PENDAHULUAN

Di dalam modul ini Anda akan mempelajari Gas elektron bebas yang mencakup: Elektron bebas dalam satu dimensi dan elektron bebas dalam tiga dimensi. Oleh karena itu, sebelum mempelajari modul ini Anda terlebih dahulu harus mempelajari modul nomor 3 tentang sifat termal kristal dan modul-modul fisika kuantum.

Materi kuliah dalam modul ini merupakan dasar dari materi yang akan Anda pelajari pada modul-modul selanjutnya.

Pengetahuan yang akan Anda peroleh dari modul ini akan barmanfaat untuk memperdalam pengetahuan anda tetang termodinamika khususnya tentang kapasitas panas suatu logam.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat mencapai beberapa tujuan instruksional khusus, sebagai berikut:

Anda harus dapat

1. menentukan tingkat energi elektron bebas.
2. menjelaskan arti fisis fungsi distribusi Fermi Dirac.
3. menghitung energi Fermi.
4. menghitung kecepatan Fermi.
5. menghitung suhu Fermi.
6. menghitung kapasitas panas elektron bebas.

Materi kuliah dalam modul ini akan disajikan dalam urutan sebagai berikut:

1. KB. 1 Elektron bebas dalam satu dimensi. Di dalam KB. 1 ini Anda akan mempelajari sub-pokok bahasan : tingkat energi elektron bebas, energi Fermi, dan distribusi Fermi-Dirac.

2. KB. 2 Elektron bebas dalam tiga dimensi. Dalam KB. 2 ini Anda akan mempelajari sub-pokok bahasan: energi Fermi untuk tiga dimensi, kecepatan Fermi, temperatur Fermi, dan Kapasitas panas elektron bebas.

Agar Anda dapat mempelajari modul ini dengan baik, ikutilah petunjuk belajar berikut ini.

1. Bacalah tujuan instruksional khusus untuk modul ini.
2. Baca dan pelajari dengan seksama uraian setiap kegiatan belajar.
3. Salinlah konsep dasar dan persamaan-persamaan penting ke dalam buku latihan Anda.
4. Perhatikan dan pelajari dengan baik contoh-contoh soal/masalah dalam setiap kegiatan belajar.
5. Kerjakan semua soal latihan dan usahakan tanpa melihat kunci jawaban terlebih dahulu.

KB 1. GAS ELEKTRON BEBAS DALAM SATU DIMENSI

4.1.1. Tingkat energi.

Teori klasik Drude-Lorentz.

Pada tahun 1900 Drude berpostulat bahwa logam adalah terdiri atas pusat-pusat (cores) ion positif dengan elektron valensi yang bebas bergerak di antara pusat-pusat ion tersebut. Elektron-elektron valensi tersebut dibatasi untuk bergerak di dalam logam akibat adanya gaya tarik elektrostatis antara pusat-pusat ion positif dengan elektron-elektron valensi tersebut. Medan listrik di seluruh bagian dalam logam ini dianggap konstan, dan gaya tolak antara elektron-elektron tersebut diabaikan. Tingkah laku elektron-elektron yang bergerak di dalam logam dianggap sama dengan tingkah laku atom atau molekul di dalam gas mulia. Karena itu, elektron-elektron ini juga dianggap bebas dan sering disebut ***gas elektron bebas.*** Dan teori yang membahas gas elektron bebas ini sering disebut ***model gas elektron bebas.*** Namun demikian, sesungguhnya gas elektron bebas adalah dalam beberapa hal berbeda dengan gas biasa. Perbedaan pertama adalah bahwa gas elektron bebas adalah bermuatan negatif, sedangkan molekul-molekul dari gas biasa adalah netral. Kedua, konsentrasi elektron bebas dalam gas elektron bebas adalah jauh lebih besar dari pada konsentrasi molekul dalam gas biasa.

Elektron valensi sering juga disebut sebagai elektron konduksi dan juga mematuhi prinsip Pauli. Elektron-elektron ini bertanggung jawab atas hantaran arus listrik di dalam logam. Karena elektron-elektron konduksi bergerak di dalam medan elektrostatis serbasama (uniform) yang ditimbulkan oleh pusat-pusat ion, maka *energi potensial* mereka tetap konstan dan sering dianggap sama dengan nol. Artinya keberadaan pusat-pusat ion diabaikan. Dengan demikian, energi elektron konduksi sama dengan energi kinetiknya saja. Dan juga karena gerakan elektron konduksi dibatasi hanya di dalam logam, maka energi potensial sebuah elektron di dalam logam adalah lebih kecil dari pada energi potensial sebuah elektron yang berada tepat diluar permukaan logam. Perbedaan energi potensial ini berfungsi sebagai penghalang dan menyebabkan elektron-elektron di dalam logam tidak dapat keluar meninggalkan permukaan logam tersebut. Oleh karena itu, dalam model gas elektron bebas, gerakan dari elektron-elektron bebas di dalam sebuah logam adalah sama dengan gerakan sebuah gas elektron bebas di dalam sebuah *kotak energi potensial*. Elekton konduksi yang kita bicarakan sekarang ini adalah elektron konduksi di dalam logam yang belum diberi sumber tegangan (beda potensial).

Dengan mengacu pada postulat Drude, yaitu gas elektron bebas bertingkah seperti gas mulia, pada tahun 1909 H. A. Lorentz berpostulat bahwa elektron-elektron yang menyusun gas elektron bebas dalam keadaan ekuilibirum mematuhi statistika Maxwell-Boltzmann. Kedua postulat ini sering dipadukan dan sering disebut *Teori Drude-Lorentz.* Dan karena teori ini didasarkan pada statistika klasik Maxwell-Boltzmann, teori ini pun disebut *Teori Klasik*. Meskipun tori ini bersifat klasik, namun teori ini telah berhasil digunakan untuk menjelaskan beberapa sifat logam. Sebagai contoh, teori ini berhasil membuktikan keabsahan hukum Ohm. Di samping itu, karena elektron bebas dapat dengan mudah bergerak di dalam logam, beberapa logam menunjukkan adanya konduktivitas listrik dan konduktivitas panas yang tinggi. Namun demikian, ratio antara konduktivitas listrik (σ) terhadap konduktivitas panas (κ) adalah selalu konstan, yaitu:

$$\frac{\sigma}{\kappa} = \text{ konstan.} \qquad (1)$$

Persamaan (1) ini sering disebut *hukum Wiedemann-Franz*.

Di samping keberhasilan-keberhasilan tersebut di atas, teori ini menemui beberapa kegagalan. Diantaranya adalah bahwa teori ini gagal menjelaskan ketergantungan resistivitas terhadap temperatur. Menurut teori ini, resistivitas listrik merupakan fungsi akar kuadrat dari temperatur, $\sqrt{T}$, dimana T = temperatur. Padahal sesungguhnya, resistivitas listrik merupakan fungsi linier dari temperatur. Kegagalan lainnya adalah tentang kapasistas panas elektron konduksi dan suseptibilitas paramagentik elektron konduksi. Teori ini gagal menjelaskan kapasitas panas elektron konduksi dan suseptibilitas paramagentik elektron konduksi. Kapasitas panas dan suseptibilitas paramagnetik yang dihitung oleh teori ini adalah lebih besar dari pada nilai-nilai yang diamati secara eksperimen.

Teori Kuantum Sommerfeld.

Sommerfeld memperlakukan elektron valensi (elektron konduksi) yang bebas bergerak itu secara kuantum mekanik, yaitu dengan cara menggunakan statistika kuantum Fermi-Dirac, dan bukannya statistika klasik Maxwell-Boltzmann. Karena itu, tingkat-tingkat elektron di dalam kotak energi potensial ditentukan dengan menggunakan statistika kuantum. Selanjutnya marilah kita bahas Gas Elektron Bebas di kotak satu dimensi. Sedangkan Gas Elektron Bebas dalam tiga dimensi akan dibahas pada KB-2.

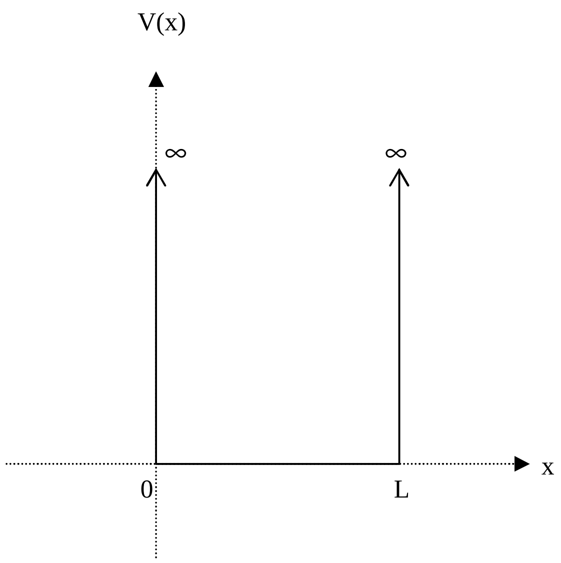
Misalkan Sebuah elektron yang bermassa m bebas bergerak di dalam kristal satu dimensi yang panjangnya L. Elektron tersebut tidak dapat meninggalkan kristal akibat adanya potensial penghalang yang sangat tinggi pada permukaan kristal. Dengan demikian, masalahnya menjadi adalah sama dengan sebuah elektron yang bergerak di dalam kotak energi potensial satu dimensi yang biasa digambarkan oleh sebuah garis yang dibatasi oleh energi potensial penghalang yang tingginya tak-hingga, seperti ditunjukkan pada Gambar 1. Energi potensial di dalam kotak kita misalkan sama dengan nol, sehingga kita memiliki V(x) sebagai berikut:

$$V(x) = 0 \text{ untuk } \quad 0 < x < L \tag{2}$$

$$V(x) = \infty \quad \text{untuk } 0 \le x \quad \text{dan} \quad x \ge L. \tag{3}$$

Fungsi gelombang untuk elektron yang berada dalam keadaan ke n ditentukan dari persamaan Schrodinger:

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E_n - V)\,\psi_n = 0 \tag{4}$$



Gambar 1. Kotak energi potensial satu dimensi yang tingginya tak-hingga. Kita misalkan sebuah elektron yang bermassa m ditempatkan di dalam kotak tersebut. Fungsi gelombang dan tingkat energinya ditentukan dari persamaan Schrodinger.

dimana E_n menyatakan energi kinetik elektron yang berada pada tingkat ke-n, V menyatakan energi potensial elektron, dan ψ_n menyatakan fungsi gelombang elektron di tingkat ke-n. Karena di dalam kotak energi potensial V = 0, maka persamaan 4 menjadi:

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E_n)\,\psi_n = 0. \qquad (5)$$

Solusi umum untuk persamaan (5) di atas memiliki bentuk:

$$\psi_n(x) = A \sin kx + B \cos kx. \qquad (6)$$

dimana A dan B adalah konstanta sembarang yang dapat ditentukan dari syarat batas. Persamaan (5) dapat ditulis secara lebih sederhana sebagai berikut:

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + k^2\,\psi_n = 0 \qquad (7)$$

Dengan demikian kita dapat melihat bahwa nilai k harus sama dengan:

$$k = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}}\,. \qquad (8)$$

Karena kedalaman kotak ini adalah tak-hingga, maka kita tidak mungkin menemukan elektron di luar kotak. Hal ini berarti bahwa di luar kotak ψ_n (x) = 0. Sedangkan pada x = 0 dan x = L, ψ_n (x) harus kontinyus. Dengan demikian, pada x = 0 persamaan (6) menjadi:

$$0 = 0 + B \cos 0.$$

atau B = 0. Jadi Fungsi gelombang yang kita peroleh dari persamaan (6) di atas adalah:

$$\psi_n (x) = A \sin kx. \tag{9}$$

Tetapi karena untuk x = L pun ψ_n (x) = 0, maka dari persamaan (9) kita peroleh

$$0 = A \sin kL$$

atau sin kL = 0. Hal ini berarti bahwa:

$$kL = n\pi$$

atau $$k = n\pi/L. \tag{10}$$

Disini n = 1, 2, 3, 4, …… Tetapi $k = 2\pi/\lambda_n$. Jadi dari persamaan (10) kita dapat menulis

$$2\pi/\lambda_n = n\pi/L. \tag{11}$$

atau

$$L = n\lambda_n/2 \tag{12}$$

Dengan demikian persamaan (9) dapat kita tulis sebagai berikut:

$$\psi_n (x) = A \sin (n\pi/L)\, x \tag{13}$$

Persamaan (11) ini merupakan fungsi gelombang elektron di dalam sebuah kotak energi potensial yang tingginya tak-hingga. Energi kinetik elektron yang berada di tingkat ke n dapat kita hitung dari persamaan (8) dan (10) di atas. Hasilnya adalah sebagai berikut:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2}. \tag{14}$$

Karena $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, maka persamaan (14) dapat kita tulis sebagai berikut:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{n^2h^2}{8mL^2}\,. \qquad (15)$$

Dari persamaan (15) kita lihat bahwa tingkat energi (E_n) elektron yang berada di dalam kotak energi potensial yang kedalamannya tak hingga adalah terkuantisasi dan bergantung pada n^2 untuk L tertentu.

Jika fungsi gelombang yang ditunjukkan oleh persamaan (13) dinormalisasi, maka kita dapat menentukan nilai A. Proses normalisasi tersebut dapat dihitung sebagai berikut:

$$\int_0^L \psi_n^*(x)\,\psi_n(x)\,dx = 1.$$

catatan: $\psi_n^*(x)$ artinya sekawan dari fungsi gelombang $\psi_n(x)$. Karena fungsi $\psi_n(x)$ merupakan fungsi riil, maka nilai $\psi_n^*(x) = \psi_n(x)$. Jadi

$$\int_0^L \{A \sin(n\pi x/L)\}\{A \sin(n\pi x/L)\}\,dx = 1.$$

$$A^2\int_0^L \sin^2(n\pi x/L)\,dx = 1$$

Karena $\sin^2 (n\pi x/L) = ½ \{1- \cos (2n\pi x/L)\}$, maka persamaan di atas menjadi

$$A^2 \int_0^L ½ \{1- \cos (2n\pi x/L)\} dx = 1$$

$$½ \; A^2 \{\int_0^L dx - \int_0^L \cos (2n\pi x/L) dx \} =1$$

Karena $\int_0^L \cos (2n\pi x/L) dx = 0$, maka hasil akhir dari normalisasi tersebut di atas adalah sebagai berikut:

$$A^2 \int_0^L dx = 2$$

atau

$$A^2 = 2/L \text{ atau } A = \sqrt{\frac{2}{L}}. \qquad (16)$$

Jadi fungsi gelombang yang dinyatakan oleh persamaan (13) di atas dapat kita tulis secara lengkap sebagai berikut :

$$\psi_n (x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin (n\pi/L)\, x \qquad (17)$$

Persamaan (17) menyatakan fungsi gelombang yang sudah di normalkan. Artinya, total peluang untuk menemukan partikel di dalam kotak itu akan sama dengan 1 (atau 100%).

Contoh soal:

Sebuah elektron konduksi berada dalam kotak energi potensial yang kedalamannya tak hingga. Jika lebar kotak tersebut sebesar 2 angstroom, tentukanlah:

a. Energi untuk tingkat ke : 1 sampai 5.

b. Panjang gelombang untuk tingkat ke 1 sampai 5.

c. Fungsi gelombang untuk tingkat ke 1 sampai ke 5.

d. Gambar bentuk gelombang untuk fungsi gelombang ke 1 sampai ke 5.

Jawab:

a. Gunakan persamaan (15) : $E_n = \dfrac{\hbar^2}{2m}\left(\dfrac{n\pi}{L}\right)^2 = \dfrac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \dfrac{n^2h^2}{8mL^2}$.

untuk tingkat pertama, n = 1, maka $E_1 = h^2/8mL^2$.

untuk tingkat kedua, n = 2, maka $E_2 = h^2/2mL^2$.

untuk tingkat ketiga, n = 3, maka $E_3 = 9\ h^2/8mL^2$.

untuk tingkat keempat, n = 4, maka $E_4 = 2\ h^2/mL^2$.

untuk tingkat kelima, n = 5, maka $E_5 = 25\ h^2/8mL^2$.

b. Gunakan persamaan (12): $L = n\lambda_n/2$

untuk n = 1, maka $\lambda_n = 2L$. Atau $L = ½\ \lambda_n$.

untuk n =2, maka $\lambda_n = L$. Atau $L = \lambda_n$.

untuk n = 3, maka λ_n = 2L/3. Atau L = 1,5 λ_n .

untuk n = 4, maka λ_n = L/2. Atau L = 2 λ_n .

untuk n = 5, maka λ_n = 2 L/5. Atau L = 2,5 λ_n.

c. Gunakan persamaan (17): $\psi_n (x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin (n\pi/L)\, x$

untuk n = 1, ψ_n (x) = sin (π/2) x.

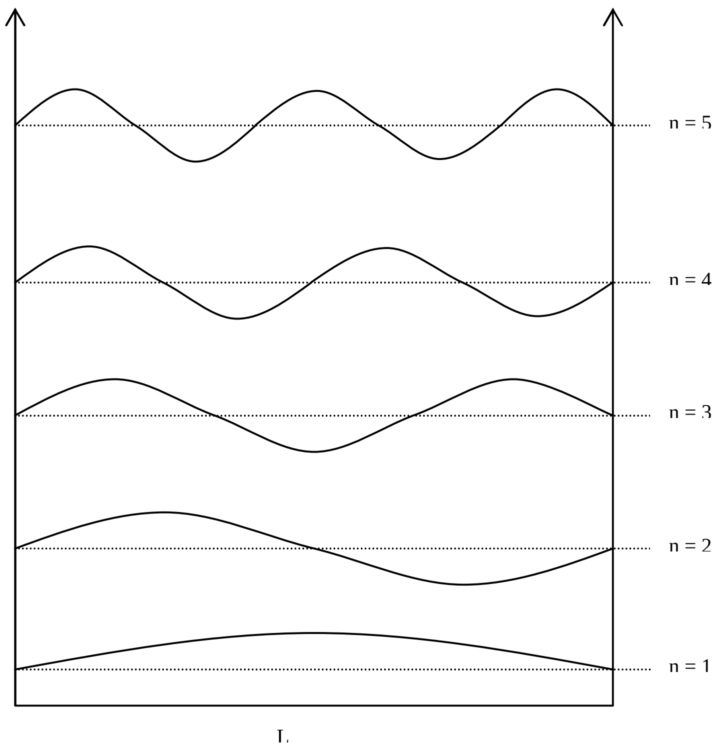
untuk n = 2, ψ_n (x) = sin (π) x.

untuk n = 3, ψ_n (x) = sin (3π/2) x.

untuk n = 4, ψ_n (x) = sin (2π) x.

untuk n = 5, ψ_n (x) = sin (2,5π) x.

d. Gunakan jawaban b di atas.



Latihan soal:

Sebuah elektron terletak di dalam kotak energi potensial satu dimensi yang kedalamannya tak-hingga. Jika lebar kotak tersebut adalah 4 angstroom, tentukanlah:

a. Energi untuk tingkat ke : 2 sampai 7.

b. Panjang gelombang untuk tingkat ke 2 sampai 7.

c. Fungsi gelombang untuk tingkat ke 2 sampai ke 7.

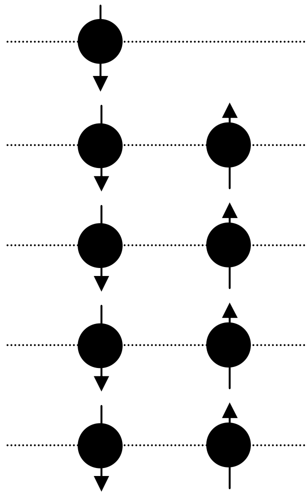
d. Gambar bentuk gelombang untuk fungsi gelombang ke 2 sampai ke 7.

4.1.2. Energi Fermi.

Sekarang marilah kita bahas cara mendistribusikan elektron ke dalam tingkat-tingkat energi yang tersedia seperti yang ditunjukkan oleh persamaan (15) di atas. Elektron-elektron akan disebarkan (didistribusikan) diantara berbagai tingkat energi yang dimungkinkan (yang tersedia) dan dengan cara mematuhi prinsip Pauli yang menyatakan bahwa setiap tingkat energi hanya dapat ditempati oleh paling banyak sebuah elektron, kecuali jika orientasi spin elektron tersebut berbeda. Atau dengan kalimat lain, prinsip Pauli menyatakan bahwa tidak mungkin dua buah elektron menempati satu tingkat energi yang sama, *kecuali* jika spin kedua elektron itu berbeda.

Dalam sebuah zat padat, sebuah tingkat elektron konduksi dapat memiliki 2 buah bilangan kuantum, yaitu n dan m_s yang masing-masing menyatakan bilangan kuantum utama dan bilangan kuantum (magnetik) spin. Untuk setiap nilai n, m_s dapat memiliki dua nilai, yaitu ½ dan - ½ . Ini berarti bahwa setiap tingkat energi yang ditandai oleh nilai n, dapat memiliki dua keadaan. Dan hal ini berarti pula bahwa setiap tingkat energi itu dapat ditempati (diisi) oleh dua buah elektron konduksi; satu elektron memiliki spin up (+½) dan satu lagi memiliki spin down

(- ½). *Jadi setiap tingkat energi digandakan dua kali (doubly degenerate).* Artinya, setiap tingkat energi memiliki dua tempat elektron konduksi. Hal ini sejalan dengan prinsip Pauli. Sebagai contoh, jika kita memiliki 9 buah elektron (4 spin up dan 5 spin down) dalam kedaan dasar (ground state), maka jumlah tingkat energi yang diperlukan oleh kesembilan elektron tersebut adalah 5 tingkat (n = 1, 2, 3, 4, dan 5), dan bukan 9 tingkat. Mengapa ? Karena setiap tingkat dapat diisi (ditempati) oleh dua buah elektron yang memiliki spin yang berlawanan (spin up dan spin down), lihat Gambar 2.



Gambar 2. Sembilan buah elektron (4 spin up dan 5 spin down) dalam keadaan dasar.

Misalkan kita mempunyai sebuah sistem yang teridiri atas N buah elektron pada keadaan dasar. Untuk mudahnya kita misalkan N ini merupakan bilangan genap. Untuk menempatkan ke N buah elektron tersebut ke dalam tingkat-tingkat energi, maka kita hanya memerlukan N/2 buah tingkat energi. Jika kita misalkan *tingkat teratas* yang terisi penuh itu dengan huruf n_f , maka n_f = N/2. *Energi Fermi (E_f) didefinisikan sebagai energi dari tingkat teratas yang terisi penuh elektron pada keadaan dasar.* Jadi jika kita memiliki N = 10, maka energi fermi adalah energi untuk tingkat energi kelima pada keadaan dasar.

Karena kita mengetahui bahwa n_f = N/2, maka dengan menggunakan persamaan (15) di atas, kita dapat menuliskan energi fermi ini secara matematik, yaitu sebagai berikut:

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_f \pi}{L}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N\pi}{2L}\right)^2 \qquad (18)$$

Jadi nilai energi Fermi bergantung pada jumlah elektron per satuan pajang kotak.

Contoh soal:

Jika N/L = 2 elektron/Å = 2 x 10^8 elektron/cm, tentukanlah energi fermi untuk sistem ini!

Jawab:

Gunakan persamaan (18), yaitu:

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N\pi}{2L}\right)^2 = \frac{4{,}45 \times 10^{-54}}{1{,}82 \times 10^{-27}}\left(2 \times 10^8 \ \text{x}\ \frac{3{,}14}{2}\right)^2 = 2{,}4 \times 10^{-10} \text{ erg} = 150 \text{ eV}.$$

Latihan soal:

Hitunglah energi Fermi sebuah sistem yang terdiri atas 4 elektron/Å.

4.1.3 Distribusi Fermi-Dirac.

Pada penjelasan di atas disebutkan bahwa penempatan elektron ke dalam tingkat-tingkat energi elektron harus memenuhi prinsip Pauli. Oleh karena itu, tidak mungkin ada dua buah elektron *dengan keadaan kuantum yang sama* berada pada satu tempat (tingkat energi) yang sama. Keadaan kuantum sebuah elektron biasanya dinyatakan oleh bilangan kuantum untuk elektron tersebut. Ada banyak bilangan kuantum yang sering digunakan untuk menandai sebuah elektron, diantaranya adalah bilangan kuantum utama yang sering diberi label dengan huruf n. Di samping itu, ada juga bilangan kuantum orbit yang biasa diberi label dengan huruf ℓ. Untuk keperluan sekarang , kita akan menggunakan sebuah set bilangan kuantum yang terdiri atas empat buah bilangan kuantum, yaitu bilangan kuantum k_x, k_y, k_z, dan m_s yang masing-masing menyatakan vektor gelombang dalam arah sumbu x, sumbu y, dan sumbu z, serta bilangan kuantum magnetik. Bilangan kuantum magnetik sering juga diartikan sebagai bilangan kuantum spin dari elektron yang bersangkutan. Tiga bilangan kuantum yang pertama masing-masing hanya memiliki satu nilai, sedangkan bilangan kuantum magnetik dapat memiliki dua nilai, yaitu $m_s = \pm$ ½ . Nilai m_s = + ½ artinya elektron itu memiliki spin yang arah nya ke atas (spin up), sedangkan nilai m_s = - ½ artinya elektron itu memiliki spin yang arahnya ke bawah (spin down). Sebenarnya arti spin up dan spin down ini akan lebih berlaku umum jika kita menggunakan kaidah tangan kanan, yaitu sebagai berikut: jika arah putaran gasing (gerak berputar relatif terhadap sumbu elektron itu sendiri) dari elektron itu berlawanan dengan arah putaran jarum jam, maka elektron itu dikatakan memiliki spin up, atau memiliki m_s = + ½ . Sebaliknya, jika arah putaran gasing dari elektron itu searah dengan arah jarum jam, maka elektron itu dikatakan memiliki spin down, atau memiliki m_s = - ½ . Dengan demikian spin up dan spin down tidak lagi selalu harus diartikan sebagai spin dengan arah ke atas dan ke bawah. Sebab arah ke atas dan ke bawah pada prakteknya menjadi sangat relatif. Bisa saja arah spin itu ke depan dan ke belakang, tetapi dari arah putaran gasing dari setiap elektron itu, kita dapat memilah mana elektron yang memiliki spin up (m_s = + ½) dan mana elektron yang memiliki spin down (m_s = - ½). Oleh karena itu, meskipun ketiga k hanya dapat memiliki masing-masing satu nilai, tetapi karena m_s dapat memiliki dua nilai yaitu + ½ dan - ½ , maka setiap tingkat energi elektron dapat diisi (ditempati) oleh dua buah elektron yang memiliki arah spin yang berbeda, yaitu spin up dan spin down.. Hal ini tidak bertentangan dengan prinsip Pauli, sebab jika nilai m_s untuk kedua elektron itu berbeda maka kedua elektron itu dikatakan memiliki keadaan kuantum yang berbeda pula. Dengan demikian, setiap tingkat energi itu *degenerasi ganda*. Jadi seperti dijelaskan di atas, jika kita memiliki elektron sebanyak N buah, maka pada keadaan dasar (0^0 K) kita perlu tempat (tingkat energi elektron) hanya sebanyak N/2 tingkat. (Hal ini hanya berlaku untuk elektron-elektron yang tidak saling berinteraksi. Jika semua elektron itu saling berinteraksi, maka ceritanya menjadi lain dan tidak akan di bahas pada bagian ini).

Nah sekarang marilah kita bahas pengaruh suhu terhadap penempatan (distribusi) elektron pada tingkat-tingkat energi itu. Pengaruh suhu terhadap distribusi elektron ini diatur oleh fungsi distribusi yang dikemukakan oleh Fermi dan Dirac, sehingga fungsi distribusi ini sering disebut *Fungsi Distribusi Fermi-Dirac.* Fungsi ini secara matematik (dan dibahas secara rinci dalam matakuliah Fisika Statistika) ditulis sebagai berikut:

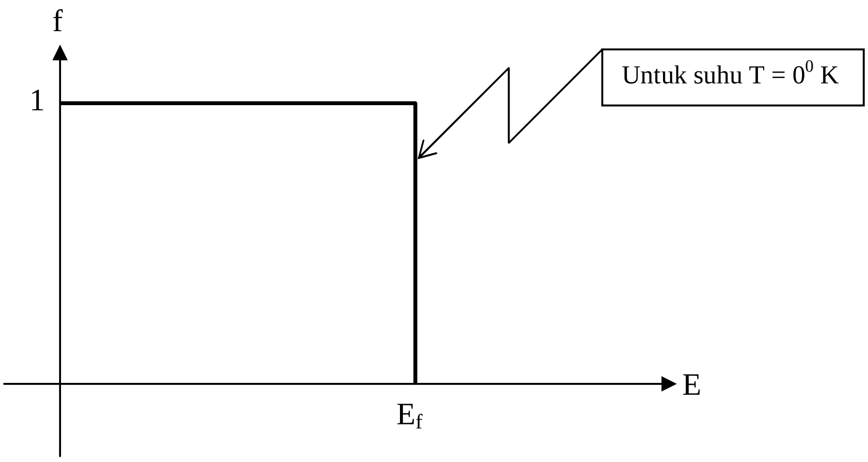
$$f\,(E) = \frac{1}{\exp\left((E-\mu)/k_B T\right)+1} \tag{19}$$

dimana f(E) = peluang untuk menemukan elektron di tingkat energi E, k_B = konstanta Boltzmann, T = suhu dalam satuan Kelvin, μ = energi potensial kimia dan nilainya bergantung pada suhu (atau merupakan fungsi suhu), dan E = energi dari suatu tingkat energi. Pada T = 0^0 K, $\mu = E_f$.

Persamaan (19) ini menyatakan nilai peluang f(E) sebuah tingkat energi elektron (E) untuk ditempati elektron pada suhu T. Sehingga nilai f(E) ini adalah

$0 \leq f(E) \leq 1$.

Persamaan tersebut dapat difahami sebagai berikut. Pada keadaan dasar ($T = 0^0$K) semua tingkat energi yang terletak di bawah energi Fermi dan energi Fermi itu sendiri akan diisi penuh oleh elektron. Artinya, pada keadaan dasar peluang untuk menemukan elektron di tingkat-tingkat energi tersebut adalah 1 atau 100 %. Sebaliknya tidak satu pun tingkat energi yang terletak di atas energi Fermi akan diisi elektron, sehingga peluang untuk menemukan elektron di tingkat energi yang lebih besar dari energi Fermi adalah 0 atau 0%. Sehingga kalau kita buat grafik f sebagai fungsi E untuk keadaan dasar, maka



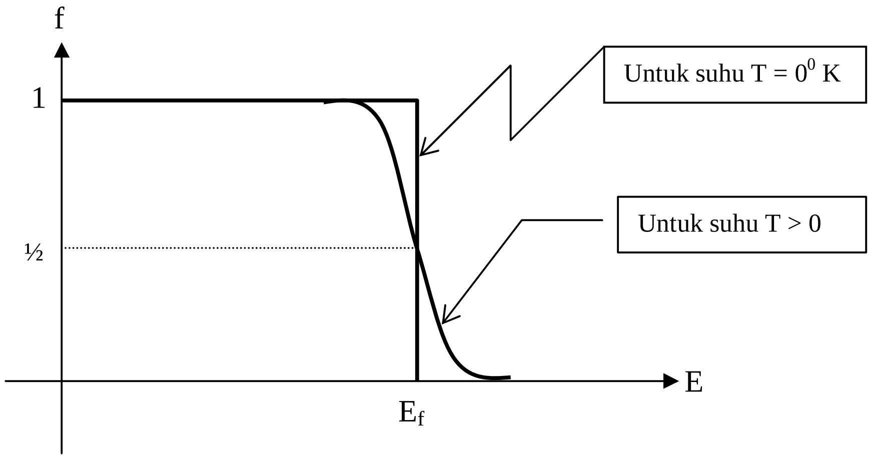
Gambar 3. Grafik f sebagai Fungsi E pada suhu 0^0 K.

kita akan memperoleh grafik seperti ditunjukkan pada Gambar 3. Grafik ini menunjukan bahwa pada saat $E = E_f = \mu$:

$f(E) = 1$ untuk $E \leq E_f$. dan

$f(E) = 0$ untuk $E > E_f$.

Apabila suhunya *sedikit* lebih besar dari 0^0 K sedemikian rupa sehingga $E - \mu > k_BT$, maka beberapa elektron yang terletak sedikit di bawah energi Fermi akan memperoleh cukup energi untuk locat ke tingkat energi yang lebih tinggi dari energi Fermi, sehingga peluang untuk menemukan elektron di tingkat energi yang lebih tinggi dari energi Fermi itu tidak lagi 0. Sehingga peluang di tingkat energi yang sedikit lebih kecil dari energi Fermi itu akan lebih kecil dari satu dan sedikit di atas energi Fermi akan lebih besar dari 0. Untuk semua suhu, nilai f(E) = ½ pada saat E = μ, karena pada saat ini penyebut dari persamaan (19) di atas akan sama dengan 2. Keadaan ini dapat dilukiskan dalam sebuah grafik fungsi sebagai berikut:



Gambar 4. Grafik f sebagai fungsi E untuk T > 0. Perhatikan bahwa pada Gambar ini Grafik f sebagai fungsi E untuk T = 0^0 K masih ditunjukkan. Hal ini sebagai pembanding saja.

Gambar 4 ini menerangkan kepada kita bahwa meskipun suhu (T) logam itu naik, tetapi energi panas yan besarnya hanya sekitar k_BT tidak dibagi merata oleh seluruh elektron. Nilai energi panas ini (k_BT) pada suhu kamar hanya bernilai sekitar 0,025 eV. Sedangkan nilai energi Fermi untuk sebuah logam biasanya sekitar 5 eV. Jadi nilai k_BT ini jauh lebih kecil dari nilai E_F. Akibatnya hanya elektron-elektron yang paling dekat tingkat energi Fermi (E_f) saja yang akan mengalami eksitasi (loncat ke tingkat yang lebih tinggi). Oleh karena itu, nilai peluang yang akan berubah pun hanya nilai peluang untuk energi-energi yang sedikit saja di bawah energi Fermi.

Rangkuman.

1. Ratio antara konduktivitas listrik (σ) terhadap konduktivitas panas (κ) adalah selalu konstan, yaitu:

$$\frac{\sigma}{\kappa} = \text{ konstan.}$$

2. Fungsi gelombang yang dinormalisasi untuk sebuah elektron yang terletak di dalam sebuah sumur potensial yang lebarnya L dan kedalamannya tak-terhingga ditulis secara lengkap sebagai berikut :

$$\psi_n (x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin (n\pi/L)\ x.$$

3. Energi kinetik elektron yang berada di tingkat ke n dapat kita hitung dari persamaan

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{n^2\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{n^2h^2}{8mL^2}\ . \qquad (15)$$

Dari persamaan (15) kita lihat bahwa tingkat energi elektron (E_n)yang berada di dalam kotak energi potensial yang kedalamannya tak hingga adalah terkuantisasi dan bergantung pada n^2 untuk L tertentu.

4. *Energi Fermi (E_f) didefinisikan sebagai energi dari tingkat teratas yang terisi penuh elektron pada keadaan dasar*. Jadi jika kita memiliki N = 10, maka energi fermi adalah energi untuk tingkat energi kelima pada keadaan dasar.

5. Secara amtematika energi fermi dapat ditulis sebagai berikut:

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{n_f \pi}{L}\right)^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N\pi}{2L}\right)^2 .$$

6. Fungsi Distribusi Fermi-Dirac secara matematik ditulis sebagai berikut:

$$f\,(E) = \frac{1}{\exp\left((E-\mu)/k_B T\right)+1}$$

dimana f(E) = peluang untuk menemukan elektron di tingkat energi E, k_B = konstanta Boltzmann, T = suhu dalam satuan Kelvin, μ = energi potensial kimia dan nilainya bergantung pada suhu (atau merupakan fungsi suhu), dan E = energi dari suatu tingkat energi. Pada T = 0^0 K, $\mu = E_f$.

<u>Tes Formatif 1</u>

Petunjuk: Jawablah semua soal di bawah ini pada lembar jawaban yang disediakan !

==

1. Sebuah elektron ditempatkan dalam sebuah sumur potensial satu dimensi yang kedalamannya tak-hingga. Lebar sumur adalah 4 angstrom. Berapakah simpangan gelombang elektron yang terletak pada tingkat ke 2 pada posisi 2 angstrom dari sisi sumur ?
2. Pertanyaan yang sama dengan nomor 1 di atas, tetapi untuk elektron yang terletak di tingkat ke 4 pada posisi 0,5 angstrom.
3. Berapakah nilai energi kinetik elektron seperti pada soal nomor 1, tetapi untuk elektron yang terletak di tingkat 3.

4. Apakah yang dimaksud dengan energi Fermi ?
5. Jika Anda memiliki 20 buah elektron pada keadaan dasar, berapakah jumlah tingkat yang Anda perlukan agar semua elektron tersebut dapat diletakkan dalam tingkat-tingkat energi elektron ?
6. Berapakah nilai energi Fermi untuk elektron seperti pada soal nomor 1 di atas, dimana jumlah elektron yang tersedia adalah sebanyak 20 elektron ?

Tindak Lanjut (Balikan):

Cocokanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban tes formatif 1 pada akhir modul ini, dan berilah skor (nilai) sesuai dengan bobot nilai setiap soal yang dijawab dengan benar. Kemudian jumlahkan skor yang Anda peroleh lalu gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan (TP) Anda terhadap materi KB-1 ini.

Rumus (TP) = (jumlah skor yang diperoleh/skor total) x 100 %

Arti TP yang Anda peroleh adalah sebagai berikut :

90 % - 100 % = baik sekali.

80 % - 89 % = baik

70 % - 79 % = cukup

< 70 % = rendah.

Apabila TP Anda $\geq$ 80 %, maka Anda boleh melanjutkan pada materi KB 2, dan Selamat !!, Tetapi jika TP Anda < 80 %, Anda harus mengulang materi KB-1 di atas terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai.

KB 2. Elektron Bebas Dalam Tiga Dimensi.

4.2.1. Energi Fermi Untuk Tiga Dimensi.

Persamaan Schrodinger untuk partikel bebas (energi potensial V = 0) dalam tiga dimensi biasa ditulis sebagai berikut:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi_k(\mathbf{r}) = E_k\ \Psi_k(\mathbf{r}) \qquad (20)$$

Jika elektron-elektron itu diletakkan di dalam sebuah kubus dengan panjang sisi-sisinya sebesar L, maka fungsi gelombangnya adalah gelombang berdiri yang mirif dengan fungsi gelombang elektron dalam sebuah sumur potensial satu dimensi yang kedalamannya tak-hingga, yaitu sebagai berikut:

$$\psi_n(\mathbf{r}) = A \sin(\pi n_x x/L) \sin(\pi n_y y/L) \sin(\pi n_z z/L), \qquad (21)$$

dimana n_x, n_y, dan n_z adalah bilangan bulat positif. (Catatan: huruf yang dicetak tebal menyatakan sebuah vektor. Simbol lain dari sebuah vektor adalah anak huruf dengan anak panah di atasnya). Biasanya sangat menyenangkan jika kita menggunakan sebuah fungsi gelombang yang periodik, artinya:

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L). \qquad (22)$$

Fungsi gelombang yang memenuhi persamaan Schordinger (20) dan yang periodik adalah berbentuk gelombang berjalan sebagai berikut:

$$\Psi_k(\mathbf{r}) = \exp(i\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \qquad (23)$$

Perhatikan bahwa **k . r** adalah perkalian vektor yang menghasilkan skalar (dot product). Nilai komponen-komponen **k** pada persamaan (23) di atas adalah sebagai berikut:

$$k_x, k_y, k_z = 0, \ \pm 2\pi/L, \pm 4\pi/L, \pm 6\pi/L, \pm 8\pi/L, \ldots\ldots \quad 2n\pi/L \qquad (24)$$

dimana n adalah bilangan bulat positif. Komponen-komponen dari **k** tersebut adalah merupakan bilangan kuantum dari partikel yang sedang kita bicarakan. Disamping itu, bilangan kuantum yang kita gunakan untuk menandai partikel tersebut yang dalam hal ini elektron adalah bilangan kuantum magnetik m_s yang berkaitan dengan spin elektron itu sendiri.

Sekarang marilah kita buktikan bahwa nilai-nilai k_x, k_y, dan k_z ini memenuhi syarat yang ditunjukkan oleh persamaan (22) di atas. Caranya adalah sebagai berikut:

$$\Psi_k(x) = \exp(i\, k_x \cdot x).$$

untuk posisi (x + L) kita peroleh

$$\Psi_k(x + L) = \exp(i\, k_x \cdot (x + L)). \qquad (25)$$

Selanjutnya substitusikan nilai k_x dari persamaan (24) di atas ke dalam persamaan (25). Hasilnya adalah sebagai berikut:

$$\Psi_k(x + L) = \exp(i2n\pi (x + L)/L).$$

$$= \exp(i2n\pi x /L) . \exp(i2n\pi) \qquad (26)$$

karena nilai exp (i2nπ) = 1, maka persamaan (26) menjadi

$$\Psi_k(x + L) = \exp(i2n\pi\, x /L).\ 1 = \exp(i\, k_x . x)$$

yang berarti bahwa

$$\Psi_k(x + L) = \Psi_k(x). \qquad (27)$$

Persamaan (27) membuktikan bahwa nilai k_x ini memenuhi syarat yang ditunjukkan oleh persamaan (22) di atas.

Latihan

Dengan menggunakan cara seperti di atas, coba buktikan bahwa nilai-nilai k_y, dan k_z juga memenuhi syarat yang ditunjukkan oleh persamaan (22) di atas.

Selanjutnya marilah kita hitung energi elektron bebas untuk tiga dimensi. Caranya adalah sebagai berikut. Substitusikanlah persamaan (23) ke persamaan (20), sehingga kita dapatkan

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\exp(i\,\mathbf{k}\,.\,\mathbf{r}). = E_k \exp(i\,\mathbf{k}\,.\,\mathbf{r}). \qquad (28)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\exp(i\, k_x\, x + k_y\, y + k_z\, z) = E_k \exp(i\, k_x\, .\, x + k_y\, y + k_z\, z).$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) \exp\left(i\, k_x x + k_y y + k_z z\right) = E_k \exp\left(i\, k_x x + k_y y + k_z z\right),$$

sehingga nilai E_k sama dengan

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) = \frac{\hbar^2}{2m} k^2 \qquad (29)$$

Persamaan (29) ini menyatakan energi kinetik elektron bebas dalam ruang tiga dimensi. Ingat bahwa energi potensial elektron bebas adalah nol. Nilai k ini sering dikaitkan dengan panjang gelombang elektron melalui persamaan berikut

$$k = 2\pi/\lambda \qquad (30)$$

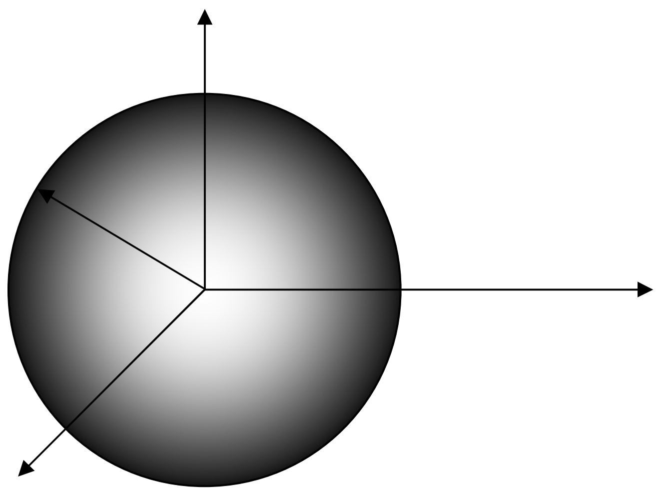
Di samping itu, momentum sudut linear (p) juga sering dikaitkan dengan vektor gelombang k melalui persamaan

$$p = \hbar k. \qquad (31)$$

Dalam keadaan dasar (T = 0 K) semua tingkat energi yang terletak di bawah energi Fermi dan energi Fermi itu sendiri akan ditempati elektron. Oleh karena itu, vektor gelombang terbesar adalah vektor gelombang untuk elektron yang berada pada tingkat energi Fermi. Dengan demikian, jika kita misalkan vektor gelombang Fermi dengan huruf k_f , maka energi Fermi dapat ditulis sebagai berikut.

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m} k_f^2 \qquad (32)$$

Dalam ruang k (ruang resiprok) kita dapat menggambar sebuah bola dengan jari-jari k_f yang menampung semua elektron di dalamnya. Artinya tidak ada elektron lain yang terletak di luar bola, karena vektor gelombang terbesar pada keadaan dasar adalah k_f. Volume bola ini adalah tentunya sama dengan $4\pi k_f^3/3$. Bola tersebut dapat Anda lihat pada Gambar 5.



Gambar 5. Pada keadaan dasar semua elektron terletak di dalam bola yang berjari-jari k_f, dimana k_f adalah vektor gelombang Fermi.

Dari persamaan (24) kita mengetahui bahwa nilai terkecil dari k_x, k_y, dan k_z adalah $2\pi/L$ (bukan nol, karena k = 0 berarti tidak ada elektron). Sehingga jika kita mengambil elemen volume (volume terkecil) yang berbentuk kubus dengan sisi-sisi k_x, k_y, dan k_z dari bola tadi, maka volemenya adalah $(2\pi/L)^3$. Dan dalam elemen volume ini hanya ada satu nilai k, yaitu gabungan dari k_x, k_y, dan k_z. dan setiap nilai k ini dimiliki oleh sebuah elektron (oleh dua buah elektron dengan spin yang berlawanan) Jadi, Jumlah total elektron (N) dalam bola tadi adalah sama dengan volume bola dibagi dengan volume dari elemen volume dikali 2 (karena elektron boleh memiliki spin up dan spin down), yaitu sebagai berikut:

$$N = 2\ \frac{4\pi k_f^3/3}{(2\pi/L)^3}\ . \tag{33}$$

Karena L^3 = volume kubus (V), maka jumlah elektron (N) dapat ditulis sebagai berikut:

$$N = \frac{V}{3\pi^2}k_f^3 \tag{34}$$

Dari persamaan (34) kita dapat melihat bahwa vektor gelomang Fermi adalah bergantung pada konsentrasi elektron (n = N/V), sehingga k_f dapat ditulis sebagai berikut:

$$k_f = \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3} = (3\pi^2 n)^{1/3} \tag{35}$$

Dengan demikian, energi Fermi dalam sistem tiga dimensi adalah sebagai berikut:

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m}k_f^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3} \tag{36}$$

Persamaan (36) di atas mengaitkan energi Fermi E_f dengan konsentrasi elektron n = N/V.

4.2.2. Kecepatan Fermi dan Temperatur Fermi.

Kecepatan Fermin (v_f) adalah kecepatan elektron yang terletak di tingkat energi Fermi. Dengan kata lain, kecepatan Fermi adalah kecepatan elektron yang memiliki vektor gelombang k_f. Sehingga secara matematika, kecepatan Fermi ini dapat dihitung dari momentum Fermi yang sama dengan $\hbar k_f = m\ v_f$. Jadi

$$v_f = \hbar k_f/m = (\hbar/m)\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3} \tag{37}$$

Besaran Fisika lainnya yang berkaitan dengan nama Fermi adalah temperatur Fermi (T_f) . Temperatur Fermi ini *sama sekali tidak ada kaitannya* dengan temperatur elektron yang terletak pada tingkat energi Fermi. Tetapi ia didefinisikan sebagai ratio antara energi Fermi (E_f) dengan tetapan Boltzmann (k_B). Hal ini hanya sebagai konsekuensi dari definisi energi yang biasa ditulis $E = k_BT$. Jadi, Temperatur Fermi itu dapat ditulis sebagai berikut:

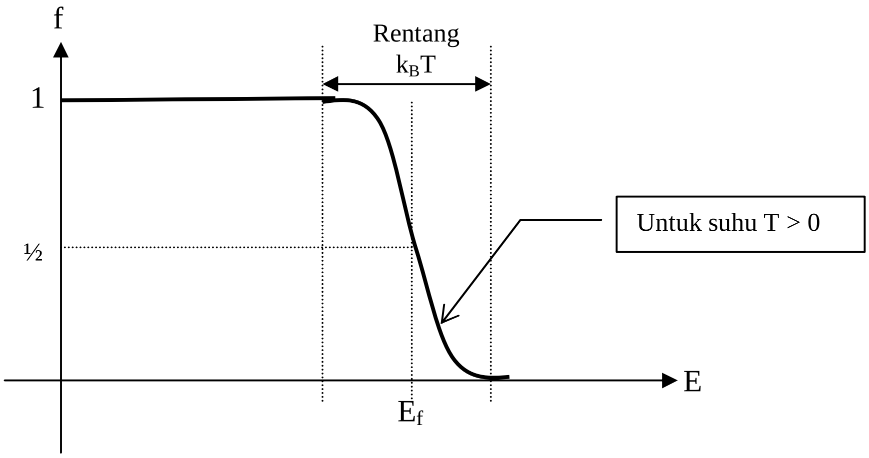
$$T_f = E_f/k_B \tag{38}$$

Nilai-nilai energi Fermi, vektor gelombang Fermi, kecepatan Fermi, temperatur Fermi dan konsentrasi elektron untuk beberapa unsur logam yang bervalensi satu, pada suhu 5 K untuk unsur-unsur Na, K, Rb, Cs, pada suhu 78 K untuk unsur Li, dan pada suhu kamar untuk unsur lainnya dapat Anda lihat pada Tabel di bawah ini.

Nama Unsur	Energi Fermi (eV)	Vektor gelombang Fermi (cm^{-1})	Kecepatan Fermi ($cm\,\ell'$ det)	Temperatur Fermi (K)	Konsentrasi elektron (cm^3)
Li	4,72	$1{,}11 \times 10^8$	$1{,}29 \times 10^8$	$5{,}48 \times 10^4$	$4{,}70 \times 10^{22}$
Na	3,23	$0{,}92 \times 10^8$	$1{,}07 \times 10^8$	$3{,}75 \times 10^4$	$2{,}65 \times 10^2$
K	2,12	$0{,}75 \times 10^8$	$0{,}86 \times 10^8$	$2{,}46 \times 10^4$	$1{,}40 \times 10^{22}$
Rb	1,85	$0{,}70 \times 10^8$	$0{,}81 \times 10^8$	$2{,}15 \times 10^4$	$1{,}15 \times 10^{22}$
Cs	1,58	$0{,}64 \times 10^8$	$0{,}75 \times 10^8$	$1{,}83 \times 10^4$	$0{,}91 \times 10^{22}$
Cu	7,00	$1{,}36 \times 10^8$	$1{,}57 \times 10^8$	$8{,}12 \times 10^4$	$8{,}45 \times 10^{22}$
Ag	5,48	$1{,}20 \times 10^8$	$1{,}39 \times 10^8$	$6{,}36 \times 10^4$	$5{,}85 \times 10^{22}$
Au	5,51	$1{,}20 \times 10^8$	$1{,}39 \times 10^8$	$6{,}39 \times 10^4$	$5{,}90 \times 10^{22}$

4.2.3 Kapasitas Panas Elektron Bebas.

Pada awal perkembangannya, teori elektron dalam logam menemui kesulitan dalam menjelaskan kapasitas panas dari elektron konduksi. Mekanika statistika klasik meramalkan bahwa sebuah elektron bebas harus memiliki kapasitas panas sebesar (3/2) k_B, dimana k_B adalah tetapan Boltzmann. Jadi jika kita memiliki N buah elektron bebas, maka menurut mekanika statistika klasik tersebut kapasitas panas elektron itu adalah sebesar (3/2) Nk_B. Tetapi kenyataannya menunjukan lain. Kapasitas panas elektron konduksi ternyata hanya sebesar 1 % dari (3/2)Nk_B itu dan bahkan kurang dari 1%. Kesulitan ini akhirnya terjawab setelah penemuan Prinsip Pauli dan fungsi distribusi Fermi-Dirac. Fermi mengatakan menulis kalimat sebagai berikut: “seseorang memahami bahwa panas jenis menghilang pada suhu nol derajat Kelvin, dan pada suhu yang rendah panas jenis (atau kapasitas panas) itu adalah sebanding dengan suhu mutlakn”. Hal ini bisa difahami dengan menggunakan fungsi distribusi Fermi-Dirac. Jika kita memanaskan sebuah logam sampel dari suhu nol derajat Kelvin, menurut distribusi Fermi-Dirac tidak semua elektron di dalam logam itu akan memperoleh energi sebesar (3/2) k_BT. Tetapai hanya sebagian kecil saja dari elektron-elektron itu yang akan memperoleh energi sebesar (3/2)k_BT. Elektron-elektron itu adalah elektron yang terletak dalam rentang k_BT di sekitar tingkat energi Fermi. Elektron-elektron dalam rentang ini akan mengalami eksitasi ke tingkat yang lebih tinggi dari tingkat energi Fermi sehingga tingkat-tingkat energi yang sedikit di atas energi Fermi tidak lagi kosong. Demikian pula peluangnya untuk ditempati elektron tidak lagi nol, tetapi sedikit akan lebih besar dari nol. Keadaan ini ditunjukkan dalam Gambar 6 dibawah ini.



Gambar 6. Grafik f sebagai fungsi E untuk T > 0.

Keadaan ini menyelesaikan kesulitan tadi. Jadi jika kita memiliki N buah elektron bebas, maka jumlah elektron yang akan mengalami eksitasi adalah hanya sebanyak N (k_BT/E_f) atau N (T/T_f), karena $E_f = k_BT_f$. Dan setiap elektron dari $N(T/T_f)$ akan memiliki energi sebesar k_BT. Sehingga total energi kinetik termal (U) dari elektron konduksid itu adalah sebesar

$$U = N\,(T/T_f)\,k_BT = Nk_BT^2/T_f \qquad (39)$$

Seperti Anda ketahui bahwa kapasitas panas pada volume tetap (C_v) adalah sama dengan turunan dari energi total terhadap suhu mutlak, maka dengan menggunakan persamaan (39) Anda dapat memperoleh persamaan untuk kapasitas panas elektron konduksi, yaitu sebagai berikut:

$$C_v = dU/dT$$

$$C_v = \left(\frac{d}{dT}\right) Nk_BT^2/T_f = 2\,Nk_B\,(T/T_f)\,. \qquad (40)$$

Persamaan menyatakan kapasitas panas elektron konduksi pada volume tetap dan untuk suhu rendah. Karena $Nk_B = R$, dimana R = tetapan Gas umum, maka persamaan (40) dapat ditulis dalam bentuk yang lebih sederhana, yaitu sebagai berikut:

$$C_v = 2\,R\,(T/T_f). \qquad (41)$$

Hal ini jelas sekali berbeda dengan ramalan mekanika statistika klasik. Menurut mekanika statistika klasik, nilai C_v ini adalah sama dengan 2R. Perbedaannya adalah sebesar (T/T_f). Nilai T/T_f ini adalah sangat kecil sekali.

Contoh: untuk E_f sebesar 5 eV, dan suhu logam 300 K, tentukanlah perbandingan C_v menurut Fermi-Dirac dengan menurut mekanika statistika klasik !

Jawab:

$$E_f = k_B T_f = 5 \text{ eV}$$

Jadi $T_f = 5 \text{ eV}/k_B = 5/(8{,}62 \times 10^{-5})$ K = 58004,64 K.

Perbandingan C_v antara Fermi-Dirac dengan mekanika statistika klasik adalah

$$\frac{(C_v)_{FD}}{(C_v)_{msk}} = \{2\,R\,(T/T_f)\}/2R = T/T_f.$$

$$\frac{(C_v)_{FD}}{(C_v)_{msk}} = 300/\,58004{,}64 = 0{,}005 = 1/200.$$

Jadi kapasitas panas elektron konduksi pada suhu rendah menurut mekanika statistika klasik adalah 200 kali lebih besar dari pada nilai sebenarnya.

Rangkuman.

1. Persamaan Schrodinger untuk partikel bebas (energi potensial V = 0) dalam tiga dimensi biasa ditulis sebagai berikut:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Psi_k(\mathbf{r}) = E_k\ \Psi_k(\mathbf{r}).$$

2. Energi kinetik elektron bebas dalam ruang tiga dimensi adalah

$$E_k = \frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right) = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$$

3. energi Fermi dapat ditulis sebagai berikut.

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m}k_f^2 = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}$$

4. Vektor gelombang Fermi adalah

$$k_f = \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3} = (3\pi^2 n)^{1/3}$$

5. Kecepatan Fermi adalah

$$v_f = \hbar k_f/m = (\hbar/m)\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}$$

6. Temperatur Fermi itu dapat ditulis sebagai berikut:

$$T_f = E_f/k_B$$

7. Kapasitas panas elektron konduksi pada volume tetap untuk suhu rendah adalah

$$C_v = 2\ Nk_B\ (T/T_f) = 2\ R\ (T/T_f).$$

Tes Formatif 2

Petunjuk: Jawablah semua soal di bawah ini pada lembar jawaban yang disediakan !

1. Apakah yang dimaksud dengan vektor gelombang Fermi ?
2. Apakah yang dimaksud dengan kecepatan Fermi ?
3. Apakah yang dimaksud dengan temperatur Fermi ?
4. Sebuah kubus potensial dengan panjang sisinya 5 angstrom, diisi elektron sebanyak 5×10^{20} buah. Berapakah energi Fermi dari sistem itu ?
5. Berapakah vektor gelombang Fermi untuk sistem dalam soal nomor 4 di atas ?
6. Berapakah kecepatan Fermi untuk soal nomor 4 di atas ?
7. Berapakah nilai temperatur Fermi untuk soal nomor 4 di atas ?
8. Berapakah kapasitas panas elektron konduksi yang jumlahnya sebanyak 5×10^{25} buah pada suhu 30 K. Diketahui temperatur Fermi 5000 K.

Tindak Lanjut (Balikan):

Cocokanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban tes formatif 1 pada akhir modul ini, dan berilah skor (nilai) sesuai dengan bobot nilai setiap soal yang dijawab dengan benar. Kemudian jumlahkan skor yang Anda peroleh lalu gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan (TP) Anda terhadap materi KB-1 ini.

Rumus (TP) = (jumlah skor yg diperoleh/skor total) x 100 %

Arti TP yang Anda peroleh adalah sebagai berikut :
90 % - 100 % = baik sekali.
80 % - 89 % = baik
70 % - 79 % = cukup
< 70 % = rendah.

Apabila TP Anda $\geq$ 80 %, maka Anda boleh melanjutkan pada materi KB 2, dan Selamat !!, Tetapi jika TP Anda < 80 %, Anda harus mengulang materi KB-1 di atas terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif 1

1. Diketahui : L = 4 angstrom.

   n = 2

   x = 2 angstrom.

   Ditanyakan : simpangan gelombang (Ψ)

   Jawab:

   Persamaan untuk simpangan adalah sebagai berikut:

   ψ (x) = $\sqrt{\frac{2}{L}}$ sin (nπ/L) x

   = $\sqrt{\frac{1}{2}}$ sin (2π/4)2 = $\sqrt{\frac{1}{2}}$ sin (π) = 0. (skor = 1,5).

2. Diketahui : L = 4 angstrom.

   n = 4

   x = 1 angstrom.

   Ditanyakan : simpangan gelombang (Ψ)

   Jawab:

   Persamaan untuk simpangan adalah sebagai berikut:

   ψ (x) = $\sqrt{\frac{2}{L}}$ sin (nπ/L) x

   = $\sqrt{\frac{1}{2}}$ sin (4π/4)(0,5) = $\sqrt{\frac{1}{2}}$ sin (π/2)

   = $\sqrt{\frac{1}{2}}$ angstrom. (skor = 2,5).

3. Diketahui : L = 4 angstrom

   n = 3

   h = 6,626 x 10^{-34} J. det

Ditanyakan : E_3.

Jawab : Substitusikan nilai-nilai di atas ke dalam persamaan berikut:

$$E_3 = \frac{n^2h^2}{8mL^2} = (9 \text{ x } 43,9 \text{ x } 10^{-68})/(8 \text{ x } 9,1 \text{ x } 10^{-31} \text{ x } 16 \text{ x } 10^{-20})$$

$= 0,339 \text{ x } 10^{-17}$ J $= 0,212 \text{ x } 10^{2}$ eV = 21,2 eV. (skor = 2).

4. *Energi Fermi (E_f) adalah energi dari tingkat teratas yang terisi penuh elektron pada keadaan dasar.* (skor = 1).
5. Karena N = 20, dan $n_f = N/2$, maka $n_f = 10$. Jadi Anda hanya memerlukan 10 tingkat energi untuk menempatkan ke dua puluh elektron tersebut. (skor = 1,5).
6. Diketahui : L = 4 angstrom

   N = 20

   $\hbar = 1,055 \text{ x } 10^{-34}$ J. det

   Ditanyakan : E_f

   Jawab: Masukan nilai-nilai di atas ke dalam persamaan berikut:

   $$E_f = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{N\pi}{2L}\right)^2.$$

   $= 1,414 \text{ x } 10^{-16}$ J. = 884,01 eV. (skor = 2,5).

Kunci Jawaban Tes Formatif 2

1. Vektor gelombang Fermi adalah vektor gelombang elektron yang terletak pada tingkat energi Fermi. Secara matematik vektor gelombang Fermi ditulis sebagai berikut:

$$k_f = \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3} = (3\pi^2 n)^{1/3} \quad \text{(skor = 1)}$$

2. Kecepatan Fermi adalah kecepatan elektron yang terletak pada tingkat energi Fermi. Secara matematik ditulis sebagai berikut:

$$v_f = \hbar k_f/m = (\hbar/m)\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3} \quad \text{(skor = 1).}$$

3. Temperatur Fermi itu didefinikan sebagai berikut:

$$T_f = E_f/k_B$$

Temperatur Fermi <u>tidak ada</u> kaitannya dengan temperatur elektron pada tingkat energi Fermi. (skor = 1).

4. Diketahui : L = 5 angstrom.

N = 5 x 10^{20} buah elektron.

$\hbar$ = 1,055 x 10^{-34} J. det

Ditanyakan : E_f

Jawab: Substitusikan nilai-nilai tsb di atas ke dalam persamaan berikut:

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{2/3} = \frac{\hbar^2}{2m}(3\pi^2 n)^{2/3}$$

E_f = 1,47 x 10^{-5} J. = 9,2 x 10^{13} eV. (skor = 2)

5. Diketahui : L = 5 angstrom.

N = 5 x 10^{20} buah elektron.

$\hbar$ = 1,055 x 10^{-34} J. det

Ditanyakan : k_f

Jawab : Vektor gelombang Fermi adalah :

$$k_f = \left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3} = (3\pi^2 n)^{1/3}$$

k_f = 4,91 x 10^{16} /m.   (skor = 1).

6. Diketahui : L = 5 angstrom.

N = 5 x 10^{20} buah elektron.

$\hbar$ = 1,055 x 10^{-34} J. det

Ditanyakan : v_f

Jawab: Kecepatan Fermi adalah:

$$v_f = \hbar k_f/m = (\hbar/m)\left(\frac{3\pi^2 N}{V}\right)^{1/3}$$

v_f = 5,69 x 10^{12} m/det. (skor =1)

7. Diketahui : L = 5 angstrom.

N = 5 x 10^{20} buah elektron.

$\hbar$ = 1,055 x 10^{-34} J. det

Ditanyakan : T_f

Jawab: Temperatur Fermi itu ditulis sebagai berikut:

$T_f = E_f/k_B$. Karena E_f = 1,47 x 10^{-5} J. = 9,2 x 10^{13} eV (lihat jawaban nomor 4 di atas) dan

k_B = 1,38 x 10^{-23} J/K, maka :

T_f = 1,07 x 10^{18} K.   (skor = 1).

8. Diketahui : $N = 5 \times 10^{25}$ buah elektron.

$T = 30$ K

Ditanyakan C_v.

Jawab: Kapasitas panas elektron konduksi pada volume tetap untuk suhu rendah adalah

$C_v = 2\ Nk_B\ (T/T_f) = 2\ R\ (T/T_f)$. Jadi

$C_v = 41400/T_f = 8{,}28$ J/K (skor = 2).

Daftar Pustaka

1. Charle Kittel, Introduction to Solid State Physics, sixth ed., John Wiley & Sons, Inc., New York, 1986.
2. R. K. Puri dan V. K. Babbar, Solid State Physics, S. Chand & Company Ltd., Ram Nagar, New Delhi, 1997.
3. M. A. Omar, Elementary Solid State Physics, Addison-Wesley Publ. Company, London, 1975.
4. Ashcroft/Mermin, Solid State Physics, Saunders College, Philadelphia, 1976.