaitu:

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\Theta}{d\theta}\right]+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]\Theta = 0 \tag{8.92}$$

dengan harga μ antara $-1 \le \mu \le 1$bila pada pers.(8.92) kita ambil harga m=0 dan harga ℓ maka persamaan tersebut menjadi

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\Theta_\ell}{d\mu}\right]+\lambda\Theta_\ell = 0 \tag{8.93}$$

Persamaan (8.93) dikenal dengan nama persamaan Legendre. P tersebut adalah persamaan nilai eigen dari operator $\frac{\hat{L}^2}{\hbar}$ nilai eigen λ. Solusi pers (8.93) dapat diperoleh dengan membentuk deret pangkat dari μ. Solusi deret tersebut terbatasi dalam interval $-1 \le \mu \le 1$ hal itu berakibat nilai eigen λ harus berbentuk $\ell(\ell+1)$ dimana ℓ dan berupa integer. Hal itu berarti kembali ke bentuk nilai eigen dari operator $\hat{L}_Z$ semula yaitu :

$$\hat{L}^2 = \hbar^2 \ell(\ell+1)$$

Solusi deret untuk Θ_ℓ terdiri dari sejumlah bilangan berhingga hal itu berarti bahwa Θ_ℓ adalah suatu polinomial berorde ℓ. Polinomial ini dinamakan *Legendre polimonial* yang dinyatakan dalam bentuk *formula Rodrigues* yaitu :

$$P_\ell(\mu) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{d\mu^\ell} (\mu^2 - 1)^\ell \tag{8.94}$$

Solusi persamaan (8.92) dan pers (8.93) diperoleh dengan *member associated Legendre Polynomials* yang didefinisikan oleh operator operator diferensial pada $P_\ell(\mu)$ berikut :

$$P_\ell^m(\mu) = (-1)^m (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m P_\ell(\mu)}{d\mu^m} \tag{8.95}$$

dengan $m \le \ell$ berupa integer positip

Diferensialkan persamaan Legendre pers.(8.93) sebanyak mk dan gantikan λ dengan $\ell(\ell+1)$ dan Θ_ℓ dengan P_ℓ maka

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_\ell^m}{d\mu}\right] + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right] P_\ell^m = 0 \tag{8.96}$$

Bila pers.(8.96) kita bandingkan dengan pers (8.92) maka $d\mu$ diindikasikan bahwa $P_\ell^m(\mu)$ adalah solusi dari persamaan yang sama. Persamaan itu juga tidak berubah bila diganti dengan –m, jadi dapat kita simpulkan bahwa $P_\ell^{-m}(\mu)$ adalah juga solusi dari persamaan tersebut.

Dengan demikian secara ringkas kita telah temukan bahwa solusi Θ_ℓ^m pada pers(8.92) diberikan oleh *associated Legendre Polynomial* $P_\ell^m(\mu)$. Sedangkan relasi yang tepat antara $\Theta_\ell^m(\mu)$ dan $P_\ell^m(\mu)$ diperoleh dari syarat normalisasi

$$\int_{4\pi} \left| Y_\ell^m \right|^2 dr = \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{e^{im\phi}}{\sqrt{2\pi}} \right|^2 \int_{-1}^{1} \left| \Theta_\ell^m \right| \tag{8.97}$$

karena $\int_{-1} d\mu \left| \Theta_\ell^m (\mu) \right|^2 = 1$

maka diperoleh:

$$\Theta_\ell^m (\mu) = \left[\frac{(2\ell + 1)(\ell - |m|)!}{2(\ell + |m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_\ell^m (\mu) \tag{8.98}$$

Substitusi pers.(8.90) dan (8.98) ke dalam (8.88) maka funsi eigen Y_ℓ^m menjadi:

$$Y_\ell^m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi} \left[\frac{(2\ell + 1)(\ell - |m|)!}{2(\ell + |m|)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_\ell^m (\mu) \tag{8.99}$$