Bab 5

MATRIK SPIN

1.1 Matrik-matrik momentum sudut.

Dalam Bab 4 Anda telah mempelajari representasi matrik dari sebuah operator. Di dalam Bab 4 tersebut telah dijelaskan bahwa representasi matrik (penulisan dalam bentuk matrik) dari sebuah operator A dalam basis-basis yang terdiri dari eigenvektor-eigenvektor A adalah berbentuk *matrik diagonal*. Artinya semua elemen matrik dari operator A itu adalah nol kecuali elemen matrik a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, ……, a_{nn} (elemen matrik dalam arah diagonal). Untuk mengingatkan kembali marilah kita ambil contoh operator-operator momentum sudut L^2 dan L_z. Di dalam koordinat bola, L^2 dan L_z memiliki eigenfuncntion (fungsi eigen/fungsi yang tepat) $Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)$, dimana ℓ dan m masing-masing adalah bilangan kuantum orbit dan bilangan kuantum magnetik, ϑ dan φ adalah sudut-sudut polar. Eigenfuncntion $Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)$ ini adalah merupakan basis yang dimaksud di atas. Perhatikan bahwa eigenvektor diartikan sama dengan eigenfuncntion. Elemen-elemen matrik dari L^2 dan L_z biasa diberi simbol masing-masing dengan huruf $L^2_{\ell m,\ell' m'}$ dan $(L_z)_{\ell m,\ell' m'}$. Sebagai contoh marilah kita hitung elemen matrik $L^2_{\ell m,\ell' m'}$. Di dalam himpunan basis { $Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)$ } elemen-elemen matrik $L^2_{\ell m,\ell' m'}$ dapat dihitung sebagai beriktut:

$$L^2_{\ell m,\ell' m'} = \langle \ell m | L^2 | \ell' m' \rangle = \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi\, Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)^* \quad L^2 \quad Y_{\ell'}^{m'}(\vartheta,\varphi)$$

$$L^2_{lm,l'm'} = \hbar^2\, \ell(\ell+1)\ \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'} \qquad , \qquad (1)$$

dimana $\delta_{\ell\ell'}$ dan $\delta_{mm'}$ adalah fungsi delta Kronecker yang nilainya adalah sebagai berikut:

$\delta_{\ell\ell'}$ = 1 jika $\ell = \ell'$
$\delta_{\ell\ell'}$ = 0 jika $\ell \neq \ell'$
$\delta_{mm'}$ = 1 jika m = m’
$\delta_{mm'}$ = 0 jika m ≠ m’.

Jadi, persamaan (1) hanya akan bernilai $\hbar^2\ \ell(\ell+1)$ jika dan hanya jika $\ell = \ell'$ dan m = m’. Artinya, nomor kolom sama dengan dengan nomor baris. Dengan demikian, elemen-elemen matrik yang bernilai $\hbar^2\ \ell(\ell+1)$ adalah mereka yang terletak pada garis diagonal matrik tersebut. Karena itu matrik L^2 disebut matrik diagonal.

Demikian halnya dengan matrik L_z. Element-elemen matrik $(L_z)_{\ell m,\ell' m'}$ dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut:

$$(L_z)_{\ell m,\ell' m'} = \langle \ell m | \ L_z \ | \ell' m' \rangle = \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi\, Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)^* \ L_z \ Y_{\ell'}^{m'}(\vartheta,\varphi)$$

$$(L_z)_{\ell m,\ell' m'} = m\hbar\ \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'} \qquad (2)$$

sehingga elemen-elemen matrik yang bernilai $m\hbar$ adalah mereka yang terletak pada garis diagonal, sedangkan elemen-elemen matrik lainnya adalah nol.

Cara menuliskan elemen matrik dari sebuah matrik adalah sebagai berikut : baris-baris dan kolom-kolom sebuah matrik disusun sedemikian rupa sehingga untuk setiap nilai ℓ, m bernilai mulai dari $-\ell$ sampai $+\ell$ dengan selang 1. Demikian pula m'. Untuk setiap nilai ℓ', m' bernilai muali dari $-\ell'$ sampai $+\ell'$ dengan selang 1. Dalam hal ini m menyatakan baris dan m' menyatakan kolom dari matrik tersebut.

Contoh :

1. untuk $\ell = 0$ dan $\ell' = 0$, nilai m = m' = 0, sehingga matrik $L^2 = [0]$.
2. Untuk $\ell = 1$ dan $\ell' = 1$, maka nilai m = -1, 0, +1. Dan juga nilai m' = -1, 0, +1. Nilai elemen matrik $L^2_{\ell m,\ell' m'}$ adalah:

$L^2_{\ell m,\ell' m'} = \hbar^2\ \ell(\ell+1)\ \delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'} = 2\ \hbar^2$. Jadi matrik L^2 dapat ditulis dalam bentuk matrik sebagai berikut :

$$L^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ingatlah bahwa nilai m menyatakan baris, dan m' menyatakan kolom. Elemen-elemen matrik L^2 tersebut dihitung dengan menggunakan persamaan (1).

Contoh: element matrik $L^2_{11,11} = \hbar^2\ \ell(\ell+1)\,\delta_{\ell\ \ell'}\ \delta_{mm'}$.

$= \hbar^2\ 1(1+1)\,\delta_{11},\,\delta_{11}. = 2\hbar^2$.

Dalam contoh ini, nilai $\delta = 1$, karena $\ell = \ell'$, dan m = m'.

Contoh lainnya adalah elemen matrik $L^2_{10,11}$. Dengan menggunakan persamaan (1) Anda dapat menentukan nilai elemen matrik $L^2_{10,11}$ sebagai berikut :

$L^2_{10,11} = \hbar^2\ \ell(\ell+1)\,\delta_{11}\,\delta_{01}$.

$= \hbar^2 \times 1 \times (1+1) \times 1 \times 0 = 0$. (catatan: x = operator kali).

Perhatikan dengan teliti urutan indek untuk kedua δ dan indek untuk L^2.

Latihan:

1. Buktikan nilai elemen-elemen matrik lainnya.
2. Tentukan elemen-elemen matrik L^2 untuk $\ell = 2$ dan $\ell' = 2$. Petunjuk untuk menjawab soal-soal latihan ini adalah sebagai berikut:
   1. tentukan nilai-nilai m dan m'.
   2. gunakan persamaan (1) untuk menghitung elemen-elemen matrik $L^2_{\ell m,\ell' m'}$.

Perhatikan bahwa elemen-elemen matrik yang bernilai tidak sama dengan nol adalah elemen-elemen matrik yang terletak pada diagonal matrik tersebut. Karena itu, matrik L^2 disebut matrik diagonal.

Dari contoh-contoh dan jawaban soal-soal latihan di atas, Anda dapat menyusun sebuah tabel untuk elemen-elemen matrik $L^2_{\ell m,\ell' m'}$. Tabel tersebut akan tampak sebagai berikut:

	ℓ	m									
ℓ' ➡	⬇	⬇	0	1	1	1	2	2	2	2	2
m' ➡			0	1	0	-1	2	1	0	-1	-2
	0	0	0								
	1	1		$2\hbar^2$	0	0			0		
	1	0		0	$2\hbar^2$	0					
	1	-1		0	0	$2\hbar^2$					
	2	2					$6\hbar^2$	0	0	0	0
	2	1					0	$6\hbar^2$	0	0	0
	2	0		0			0	0	$6\hbar^2$	0	0
	2	-1					0	0	0	$6\hbar^2$	0
	2	-2					0	0	0	0	$6\hbar^2$

Catatan: angka nol yang dicetak besar menyatakan matrik-matrik yang semua elemennya bernilai nol.

Selanjutnya marilah kita bahas elemen matrik $(L_z)_{lm,l'm'}$, seperti yang ditunjukan oleh persamaan (2) di atas. Marilah kita ambil contoh untuk $\ell = \ell' = 0$, dan untuk $\ell = \ell' = 1$.

1. Matrik elemen $(L_z)_{lm,l'm'}$ untuk $\ell = \ell' = 0$.

   Jika $\ell = 0$, maka m = 0, sehingga:
   Elemen matrik $(L_z)_{lm,l'm'} = (L_z)_{00,00} = m\ \hbar\ \delta_{00}.\ \delta_{00}$.

   Meskipun nilai kedua $\delta = 1$, tetapi karena nilai m = 0, maka

   $$(L_z)_{lm,l'm'} = (L_z)_{00,00} = 0.$$

2. Matrik elemen $(L_z)_{lm,l'm'}$ untuk $\ell = \ell' = 1$.

   Karena $\ell = \ell' = 1$, maka nilai m = -1, 0, 1 dan nilai m'= -1, 0, 1 sehingga banyaknya elemen matrik yang dapat diperoleh adalah 9 buah, yaitu sebagai berikut :

   a. Baris ke 1: $(L_z)_{11,11}$, $(L_z)_{10,11}$, $(L_z)_{1(-1),11}$.
   b. Baris ke 2: $(L_z)_{11,10}$, $(L_z)_{10,10}$, $(L_z)_{1(-1),10}$.
   c. Baris ke 3: $(L_z)_{11,1(-1)}$, $(L_z)_{10,1(-1)}$, $(L_z)_{1(-1),1(-1)}$.

   Perhatikan bahwa indek yang bernilai negatif disimpan di dalam tanda kurung (…). Dengan menggunakan persamaan (2) di atas kita dapat menghitung ke 9 elemen matrik tersebut. Sebagai contoh, marilah kita hitung elemen matrik $(L_z)_{11,11}$. Untuk elemen matrik ini kita tahu bahwa nilai $\ell = \ell' = 1$, dan nilai m = m' = 1 sehingga elemen matrik ini dapat dihitung sebagai berikut:

   $$(L_z)_{11,11} = m\ \hbar\ \delta_{11} . \delta_{11} = \hbar .$$

Sebagai contoh yang lain, marilah kita hitung elemen matrik $(L_z)_{10,1(-1)}$. Untuk elemen matrik ini kita tahu bahwa nilai $\ell = \ell' = 1$, dan m = 0, m' = -1 sehingga:
$(L_z)_{10,1(-1)} = m\ \hbar\ \delta_{11}.\delta_{0(-1)}$.
Disamping m = 0, juga $\delta_{0(-1)} = 0$, sehingga nilai elemen matrik $(L_z)_{10,1(-1)} = 0$.

Latihan:
Hitunglah ketujuh elemen matrik lainnya untuk $\ell = \ell' = 1$ dari matrik L_z tersebut di atas.
<u>Petunjuk</u>:

1. Tentukan nilai-nilai ℓ, m, ℓ', dan m' untuk setiap elemen matrik .
2. Gunakan persamaan (2) di atas.

Apabila Anda dapat menjawab soal latihan ini dengan benar, maka Anda akan dapat menuliskan matrik L_z sebagai berikut:

$$L_z = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Latihan:
Tentukanlah nilai-nilai elemen matrik L_z untuk $\ell = \ell' = 2$ serta tuliskan semua nilai matrik tersebut dalam bentuk sebuah matrik L_z.
<u>Petunjuk</u>:

1. Tentukan nilai-nilai m dan m'.
2. Gunakan persamaan (2).
3. Susun semua elemen matrik dalam sebuah matrik dengan ketentuan m = nomor baris, dan m' = nomor kolom.

Secara umum, semua elemen matrik $(L_z)_{lm,l'm'}$ untuk matrik L_z dapat dirangkum dalam sebuah tabel seperti di bawah ini:

	ℓ	m									
ℓ'			0	1	1	1	2	2	2	2	2
m'			0	1	0	-1	2	1	0	-1	-2
	0	0	0								
	1	1		$1\hbar$	0	0					
	1	0		0	$1\hbar$	0			0		
	1	-1		0	0	$-1\hbar$					
	2	2					$2\hbar$	0	0	0	0
	2	1					0	$1\hbar$	0	0	0
	2	0					0	0	0	0	0
	2	-1		0			0	0	0	$-\hbar$	0
	2	-2					0	0	0	0	$-2\hbar$

Selanjutnya marilah kita hitung matrik L_x dan L_y yang merupakan komponen dari marik L. Untuk menghitung matrik-matrik L_x dan L_y di dalam basis tersebut di atas Anda dapat menggunakan matrik-matrik untuk operator L_+ dan L_-, yaitu sebagai berikut:

$L_x = ½ (L_+ + L_-)$ dan $L_y = - i/2 (L_+ - L_-)$ (3).

Jadi tugas kita adalah menentukan matrik-matrik untuk L_+ dan L_-. Tetapi karena $L_+ = L_-^*$ (Baca : L_+ sama dengan ajoin/sekawan dari L_-) maka kita cukup menentukan salah satu matrik saja, yaitu L_+ saja atau L_- saja.

Di dalam Bab 4 Anda telah mempelajari hubungan antara elemen matrik-matrik $(L_+)_{\ell m, \ell' m'}$ dan $(L_-)_{\ell m, \ell' m'}$ dengan fungsi gelombang Y_ℓ^m, yaitu sebagai berikut:

$$(L_\pm)_{\ell m, \ell' m'} = \{(\ell' \mp m')(\ell' \pm m' + 1)\}^{1/2}\ \hbar\ \delta_{\ell \ell'}\delta_{mm'\pm 1} \qquad (4)$$

Contoh: untuk $\ell = 1$ dan $\ell' = 1$ tentukanlah elemen-elemen matrik $(L_+)_{11,11}$, $(L_+)_{11,10}$, $(L_-)_{10,11}$, dan $(L_-)_{10,10}$.

Jawab:

Untuk $\ell = 1$ dan $\ell' = 1$ berarti m = -1, 0, 1 dan m' = -1, 0, 1. Karena kita hanya diminta untuk menghitung elemen matrik matrik $(L_+)_{11,11}$, $(L_+)_{11,10}$, $(L_-)_{10,11}$, dan $(L_-)_{10,10}$ saja, maka nilai-nilai m dan m' yang terlibat hanya 1 dan 0 saja. (Silahkan amati nilai indek dari setiap elemen matrik tersebut). Dengan demikian, elemen-elemen matrik tersebut di atas dapat kita hitung sebagai berikut:

a. $(L_+)_{11,11} = \{(1-1)(1+1+1)\}^{1/2}\ \hbar\ \delta_{11}.\delta_{12}.$
$= 0.$

Perhatikan bahwa nilai elemen matrik $(L_+)_{11,11}$ sama dengan nol tidak hanya disebabkan oleh (1-1) saja, tetapi juga kerana nilai delta δ_{12} yang juga sama dengan nol.

b. $(L_+)_{11,10} = \{(1- 0)(1 + 0 + 1)\}^{1/2}\ \hbar\ \delta_{11}.\delta_{11}.$
$= \hbar\sqrt{2}\,.$

c. $(L_-)_{10,11} = \{(1 + 1)(1 - 1 + 1)\}^{1/2}\ \hbar\ \delta_{11}.\delta_{00}.$
$= \hbar\sqrt{2}\,.$

d. $(L_-)_{10,10} = \{(1+0)(1-0 + 1)\}^{1/2}\ \hbar\ \delta_{11}.\ \delta_{0(-1)}\ .$
$= 0,$ karena $\delta_{0(-1)} = 0.$

Apabila Anda menghitung semua elemen matrik $(L_+)_{\ell m, \ell' m'}$ untuk $\ell = 1$ dan $\ell' = 1$, serta menuliskannya dalam bentuk matrik, maka Anda dapat menulis operator L_+ dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$L_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Demikian juga halnya dengan operator L_-. Cobalah hitung semua elemen matrik $(L_-)_{\ell m, \ell' m'}$ untuk $\ell = 1$ dan $\ell' = 1$ dengan menggunakan persamaan (4) dan contoh di atas, kemudian tuliskan pula matrik L_-. Jika Anda menghitungnya dengan benar, maka matrik L_- tersebut akan tampak sebagai berikut :

$$L_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Akhirnya kita dapat menentukan matrik L_x dan L_y dengan menggunakan persamaan (3), (5), dan (6) di atas. Dengan menggunakan ketiga persamaan tersebut kita dapat menghitung matrik L_x dan L_y sebagai berikut :

a. $L_x = ½ (L_+ + L_-)$

$$L_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Perhatikan bahwa kita telah menyederhanakan penulisan *tanda akar* untuk semua elemen matrik. Hal ini karena $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b. $L_y = -\frac{i}{2}\,(L_+ - L_-)$

$$L_y = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Perhatikan bahwa $-\frac{i}{2} = +\frac{1}{2i}$.

1.2 Matrik-matrik spin Pauli.

Seperti kita ketahui bahwa momentum sudut suatu partikel dapat dibagi menjadi dua, yaitu ***momentum sudut orbit (*** $\vec{L}$ ***)*** dan ***momentum sudut intrinsik (*** $\vec{S}$ ***)*** atau sering disebut ***spin***. Kita baru saja membahas representasi momentum sudut $\vec{L}$ dalam bentuk matrik. Sekarang kita akan membicarakan representasi Spin ($\vec{S}$) dalam bentuk matrik, serta akan mendifinisikan matrik spin Pauli (σ).

Vektor momentum sudut spin sering ditandai dengan simbol $\vec{S}$ (Perhatikan tanda vektor). Sifat-sifat dari operator mementum sudut spin S (Tanpa tanda vektor) adalah sama dengan sifat-sifat untuk momentum sudut orbit. Sebagai contoh, hubungan komutatif antara komponen-komponen S_x, S_y, dan S_z memenuhi aturan berikut:

$[S_x, S_y] = i\hbar\ S_z$; $[S_y, S_z] = i\hbar\ S_x$; $[S_z, S_x] = i\hbar\ S_y$.

Disamping itu, seperti halnya untuk momentum sudut L, kita juga dapat mendefinisikan operator-operator S_+ dan $S\_$ untuk momentum sudut spin, yaitu sebagai berikut :

$$S_{\pm} = S_x \pm i S_y . \qquad (9)$$

Demikian pula halnya dengan persamaan eigenvalue-nya. Kita juga dapat menuliskan persamaan eigenvalue untuk spin sebagai berikut:

$$S^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 s (s + 1) |s, m_s\rangle \text{ ; dan } S_z |s, m_s\rangle = \hbar m_s |s, m_s\rangle . \qquad (10)$$

Perhatikan bahwa nilai-nilai $\hbar^2 s (s + 1)$ dan $\hbar m_s$ masing-masing disebut *eigenvalue* dari S^2 dan S_z. Sedangkan vektor $|s, m_s\rangle$ disebut *eigenvektor* dari S^2 dan S_z.

Untuk sebuah nilai s tertentu, nilai m_s adalah mulai dari –s sampai +s dengan selang +1. Sebagai contoh, untuk s = 1, maka nilai m_s = -1, 0, dan 1. Untuk nilai s = 2, maka nilai m_s = -2, -1, 0, 1, dan 2. Untuk s = 5/2, maka nilai m_s = -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, dan 5/2.

Contoh partikel yang memiliki nilai spin s = 0 adalah *meson*, dan partikel yang memiliki spin s = 1 adalah *foton*. Sedangkan partikel-partikel yang memiliki nilai spin s = ½ adalah: *elektron*, *proton*, dan *netron*.

Selanjutnya marilah kita pelajari fungsi eigen (eigenfuction/eigenstate) untuk partikel yang memiliki spin ½, seperti elektron, proton, dan netron. Karena partikel-partikel tersebut memiliki spin = ½ , maka m_s bernilai – ½ dan + ½ . Selanjutnya marilah kita definisikan fungsi eigen untuk s = ½ , m_s = ½ dan s = ½ , m_s = - ½ sebagai berikut :

$$\alpha = |s, m_s\rangle = \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle \text{ dan}$$

$$\beta = |s, m_s\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle . \qquad (11)$$

Dengan demikian kita dapat menuliskan persamaan eigenvalue untuk S^2 dan S_z sebagai berikut:

$$S^2\,\alpha = \tfrac{3}{4}\,\hbar^2\,\alpha \text{ ;} \qquad S_z\,\alpha = \hbar/2\ \alpha.$$
$$S^2\,\beta = \tfrac{3}{4}\,\hbar^2\,\beta \text{ ;} \qquad S_z\,\beta = -\hbar/2\ \beta.$$

Operator-operator S_+ dan $S\_$ dalam fungsi eigen α dan β dapat ditulis sebagai berikut:

$$S_+ |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s+1)}\ |s, m_s+1\rangle \qquad (12)$$

$$S\_ |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s-1)}\ |s, m_s-1\rangle . \qquad (13)$$

Untuk s = ½ , kita punya m_s = ½ dan m_s = - ½ . Jika nilai-nilai ini kita substitusikan ke dalam persamaan (12) dan (13), maka kita akan memperoleh persamaan untuk S_+ dan S_ sebagai berikut:

a. untuk s = ½ dan m_s = ½ .

$$(S_x + iS_y)\alpha = S_+ \; |½,½\rangle \; = \; 0; \text{ karena nilai di dalam akar = 0.} \qquad (14)$$

$$(S_x - iS_y)\alpha = S\_ \; |½,½\rangle \; = \; \hbar\,|½,-½\rangle \; = \; \hbar \; \beta. \qquad (15)$$

Jika persamaan (14) dan (15) di atas kita jumlahkan, maka kita akan memperoleh persamaan (bukan persamaan eigenvalue, karena vektor sebelah kiri adalah α sedangkan di ruas kanan adalah β) berikut:

$$S_x\,\alpha = (½)\,\hbar\,\beta, \qquad (16)$$

Dan jika kedua persamaan tersebut kita kurangkan maka kita akan memperoleh persamaan (juga bukan persamaan eigenvalue, karena vektor sebelah kiri adalah α sedangkan di ruas kanan adalah β):

$$S_y\,\alpha = (i/2)\,\hbar\,\beta. \qquad (17)$$

b. untuk s = ½ dan m_s = - ½ .

$$(S_x + iS_y)\beta = S_+ \; |½,-½\rangle = \; \hbar\,|½,½\rangle \; = \; \hbar \; \alpha, \text{ dan} \qquad (18)$$

$$(S_x - iS_y)\beta = S\_\,|½,-½\rangle = 0 \; ; \text{ Karena nilai di dalam akar = 0.} \qquad (19)$$

Jika kedua persamaan ini dijumlahkan, maka Anda akan mendapatkan persamaan (juga bukan persamaan eigenvalue):

$$S_x\,\beta = (½)\,\hbar\,\alpha, \qquad (20)$$

Dan jika dikurangkan, Anda akan mendapatkan persamaan (bukan persamaan eigenvalue):

$$S_y\,\beta = -(i/2)\,\hbar\,\alpha. \qquad (21)$$

Dengan demikian, kita dapat simpulkan bahwa persamaan-persamaan untuk S_x, S_y, dan S_z di dalam basis α dan β sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{l} S_x\,\alpha = (½)\,\hbar\,\beta \quad \text{dan } S_x\,\beta = (½)\,\hbar\,\alpha; \\[1em] S_y\,\alpha = (i/2)\,\hbar\,\beta, \text{ dan } S_y\,\beta = -(i/2)\,\hbar\,\alpha. \\[1em] S_z\,\alpha = (½)\,\hbar\,\alpha, \text{ dan } S_z\,\beta = -\,(½)\,\hbar\,\beta. \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Catatan: Kedua persamaan untuk S_z di dalam persamaan (22) adalah merupakan persamaan eigenvalue.

Dengan menggunakan persamaan eigenvalue di atas (persamaan 22), kita dapat menentukan matrik-matrik yang merepresentasikan operator-operator S_x, S_y, dan S_z di dalam basis α dan β, yaitu sebagai berikut:

$$\left.\begin{aligned}
S_x &= \begin{pmatrix} \langle\alpha|S_x|\alpha\rangle & \langle\alpha|S_x|\beta\rangle \\ \langle\beta|S_x|\alpha\rangle & \langle\beta|S_x|\beta\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
S_y &= \begin{pmatrix} \langle\alpha|S_y|\alpha\rangle & \langle\alpha|S_y|\beta\rangle \\ \langle\beta|S_y|\alpha\rangle & \langle\beta|S_y|\beta\rangle \end{pmatrix} = \frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
S_z &= \begin{pmatrix} \langle\alpha|S_z|\alpha\rangle & \langle\alpha|S_z|\beta\rangle \\ \langle\beta|S_z|\alpha\rangle & \langle\beta|S_z|\beta\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Operator spin biasa didefinisikan sebagai berikut: $\hat{\sigma} = \frac{2}{\hbar}\hat{S}$, dimana $\hat{\sigma}$ merupakan <u>operator spin Pauli</u> dan $\hat{S}$ merupakan <u>operator Spin</u>. Dengan menggunakan persamaan (23) kita dapat menuliskan matrik yang merepresentasikan komponen operator spin Pauli σ_x sebagai berikut:

$$\sigma_x = \frac{2}{\hbar} \text{ x } \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Dengan cara yang sama, kita dapat menuliskan komponen-komponen operator spin Pauli σ_y, σ_z sebagai berikut:

$$\sigma_y = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan} \qquad (25)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (26)$$

Ketiga matrik inilah (persamaan 24, 25, dan 26) yang kita cari dan kita sebut sebagai ***<u>matrik-matrik spin Pauli</u>***.

Eigenvektor α dan β dapat dinyatakan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; dan $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sehingga persamaan orthonomalisasi dari kedua vektor tersebut dapat kita hitung sebagai berikut:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = (1 \quad 0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1.$$

$$\langle\alpha|\beta\rangle = (1 \quad 0)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0.$$

$$\langle\beta|\beta\rangle = (0 \quad 1)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1.$$

$$\langle\beta|\alpha\rangle = (0 \quad 1)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0.$$

Contoh soal :
Hitunglah eigenvalue dan eigenvektor untuk S_x dari sebuah spin setengah (s = ½).
Jawab:

a. Kita misalkan eigenvalue dari S_x tersebut adalah E_x, dan eigenvektornya $|A\rangle$ yang komponennya adalah $a_1$dan a_2, sehingga kita dapat menuliskan persamaan eigenvalue sebagai berikut:

$$S_x\ |A\rangle = E_x\ |A\rangle.$$

Dimana : $|A\rangle = a_1|A_1\rangle + a_2|A_2\rangle$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = E_x\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}.$$

Supaya persamaan matrik ini dapat diselesaikan, kita terlebih dahulu harus mengalikan suku persamaan di ruas kanan dengan sebuah matrik identitas (yaitu matrik $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$) kemudian memindahkannya ke ruas kiri, sehingga persamaan tersebut tampak seperti di bawah ini

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} - E_x\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix}-E_x & \frac{\hbar}{2}\\ \frac{\hbar}{2} & -E_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = 0. \qquad (27)$$

$$\begin{vmatrix}-E_x & \frac{\hbar}{2}\\ \frac{\hbar}{2} & -E_x\end{vmatrix} = 0,\ \text{atau}\ E_x = \pm\ \frac{\hbar}{2}\ . \qquad (28)$$

Jadi eigenvalue dari operator S_x adalah $-\frac{\hbar}{2}$ dan $+\frac{\hbar}{2}$.

b. Selanjutnya marilah kita hitung eigenvektor S_x. Untuk itu, kita substitusikan kedua nilai eigenvalue tadi ke persamaan (27) satu persamaan satu sebagai berikut.

- untuk $E_x = +\frac{\hbar}{2}$, kita peroleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix}-\frac{\hbar}{2} & \frac{\hbar}{2}\\ \frac{\hbar}{2} & -\frac{\hbar}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = 0,\ \text{berarti}\ a_1 = a_2.$$

Karena eigenvektor ini harus normal, maka:

$\langle A|A\rangle$ = 1 = $(a_1)^2 + (a_2)^2$. Karena $a_1 = a_2$, maka 2 $(a_1)^2$ =1. Atau $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Jadi eigenvektor S_x dengan eigenvalue $E_x = +\frac{\hbar}{2}$ adalah:

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|A_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|A_2\rangle.$$

Atau dalam bentuk matrik $|A\rangle = \alpha_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

<u>Latihan</u> : Cobalah tentukan eigenvektor S_x untuk eigenvalue $-\frac{\hbar}{2}$.

<u>Petunjuk</u> : Ikuti langkah-langkah seperti pada bagian b diatas, dengan mensubstitusikan nilai $E_x = -\frac{\hbar}{2}$ ke dalam persamaan (27). Anda harus mendapatkan nilai eigenvektor $|B\rangle = \beta_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

<u>Rangkuman</u>

Setelah Anda materi Bab 5 di atas, simaklah dan hafalkan beberapa hal penting di bawah ini !

1. Elemen-elemen matrik $L^2_{\ell m,\ell' m'}$ dapat dihitung sebagai beriktut:

$$L^2_{lm,l'm'} = \hbar^2\,\ell(\ell+1)\;\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'} \quad , \qquad (1)$$

2. Element-elemen matrik $(L_z)_{\ell m,\ell' m'}$ dapat dihitung dengan menggunakan persamaan

$$(L_z)_{\ell m,\ell' m'} = m\hbar\;\delta_{\ell\ell'}\,\delta_{mm'} \qquad (2)$$

3. Hubungan antara elemen matrik-matrik $(L_+)_{\ell m,\ell' m'}$ dan $(L_-)_{\ell m,\ell' m'}$ dengan fungsi gelombang Y_ℓ^m, adalah sebagai berikut:

$$(L_\pm)_{\ell m,\ell' m'} = \{(\ell' \mp m')(\ell' \pm m'+1)\}^{1/2}\;\hbar\;\delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'\pm 1} \qquad (4)$$

4. Kita dapat menghitung matrik L_x dan L_y sebagai berikut :

$L_x = ½(L_+ + L_-)$

$L_y = -\frac{i}{2}(L_+ - L_-)$

5. Matrik spin Pauli adalah:

$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$.

$\sigma_y = i\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}$ dan

$\sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$.

6. Eigenvektor α dan β dapat dinyatakan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{dan } \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Untuk sebuah nilai s tertentu, nilai m_s adalah mulai dari –s sampai +s dengan step +1.
8. Sifat-sifat dari operator mementum sudut spin S (Tanpa tanda vektor) adalah sama dengan sifat-sifat untuk momentum sudut orbit.

9. Hubungan komutatif antara komponen-komponen S_x, S_y, dan S_z memenuhi aturan berikut: $[S_x, S_y] = i\hbar\ S_z$; $[S_y, S_z] = i\hbar\ S_x$; $[S_z, S_x] = i\hbar\ S_y$.
10. Definisi operator-operator S_+ dan $S\_$ untuk momentum sudut spin adalah sebagai berikut :
    $S_{\pm} = S_x \pm i\, S_y$.
11. Persamaan eigenvalue untuk spin adalah sebagai berikut:
    $S^2 \left|s, m_s\right\rangle = \hbar^2\, s\,(s+1)\left|s, m_s\right\rangle$; dan $S_z \left|s, m_s\right\rangle = \hbar\, m_s \left|s, m_s\right\rangle$.
12. Operator-operator S_+ dan $S\_$ dalam fungsi eigen α dan β dapat ditulis sebagai berikut:
    $S_+ \left|s, m_s\right\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s+1)}\ \left|s, m_s + 1\right\rangle$
    $S\_ \left|s, m_s\right\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s-1)}\ \left|s, m_s - 1\right\rangle$.
13. Persamaan-persamaan untuk S_x, S_y, dan S_z di dalam basis α dan β sebagai berikut:
    $S_x\, \alpha = (½)\hbar\, \beta$ dan $S_x\, \beta = (½)\hbar\, \alpha$;
    $S_y\, \alpha = (i/2)\hbar\, \beta$, dan $S_y\, \beta = -(i/2)\hbar\, \alpha$.
    $S_z\, \alpha = (½)\hbar\, \alpha$, dan $S_z\, \beta = -(½)\hbar\, \beta$.
14. Matrik-matrik yang merepresentasikan operator-operator S_x, S_y, dan S_z di dalam basis α dan β, adalah sebagai berikut:

$$S_x = \begin{pmatrix} \langle\alpha|S_x|\alpha\rangle & \langle\alpha|S_x|\beta\rangle \\ \langle\beta|S_x|\alpha\rangle & \langle\beta|S_x|\beta\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \begin{pmatrix} \langle\alpha|S_y|\alpha\rangle & \langle\alpha|S_y|\beta\rangle \\ \langle\beta|S_y|\alpha\rangle & \langle\beta|S_y|\beta\rangle \end{pmatrix} = \frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \begin{pmatrix} \langle\alpha|S_z|\alpha\rangle & \langle\alpha|S_z|\beta\rangle \\ \langle\beta|S_z|\alpha\rangle & \langle\beta|S_z|\beta\rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. Operator spin biasa didefinisikan sebagai berikut:
    $\hat{\sigma} = \frac{2}{\hbar}\hat{S}$, dimana $\hat{\sigma}$ merupakan <u>operator spin Pauli</u> dan $\hat{S}$ merupakan <u>operator Spin</u>.

Tes Formatif 1

Petunjuk: Jawablah semua soal/pertanyaan di bawah ini.

1. Sebuah partikel memiliki bilangan kuantum orbit ($\ell = \ell'$) sebesar 2 satuan. Berapakah besarnya elemen matrik $L^2_{21,21}$?
2. Berapakah besarnya elemen matrik $L^2_{22,11}$ untuk soal nomor (1) di atas ?
3. Sebuah elektron memiliki bilangan kuantum orbit ($\ell = \ell'$) sebesar 1. Berapakah nilai elemen matrik $(L_z)_{10,10}$?
4. Sebuah partikel memiliki bilangan kuantum orbit $\ell = \ell' = 2$. Nilai-nilai bilangan kuantum m_ℓ untuk partikel tersebut adalah: ………..
5. Elemen matrik $(L_+)_{21,20}$ adalah …………..
6. Matrik spin Pauli yang benar adalah
   a. $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   b. $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   c. $\sigma_z = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
   d. $\sigma_y = i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. Persamaan-persamaan untuk S_x, S_y, dan S_z di dalam basis α dan β berikut yang benar adalah:

   a. $S_x\, \alpha = (½)\hbar\, \alpha$.
   b. $S_y\, \beta = -(i/2)\hbar\, \alpha$.
   c. $S_z\, \alpha = (½)\hbar\, \beta$.
   d. $S_z\, \beta = -(½)\hbar\, \beta$.

8. Matrik-matrik yang merepresentasikan operator S_x di dalam basis α dan β, adalah ……