1.35

INTEGRAL ELIPTIK, FUNGSI YANG SERING TERLUPAKAN, PADAHAL SANGAT BERGUNA DALAM FISIKA

A. Suhandi dan Y. R. Tayubi

Jurusan Pendidikan Fisika FPMIPA UPI, Jl. Dr. Setiabudhi No. 229 Bandung (40154)
e-mail : a-bakrie@yahoo.com

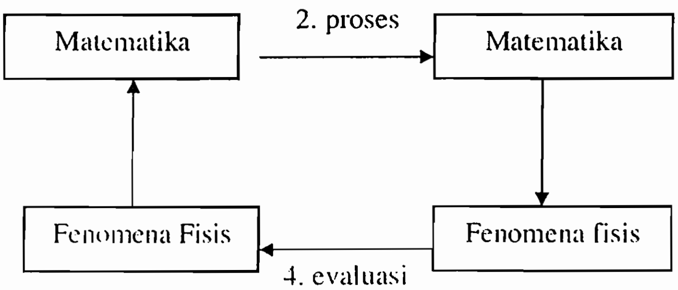
Abstrak

Paper ini memaparkan tentang integral eliptik, fungsi yang sering kali terlupakan, padahal sangat berguna dalam pembahasan persoalan-persoalan Fisika. Integral eliptik digolongkan kedalam fungsi khusus, karena integral ini tidak dapat dihitung dengan teknik-teknik integral dasar, melainkan solusinya dicari secara khusus dengan bantuan tabel integral eliptik. Terdapat beberapa bentuk integral eliptik, diantaranya integral eliptik bentuk Legendre dan bentuk Jacobi. Pada kedua bentuk ini terdapat dua macam integral eliptik, yaitu integral eliptik lengkap dan tak lengkap, yang masing-masing terbagi lagi menjadi dua jenis yaitu integral eliptik lengkap jenis pertama dan kedua dan integral eliptik tak lengkap jenis kesatu dan kedua. Pada paper ini pembahasan dibatasi pada integral eliptik lengkap. Integral ini kerap kali muncul dalam pembahasan fenomena Fisika, sehingga apabila tidak kuasai dengan baik, maka tentu akan membatasi kemampuan analisis fenomena Fisika tersebut secara lebih mendalam. Untuk menunjukkan pentingnya integral eliptik dalam Fisika, pada paper ini juga disajikan beberapa ilustrasi aplikasi integral eliptik dalam penyelesaian persoalan fisika. Persoalan Fisika yang ditinjau terkait persoalan-persoalan listrik-magnet dan mekanika, yang biasanya dihindari dan jarang dimunculkan dalam pembahasan akibat kurang dikuasainya integral eliptik.

Kata kunci : Integral eliptik, Fungsi Khusus, Persoalan Fisika

A. PENDAHULUAN

Dalam Fisika, matematika dipandang sebagai bahasa untuk mempelajari ilmu fisika. Analisis fenomena Fisis biasanya berujung pada rumusan matematis yang merefresentasikan mekanisme fisis dari fenomena. Bentuk hubungan antara variabel-variabel yang tercakup dalam suatu fenomena dapat ditemukan hanya jika solusi dari perumusan matematika tersebut dapat ditemukan. Bisa tidaknya solusi persamaan fisis dapat ditemukan, bergantung pada seberapa jauh dan luas teknik-teknik dan metode-metode matematika yang dikuasai. Seringkali solusi persamaan fisis tidak ditemukan akibat terbatasnya penguasaan teknik matematika, atau kalaupun dapat ditemukan itu dengan banyak melakukan pengidealan. Secara sederhana, model yang menggambarkan tentang bagaimana matematika digunakan dalam mengkaji suatu fenomena fisika ditunjukkan pada Gambar 1 (Redish, 2005).



Gambar 1. Model penggunaan matematika dalam sains (fisika)

Sebagai ilustrasi, berdasarkan hasil pengkajian terhadap buku-buku kelistrikan dan kemagnetan baik untuk level sekolah menengah maupun level universitas, penggunaan hukum Biot-Savart masih terbatas untuk perhitungan kuat medan magnet di sekitas kawat konduktor yang bentuk geometrinya sederhana saja seperti kawat berbentuk lurus, kawat berbentuk lingkaran, atau superposisi dari kedua bentuk ini. Kemungkinan besar ini terjadi karena adanya faktor kerumitan dalam perhitungan matematika secara analitik untuk bentuk geometri yang lain. Padahal sebenarnya untuk level universitas, contoh-contoh penggunaan hukum Biot-Savart ini bisa lebih diperluas lagi dengan meninjau bentuk-bentuk geometri kawat konduktor yang lain seperti kawat berbentuk elips, parabola, maupun hiperbola. Karena untuk level ini, mereka telah mendapat teknik-teknik matematika yang cukup luas, seperti misalnya tentang fungsi khusus yang didalamnya tercakup integral eliptik yang dapat digunakan untuk kepentingan analisis pada persoalan-persoalan tersebut, yakni pada mata perkuliahan Fisika Matematika. Namun sayangnya dosen pengampu mata kuliah listrik-magnet sering kali melupakan teknik integral ini sehingga penggunaan hukum Biot-Savart menjadi sangat terbatas seperti itu. Untuk mengingatkan kembali akan pentingnya salah satu teknik matematika yaitu integral eliptik, pada paper ini dipaparkan tentang hasil kajian tentang integral eliptik dan contoh penggunaannya dalam Fisika.

B. PEMBAHASAN

1. Integral eliptik lengkap jenis pertama dan kedua

Integral eliptik lengkap jenis pertama dan kedua dirumuskan dalam bentuk Legendre sebagai berikut (Boas, 1983).

$$F(k,\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \qquad (1.a)$$

$$E(k,\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,d\phi \qquad (1.b)$$

Karena k terbatas pada interval (0,1), maka nilai θ = arc sin k hanya terbatas pada interval (0, π/2). Akan tetapi nilai ϕ tidak terbatas seperti θ, dan dapat bernilai positif atau negatif. Karena biasanya pada tabel integral eliptik lengkap hanya terbatas untuk harga ϕ antara 0 dan π/2, maka perlu pengetahuan tambahan untuk mencari harga F (k, π/2) dan E (k, π/2) untuk harga-harga ϕ lainnya. Dalam bentuk Jacobi integral eliptik lengkap jenis pertama dan kedua dirumuskan sebagai berikut : (Boas, 1983)

$$F(k,\frac{\pi}{2}) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (2.a)$$

$$E(k,\frac{\pi}{2}) = \int_0^1 \sqrt{\frac{(1-k^2x^2)}{(1-x^2)}}\,dx \qquad (2.b)$$

Bentuk ini merupakan translasi dari bentuk Legendre dengan mengambil x = sin ϕ.

2. Aplikasi integral eliptik untuk menghitung kuat medan magnet di pusat kawat konduktor berbentuk elips

Dengan menggunakan hukum Biot-Savart, kontribusi medan magnet (**dB**) yang ditimbulkan oleh setiap elemen arus listrik pada suatu titik yang ditinjau dapat dihitung dengan menggunakan persamaan 3 (Haliday et. al., 1993).

$$dB = \frac{\mu_o i}{4\pi}\frac{dl\sin\theta}{r^2} \qquad (3)$$

dimana **r** adalah vektor pergeseran dari elemen kawat yang mengangkut arus listrik tersebut ke titik P, dan θ adalah sudut diantara vektor ini dengan elemen panjang kawat penghantar **dl**. i adalah kuat arus listrik dan μ_o adalah permeabilitas vakum. Arah **dB** adalah arah vektor **dl** x **r**. Hukum Biot-Savart dapat juga ditulis dalam notasi vektor seperti pada persamaan 4.

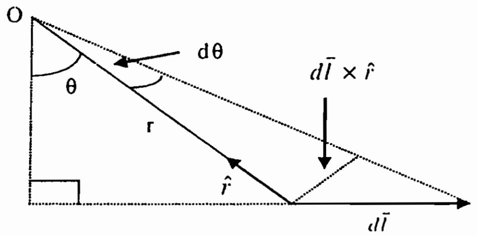
$$d\vec{B} = \frac{\mu_o i}{4\pi}\frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \qquad (4)$$

dan resultan medan magnet di titik yang ditinjau dapat dihitung dengan cara mengintegrasikan persamaan di atas teerhadap seluruh distribusi arus listrik. seperti pada persamaan 5.

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_o i}{4\pi}\oint\frac{d\vec{l} \times \hat{r}}{r^2} \qquad (5)$$

integral ini merupakan integral vektor sepanjang kawat konduktor.

Persamaan (5) dapat diubah dalam sistem kordinat polar (r,θ) dan persamaan yang merepresentasikan bentuk kurva dinyatakan dalam r = r (θ), dimana θ adalah sudut polar. Untuk melakukan perubahan sistem koordinat tersebut dapat dilakukan dengan bantuan skema seperti pada Gambar 2.



Gambar 2. Skema hubungan antar sistem koordinat polar dan koordinat kartesis

Dari Gambar 2 dapat dianalisis bahwa ;

$$rd\theta = dl\cos\theta = \left|d\vec{l} \times \hat{r}\right|$$

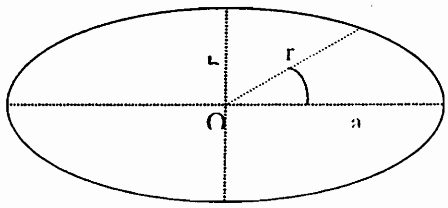
atau
$$d\theta = \frac{\left|d\hat{l} \times \hat{r}\right|}{r} \qquad (6)$$

dengan demikian dalam sistem koordinat polar persamaan (6) dapat ditulis menjadi :

$$B = \frac{\mu_o i}{4\pi}\oint\frac{d\theta}{r} \qquad (7)$$

Persamaan (7) ini merupakan persamaan yang cukup sederhana tetapi cukup kompak. yang akan digunakan untuk perhitungan kuat medan magnet di pusat berbagai bentuk geometri kawat konduktor.

Tinjau sebuah konduktor berbentuk elips yang dialiri arus listrik sebesar I seperti pada Gambar 3.



Gambar 3. Kawat berbentuk elips yang pusatnya di O dengan panjang sumbu mayor 2a dan panjang sumbu minor 2b.

karena sumbu mayor sejajar dengan sumbu x, maka persamaan dalam koordinat polar untuk kawat elips seperti itu adalah : (Miranda, 2000)

$$r(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}} \tag{8}$$

sehingga jika persamaan (4) diterapkan untuk kasus ini, akan didapat,

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi}\oint \frac{d\theta\sqrt{a\ \cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}}{ab}$$

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta\sqrt{\cos^2\theta + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\theta}}{b}$$

$$B = \frac{\mu_o I}{4\pi}4\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta\sqrt{(1-\sin^2\theta) + \frac{b^2}{a^2}\sin^2\theta}}{b}$$

$$B = \frac{\mu_o I}{\pi b}\int_0^{\pi/2} d\theta\sqrt{1-k^2\sin^2\theta} \tag{9}$$

dimana $k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$

Jika kita amati integral pada persamaan (9) adalah persis sama dengan persamaan (1.b) yang tak lain adalah integral eliptik lengkap jenis pertama dari bentuk Legendre. Nilai integral ini sangat tergantung dari nilai k atau dari nilai a dan b. Untuk menghitung integral ini dapat digunakan tabel integral eliptik lengkap (Spiegel, 1993), dengan ketentuan bahwa $k = \sin\psi$. Ilustrasi hasil perhitungan $B/\mu_o I$ untuk beberapa harga a dan b tertentu, dengan menganggap arus listrik yang mengalir pada kawat elips tersebut adalah I dan permeabilitas vakum adalah μ_o dapat dilihat pada Tabel 1.

Tabel 1. Ilustrasi hasil perhitungan $B/\mu_o I$ untuk beberapa harga a dan b

b	a	k	Ψ	E	$B/\mu_o I$
1.000	1.000	0.000	0.000	1.571	50.026
	2.000	0.866	60.000	1.211	38.570
	4.000	0.968	75.523	1.072	34.150
	8.000	0.992	82.819	1.023	32.589
	12.00	0.997	85.220	1.012	32.223
	16.00	0.998	86.417	1.007	32.076
	24.00	0.999	87.612	1.004	31.962
	32.00	0.9995	88.209	1.002	31.917
	40.00	0.9997	88.568	1.001	31.892

Untuk mengecek kebenaran hasil yang diperoleh dari perhitungan, marilah kita melakukan pengecekan dengan cara meninjau kasus-kasus khusus untuk dihitung secara trivial. Pertama kita tinjau kasus untuk harga a = b, yang berarti bentuk elips telah berubah menjadi bentuk lingkaran. Kuat medan magnet di pusat kawat berbentuk lingkaran dapat dihitung dengan menggunakan persamaan sebagai berikut : (Haliday et. al., 1993)

$$B = \frac{\mu_o I}{2R}$$

Misalkan secara spesifik kita ambil contoh a = b = 1 cm, maka akan didapat :

$$\frac{B}{\mu_o I} = \frac{1}{2R} = \frac{1}{2(0.01)} = \frac{1}{0.02} = 50$$

hasil ini sangat cocok dengan hasil yang diperoleh dengan menggunakan integral eliptik, seperti terlihat pada Tabel 1.
Kedua kita tinjau kasus untuk a >>> b, yang berarti sumbu mayor sangat jauh lebih besar dari sumbu minor elips. Untuk kasus ini, elips dapat dipandang sebagai dua kawat lurus sejajar yang sangat panjang, dan kuat medan magnet di pusatnya dapat dipandang sebagai penjumlahan dari medan magnet yang ditimbulkan oleh kedua kawat lurus ini yang dapat dihitung dengan menggunakan persamaan : (Haliday et. al., 1993)

$$\frac{B}{\mu_o I} = \frac{2}{2\pi r}$$

Karena r = b, maka
$$\frac{B}{\mu_o I} = \frac{1}{\pi b}$$

dan jika kita ambil contoh spesifik, misalnya b = 1 cm dan a = 40 cm, maka akan diperoleh :

$$\frac{B}{\mu_o I} = \frac{1}{(3.14\times 0.01)} = \frac{1}{0.0314} = 31.8$$

angka ini sangat mendekati hasil perhitungan dengan integral eliptik seperti yang tercantum dalam Tabel 1. Kedua contoh solusi trivial yang begitu cocok dengan hasil perhitungan yang menggunakan integral eliptik ini, menunjukkan tingkat keakuratan yang cukup tinggi dari penggunaan integral eliptik untuk menghitung kuat medan magnet di pusat kawat konduktor berbentuk elips. Dengan demikian tidak perlu ada keraguan lagi dari penggunaannya.

3. Aplikasi integral eliptik untuk menghitung periode ayunan bandul sederhana untuk kasus simpangan besar

Dalam buku-buku teks fisika dasar, peninjauan persoalan gerak bandul selalu dibatasi untuk amplitudo kecil, sehingga persamaan geraknya dapat memenuhi persamaan gerak harmonik sederhana seperti berikut : (D. Halliday, 1993)

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\sin\theta \cong \ddot{\theta} + \omega_o^2\theta = 0 \qquad (10)$$

disini telah diasumsikan bahwa untuk sudut kecil berlaku sin θ ≈ θ, dan $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$

dengan anggapan ini maka periode ayunan bandul dianggap tetap dan tidak bergantung pada amplitudo. Pendekatan ini tidak akan berlaku untuk sudut simpangan besar karena sin θ ≠ θ, dan sebagai akibatnya diprediksi akan terdapat kebergantungan nilai periode bandul terhadap besarnya sudut simpangan maksimum (amplitudo).

Untuk sudut simpangan besar, maka persamaan gerakn bandul adalah :

$$\ddot{\theta} + \frac{mgl}{I}\sin\theta = \ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \qquad (11)$$

Karena bentuk pergerakan bandul yang diinginkan adalah gerak osilasi dan tidak terjadi rotasi (yakni, tidak memiliki cukup energi untuk melewati titik tertinggi (θ = π), maka harus ada suatu sudut maksimum θ_{max} sebagai sudut simpangan terbesar agar bandul masih bergerak secara osilasi. Pada posisi sudut maksimum tersebut berlaku dθ/dt=0, sehingga pada posisi tersebut seluruh energi merupakan energi potensial. Menurut hukum kekekalan energi mekanik, pada sembarang sudut berlaku : (Lewowski dan Wozniak, 2002)

$$T(\theta)+V(\theta)=T(\theta_{max})+V(\theta_{max}) \qquad (12)$$

dengan demikian,
$$\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - mgl\cos\theta = -mgl\cos\theta_{max} \qquad (13)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2mgl}{I}}(\cos\theta - \cos\theta_{max})^{1/2} \qquad (14)$$