

PENDAHULUAN

Di dalam modul ini Anda akan mempelajari Gas elektron bebas yang mencakup: Elektron bebas dalam satu dimensi dan elektron bebas dalam tiga dimensi. Oleh karena itu, sebelum mempelajari modul ini Anda terlebih dahulu harus mempelajari modul nomor 3 tentang sifat termal kristal dan modul-modul fisika kuantum.

Materi kuliah dalam modul ini merupakan dasar dari materi yang akan Anda pelajari pada modul-modul selanjutnya.

Pengetahuan yang akan Anda peroleh dari modul ini akan bermanfaat untuk memperdalam pengetahuan anda tentang termodinamika khususnya tentang kapasitas panas suatu logam.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat mencapai beberapa tujuan instruksional khusus, sebagai berikut:

Anda harus dapat

1. menentukan tingkat energi elektron bebas.
2. menjelaskan arti fisis fungsi distribusi Fermi Dirac.
3. menghitung energi Fermi.
4. menghitung kecepatan Fermi.
5. menghitung suhu Fermi.
6. menghitung kapasitas panas elektron bebas.

Materi kuliah dalam modul ini akan disajikan dalam urutan sebagai berikut:

1. KB. 1 Elektron bebas dalam satu dimensi. Di dalam KB. 1 ini Anda akan mempelajari sub-pokok bahasan : tingkat energi elektron bebas, energi Fermi, dan distribusi Fermi-Dirac.

2. KB. 2 Elektron bebas dalam tiga dimensi. Dalam KB. 2 ini Anda akan mempelajari sub-pokok bahasan: energi Fermi untuk tiga dimensi, kecepatan Fermi, temperatur Fermi, dan Kapasitas panas elektron bebas.

Agar Anda dapat mempelajari modul ini dengan baik, ikutilah petunjuk belajar berikut ini.

1. Bacalah tujuan instruksional khusus untuk modul ini.
2. Baca dan pelajari dengan seksama uraian setiap kegiatan belajar.
3. Salinlah konsep dasar dan persamaan-persamaan penting ke dalam buku latihan Anda.
4. Perhatikan dan pelajari dengan baik contoh-contoh soal/masalah dalam setiap kegiatan belajar.
5. Kerjakan semua soal latihan dan usahakan tanpa melihat kunci jawaban terlebih dahulu.

KB 1. GAS ELEKTRON BEBAS DALAM SATU DIMENSI

4.1.1. Tingkat energi.

Teori klasik Drude-Lorentz.

Pada tahun 1900 Drude berpostulat bahwa logam adalah terdiri atas pusat-pusat (cores) ion positif dengan elektron valensi yang bebas bergerak di antara pusat-pusat ion tersebut. Elektron-elektron valensi tersebut dibatasi untuk bergerak di dalam logam akibat adanya gaya tarik elektrostatis antara pusat-pusat ion positif dengan elektron-elektron valensi tersebut. Medan listrik di seluruh bagian dalam logam ini dianggap konstan, dan gaya tolak antara elektron-elektron tersebut diabaikan. Tingkah laku elektron-elektron yang bergerak di dalam logam dianggap sama dengan tingkah laku atom atau molekul di dalam gas mulia. Karena itu, elektron-elektron ini juga dianggap bebas dan sering disebut *gas elektron bebas*. Dan teori yang membahas gas elektron bebas ini sering disebut *model gas elektron bebas*. Namun demikian, sesungguhnya gas elektron bebas adalah dalam beberapa hal berbeda dengan gas biasa. Perbedaan pertama adalah bahwa gas elektron bebas adalah bermuatan negatif, sedangkan molekul-molekul dari gas biasa adalah netral. Kedua, konsentrasi elektron bebas dalam gas elektron bebas adalah jauh lebih besar dari pada konsentrasi molekul dalam gas biasa.

Elektron valensi sering juga disebut sebagai elektron konduksi dan juga mematuhi prinsip Pauli. Elektron-elektron ini bertanggung jawab atas hantaran arus listrik di dalam logam. Karena elektron-elektron konduksi bergerak di dalam medan elektrostatis serbasama (uniform) yang ditimbulkan oleh pusat-pusat ion, maka *energi potensial* mereka tetap konstan dan sering dianggap sama dengan nol. Artinya keberadaan pusat-pusat ion diabaikan. Dengan demikian, energi elektron konduksi sama dengan energi kinetiknya saja. Dan juga karena gerakan elektron

konduksi dibatasi hanya di dalam logam, maka energi potensial sebuah elektron di dalam logam adalah lebih kecil dari pada energi potensial sebuah elektron yang berada tepat diluar permukaan logam. Perbedaan energi potensial ini berfungsi sebagai penghalang dan menyebabkan elektron-elektron di dalam logam tidak dapat keluar meninggalkan permukaan logam tersebut. Oleh karena itu, dalam model gas elektron bebas, gerakan dari elektron-elektron bebas di dalam sebuah logam adalah sama dengan gerakan sebuah gas elektron bebas di dalam sebuah *kotak energi potensial*. Elektron konduksi yang kita bicarakan sekarang ini adalah elektron konduksi di dalam logam yang belum diberi sumber tegangan (beda potensial).

Dengan mengacu pada postulat Drude, yaitu gas elektron bebas bertingkah seperti gas mulia, pada tahun 1909 H. A. Lorentz berpostulat bahwa elektron-elektron yang menyusun gas elektron bebas dalam keadaan ekuilibrium mematuhi statistika Maxwell-Boltzmann. Kedua postulat ini sering dipadukan dan sering disebut *Teori Drude-Lorentz*. Dan karena teori ini didasarkan pada statistika klasik Maxwell-Boltzmann, teori ini pun disebut *Teori Klasik*. Meskipun teori ini bersifat klasik, namun teori ini telah berhasil digunakan untuk menjelaskan beberapa sifat logam. Sebagai contoh, teori ini berhasil membuktikan keabsahan hukum Ohm. Di samping itu, karena elektron bebas dapat dengan mudah bergerak di dalam logam, beberapa logam menunjukkan adanya konduktivitas listrik dan konduktivitas panas yang tinggi. Namun demikian, ratio antara konduktivitas listrik (σ) terhadap konduktivitas panas (κ) adalah selalu konstan, yaitu:

$$\frac{\sigma}{\kappa} = \text{konstan.} \quad (1)$$

Persamaan (1) ini sering disebut *hukum Wiedemann-Franz*.

Di samping keberhasilan-keberhasilan tersebut di atas, teori ini menemui beberapa kegagalan. Diantaranya adalah bahwa teori ini gagal menjelaskan ketergantungan resistivitas terhadap temperatur. Menurut teori ini, resistivitas listrik merupakan fungsi akar kuadrat dari temperatur, \sqrt{T} , dimana T = temperatur. Padahal sesungguhnya, resistivitas listrik merupakan fungsi linier dari temperatur. Kegagalan lainnya adalah tentang kapasitas panas elektron konduksi dan suseptibilitas paramagnetik elektron konduksi. Teori ini gagal menjelaskan kapasitas panas elektron konduksi dan suseptibilitas paramagnetik elektron konduksi. Kapasitas panas dan suseptibilitas paramagnetik yang dihitung oleh teori ini adalah lebih besar dari pada nilai-nilai yang diamati secara eksperimen.

Teori Kuantum Sommerfeld.

Sommerfeld memperlakukan elektron valensi (elektron konduksi) yang bebas bergerak itu secara kuantum mekanik, yaitu dengan cara menggunakan statistika kuantum Fermi-Dirac, dan bukannya statistika klasik Maxwell-Boltzmann. Karena itu, tingkat-tingkat elektron di dalam kotak energi potensial ditentukan dengan menggunakan statistika kuantum. Selanjutnya marilah kita bahas Gas Elektron Bebas di kotak satu dimensi. Sedangkan Gas Elektron Bebas dalam tiga dimensi akan dibahas pada KB-2.

Misalkan Sebuah elektron yang bermassa m bebas bergerak di dalam kristal satu dimensi yang panjangnya L . Elektron tersebut tidak dapat meninggalkan kristal akibat adanya potensial penghalang yang sangat tinggi pada permukaan kristal. Dengan demikian, masalahnya menjadi adalah sama dengan sebuah elektron yang bergerak di dalam kotak energi potensial satu dimensi yang biasa digambarkan oleh sebuah garis yang dibatasi oleh energi potensial penghalang yang

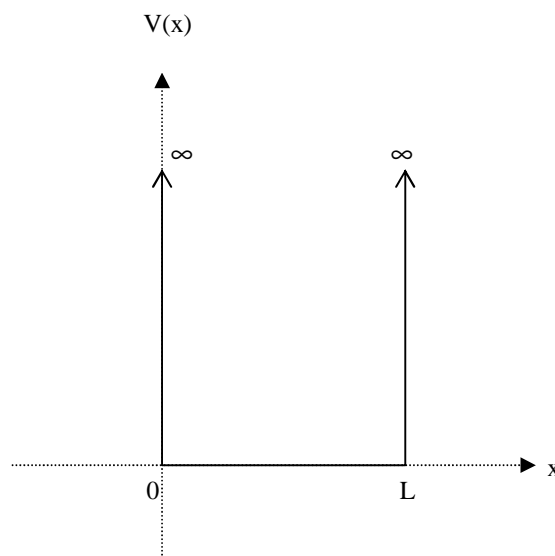
tingginya tak-hingga, seperti ditunjukkan pada Gambar 1. Energi potensial di dalam kotak kita misalkan sama dengan nol, sehingga kita memiliki $V(x)$ sebagai berikut:

$$V(x) = 0 \text{ untuk } 0 < x < L \quad (2)$$

$$V(x) = \infty \text{ untuk } 0 \leq x \text{ dan } x \geq L. \quad (3)$$

Fungsi gelombang untuk elektron yang berada dalam keadaan ke n ditentukan dari persamaan Schrodinger:

$$\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E_n - V) \psi_n = 0 \quad (4)$$



Gambar 1. Kotak energi potensial satu dimensi yang tingginya tak-hingga. Kita misalkan sebuah elektron yang bermassa m ditempatkan di dalam kotak tersebut. Fungsi gelombang dan tingkat energinya ditentukan dari persamaan Schrodinger.

dimana E_n menyatakan energi kinetik elektron yang berada pada tingkat ke-n, V menyatakan energi potensial elektron, dan ψ_n menyatakan fungsi gelombang elektron di tingkat ke-n.

Karena di dalam kotak energi potensial $V = 0$, maka persamaan 4 menjadi:

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E_n) \psi_n = 0. \quad (5)$$

Solusi umum untuk persamaan (5) di atas memiliki bentuk:

$$\psi_n(x) = A \sin kx + B \cos kx. \quad (6)$$

dimana A dan B adalah konstanta sembarang yang dapat ditentukan dari syarat batas. Persamaan (5) dapat ditulis secara lebih sederhana sebagai berikut:

$$\frac{d^2\psi_n}{dx^2} + k^2 \psi_n = 0 \quad (7)$$

Dengan demikian kita dapat melihat bahwa nilai k harus sama dengan:

$$k = \sqrt{\frac{2mE_n}{\hbar^2}}. \quad (8)$$

Karena kedalaman kotak ini adalah tak-hingga, maka kita tidak mungkin menemukan elektron di luar kotak. Hal ini berarti bahwa di luar kotak $\psi_n(x) = 0$. Sedangkan pada $x = 0$ dan $x = L$, $\psi_n(x)$ harus kontinu. Dengan demikian, pada $x = 0$ persamaan (6) menjadi:

$$0 = 0 + B \cos 0.$$

atau $B = 0$. Jadi Fungsi gelombang yang kita peroleh dari persamaan (6) di atas adalah:

$$\psi_n(x) = A \sin kx. \quad (9)$$

Tetapi karena untuk $x = L$ pun $\psi_n(x) = 0$, maka dari persamaan (9) kita peroleh

$$0 = A \sin kL$$

atau $\sin kL = 0$. Hal ini berarti bahwa:

$$kL = n\pi$$

$$\text{atau } k = n\pi/L. \quad (10)$$

Disini $n = 1, 2, 3, 4, \dots$. Tetapi $k = 2\pi/\lambda_n$. Jadi dari persamaan (10) kita dapat menulis

$$2\pi/\lambda_n = n\pi/L. \quad (11)$$

atau

$$L = n\lambda_n/2 \quad (12)$$

Dengan demikian persamaan (9) dapat kita tulis sebagai berikut:

$$\psi_n(x) = A \sin (n\pi/L) x \quad (13)$$

Persamaan (11) ini merupakan fungsi gelombang elektron di dalam sebuah kotak energi potensial yang tingginya tak-hingga. Energi kinetik elektron yang berada di tingkat ke n dapat kita hitung dari persamaan (8) dan (10) di atas. Hasilnya adalah sebagai berikut:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2}. \quad (14)$$

Karena $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, maka persamaan (14) dapat kita tulis sebagai berikut:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}. \quad (15)$$

Dari persamaan (15) kita lihat bahwa tingkat energi (E_n) elektron yang berada di dalam kotak energi potensial yang kedalamannya tak hingga adalah terkuantisasi dan bergantung pada n^2 untuk L tertentu.

Jika fungsi gelombang yang ditunjukkan oleh persamaan (13) dinormalisasi, maka kita dapat menentukan nilai A . Proses normalisasi tersebut dapat dihitung sebagai berikut:

$$\int_0^L \psi_n^*(x) \psi_n(x) dx = 1.$$

catatan: $\psi_n^*(x)$ artinya sekawan dari fungsi gelombang $\psi_n(x)$. Karena fungsi $\psi_n(x)$ merupakan fungsi riil, maka nilai $\psi_n^*(x) = \psi_n(x)$. Jadi

$$\int_0^L \{A \sin(n\pi x/L)\} \{A \sin(n\pi x/L)\} dx = 1.$$

$$A^2 \int_0^L \sin^2(n\pi x/L) dx = 1$$

Karena $\sin^2 (n\pi x/L) = \frac{1}{2} \{1 - \cos (2n\pi x/L)\}$, maka persamaan di atas menjadi

$$A^2 \int_0^L \frac{1}{2} \{1 - \cos (2n\pi x/L)\} dx = 1$$

$$\frac{1}{2} A^2 \left\{ \int_0^L dx - \int_0^L \cos (2n\pi x/L) dx \right\} = 1$$

Karena $\int_0^L \cos (2n\pi x/L) dx = 0$, maka hasil akhir dari normalisasi tersebut di atas adalah sebagai

berikut:

$$A^2 \int_0^L dx = 2$$

atau

$$A^2 = 2/L \text{ atau } A = \sqrt{\frac{2}{L}}. \quad (16)$$

Jadi fungsi gelombang yang dinyatakan oleh persamaan (13) di atas dapat kita tulis secara lengkap sebagai berikut :

$$\Psi_n (x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin (n\pi/L) x \quad (17)$$

Persamaan (17) menyatakan fungsi gelombang yang sudah di normalkan. Artinya, total peluang untuk menemukan partikel di dalam kotak itu akan sama dengan 1 (atau 100%).

Contoh soal:

Sebuah elektron konduksi berada dalam kotak energi potensial yang kedalamannya tak hingga.

Jika lebar kotak tersebut sebesar 2 angstrom, tentukanlah:

- Energi untuk tingkat ke : 1 sampai 5.
- Panjang gelombang untuk tingkat ke 1 sampai 5.
- Fungsi gelombang untuk tingkat ke 1 sampai ke 5.
- Gambar bentuk gelombang untuk fungsi gelombang ke 1 sampai ke 5.

Jawab:

a. Gunakan persamaan (15) : $E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$.

untuk tingkat pertama, $n = 1$, maka $E_1 = h^2/8mL^2$.

untuk tingkat kedua, $n = 2$, maka $E_2 = h^2/2mL^2$.

untuk tingkat ketiga, $n = 3$, maka $E_3 = 9 h^2/8mL^2$.

untuk tingkat keempat, $n = 4$, maka $E_4 = 2 h^2/mL^2$.

untuk tingkat kelima, $n = 5$, maka $E_5 = 25 h^2/8mL^2$.

b. Gunakan persamaan (12): $L = n\lambda_n/2$

untuk $n = 1$, maka $\lambda_n = 2L$. Atau $L = 1/2 \lambda_n$.

untuk $n = 2$, maka $\lambda_n = L$. Atau $L = \lambda_n$.

untuk $n = 3$, maka $\lambda_n = 2L/3$. Atau $L = 1,5 \lambda_n$.

untuk $n = 4$, maka $\lambda_n = L/2$. Atau $L = 2 \lambda_n$.

untuk $n = 5$, maka $\lambda_n = 2 L/5$. Atau $L = 2,5 \lambda_n$.

c. Gunakan persamaan (17): $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(n\pi/L) x$

untuk $n = 1$, $\psi_n(x) = \sin(\pi/2) x$.

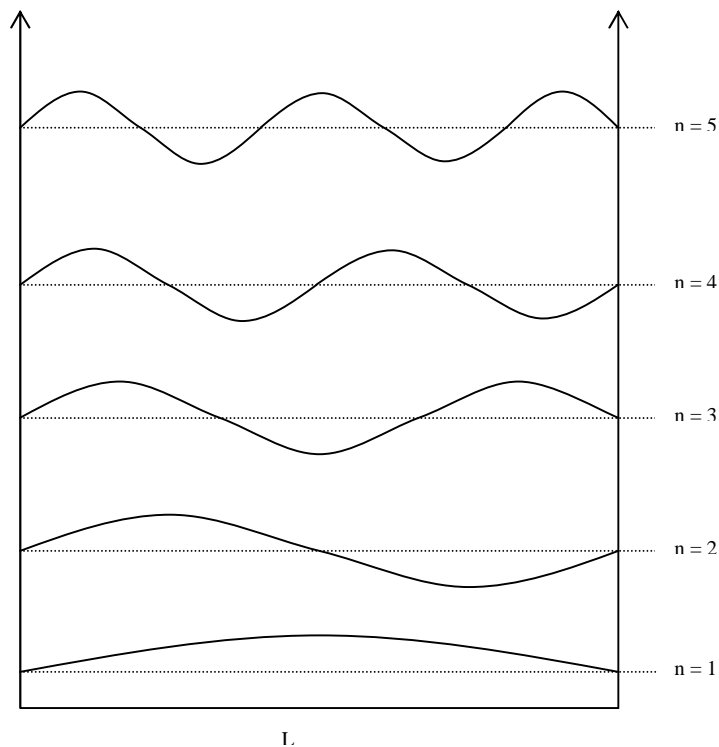
untuk $n = 2$, $\psi_n(x) = \sin(\pi) x$.

untuk $n = 3$, $\psi_n(x) = \sin(3\pi/2) x$.

untuk $n = 4$, $\psi_n(x) = \sin(2\pi) x$.

untuk $n = 5$, $\psi_n(x) = \sin(2,5\pi) x$.

d. Gunakan jawaban b di atas.



Latihan soal:

Sebuah elektron terletak di dalam kotak energi potensial satu dimensi yang kedalamannya tak-hingga. Jika lebar kotak tersebut adalah 4 angstrom, tentukanlah:

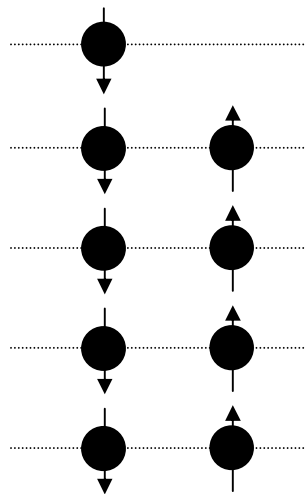
- a. Energi untuk tingkat ke : 2 sampai 7.
- b. Panjang gelombang untuk tingkat ke 2 sampai 7.
- c. Fungsi gelombang untuk tingkat ke 2 sampai ke 7.
- d. Gambar bentuk gelombang untuk fungsi gelombang ke 2 sampai ke 7.

4.1.2. Energi Fermi.

Sekarang marilah kita bahas cara mendistribusikan elektron ke dalam tingkat-tingkat energi yang tersedia seperti yang ditunjukkan oleh persamaan (15) di atas. Elektron-elektron akan disebarkan (didistribusikan) diantara berbagai tingkat energi yang dimungkinkan (yang tersedia) dan dengan cara mematuhi prinsip Pauli yang menyatakan bahwa setiap tingkat energi hanya dapat ditempati oleh paling banyak sebuah elektron, kecuali jika orientasi spin elektron tersebut berbeda. Atau dengan kalimat lain, prinsip Pauli menyatakan bahwa tidak mungkin dua buah elektron menempati satu tingkat energi yang sama, *kecuali* jika spin kedua elektron itu berbeda.

Dalam sebuah zat padat, sebuah tingkat elektron konduksi dapat memiliki 2 buah bilangan kuantum, yaitu n dan m_s , yang masing-masing menyatakan bilangan kuantum utama dan bilangan kuantum (magnetik) spin. Untuk setiap nilai n , m_s dapat memiliki dua nilai, yaitu $1/2$ dan $-1/2$. Ini berarti bahwa setiap tingkat energi yang ditandai oleh nilai n , dapat memiliki dua keadaan. Dan hal ini berarti pula bahwa setiap tingkat energi itu dapat ditempati (diisi) oleh dua buah elektron konduksi; satu elektron memiliki spin up ($+1/2$) dan satu lagi memiliki spin down

($-\frac{1}{2}$). Jadi setiap tingkat energi digandakan dua kali (*doubly degenerate*). Artinya, setiap tingkat energi memiliki dua tempat elektron konduksi. Hal ini sejalan dengan prinsip Pauli. Sebagai contoh, jika kita memiliki 9 buah elektron (4 spin up dan 5 spin down) dalam keadaan dasar (*ground state*), maka jumlah tingkat energi yang diperlukan oleh kesembilan elektron tersebut adalah 5 tingkat ($n = 1, 2, 3, 4,$ dan 5), dan bukan 9 tingkat. Mengapa ? Karena setiap tingkat dapat diisi (ditempati) oleh dua buah elektron yang memiliki spin yang berlawanan (spin up dan spin down), lihat Gambar 2.



Gambar 2. Sembilan buah elektron (4 spin up dan 5 spin down) dalam keadaan dasar.

Misalkan kita mempunyai sebuah sistem yang terdiri atas N buah elektron pada keadaan dasar. Untuk mudahnya kita misalkan N ini merupakan bilangan genap. Untuk menempatkan ke N buah elektron tersebut ke dalam tingkat-tingkat energi, maka kita hanya memerlukan $N/2$ buah tingkat energi. Jika kita misalkan *tingkat teratas* yang terisi penuh itu dengan huruf n_f , maka $n_f = N/2$. *Energi Fermi (E_f) didefinisikan sebagai energi dari tingkat teratas yang terisi penuh elektron pada keadaan dasar.* Jadi jika kita memiliki $N = 10$, maka energi fermi adalah energi untuk tingkat energi kelima pada keadaan dasar.

Karena kita mengetahui bahwa $n_f = N/2$, maka dengan menggunakan persamaan (15) di atas, kita dapat menuliskan energi fermi ini secara matematik, yaitu sebagai berikut:

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n_f \pi}{L} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N\pi}{2L} \right)^2 \quad (18)$$

Jadi nilai energi Fermi bergantung pada jumlah elektron per satuan pajang kotak.

Contoh soal:

Jika $N/L = 2 \text{ elektron/\AA} = 2 \times 10^8 \text{ elektron/cm}$, tentukanlah energi fermi untuk sistem ini!

Jawab:

Gunakan persamaan (18), yaitu:

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N\pi}{2L} \right)^2 = \frac{4,45 \times 10^{-54}}{1,82 \times 10^{-27}} \left(2 \times 10^8 \times \frac{3,14}{2} \right)^2 = 2,4 \times 10^{-10} \text{ erg} = 150 \text{ eV}.$$

Latihan soal:

Hitunglah energi Fermi sebuah sistem yang terdiri atas 4 elektron/ \AA .

4.1.3 Distribusi Fermi-Dirac.

Pada penjelasan di atas disebutkan bahwa penempatan elektron ke dalam tingkat-tingkat energi elektron harus memenuhi prinsip Pauli. Oleh karena itu, tidak mungkin ada dua buah elektron dengan keadaan kuantum yang sama berada pada satu tempat (tingkat energi) yang sama. Keadaan kuantum sebuah elektron biasanya dinyatakan oleh bilangan kuantum untuk elektron tersebut. Ada banyak bilangan kuantum yang sering digunakan untuk menandai sebuah elektron, diantaranya adalah bilangan kuantum utama yang sering diberi label dengan huruf n. Di

samping itu, ada juga bilangan kuantum orbit yang biasa diberi label dengan huruf l . Untuk keperluan sekarang, kita akan menggunakan sebuah set bilangan kuantum yang terdiri atas empat buah bilangan kuantum, yaitu bilangan kuantum k_x , k_y , k_z , dan m_s yang masing-masing menyatakan vektor gelombang dalam arah sumbu x, sumbu y, dan sumbu z, serta bilangan kuantum magnetik. Bilangan kuantum magnetik sering juga diartikan sebagai bilangan kuantum spin dari elektron yang bersangkutan. Tiga bilangan kuantum yang pertama masing-masing hanya memiliki satu nilai, sedangkan bilangan kuantum magnetik dapat memiliki dua nilai, yaitu $m_s = \pm \frac{1}{2}$. Nilai $m_s = +\frac{1}{2}$ artinya elektron itu memiliki spin yang arahnya ke atas (spin up), sedangkan nilai $m_s = -\frac{1}{2}$ artinya elektron itu memiliki spin yang arahnya ke bawah (spin down). Sebenarnya arti spin up dan spin down ini akan lebih berlaku umum jika kita menggunakan kaidah tangan kanan, yaitu sebagai berikut: jika arah putaran gasing (gerak berputar relatif terhadap sumbu elektron itu sendiri) dari elektron itu berlawanan dengan arah putaran jarum jam, maka elektron itu dikatakan memiliki spin up, atau memiliki $m_s = +\frac{1}{2}$. Sebaliknya, jika arah putaran gasing dari elektron itu searah dengan arah jarum jam, maka elektron itu dikatakan memiliki spin down, atau memiliki $m_s = -\frac{1}{2}$. Dengan demikian spin up dan spin down tidak lagi selalu harus diartikan sebagai spin dengan arah ke atas dan ke bawah. Sebab arah ke atas dan ke bawah pada prakteknya menjadi sangat relatif. Bisa saja arah spin itu ke depan dan ke belakang, tetapi dari arah putaran gasing dari setiap elektron itu, kita dapat memilah mana elektron yang memiliki spin up ($m_s = +\frac{1}{2}$) dan mana elektron yang memiliki spin down ($m_s = -\frac{1}{2}$). Oleh karena itu, meskipun ketiga k hanya dapat memiliki masing-masing satu nilai, tetapi karena m_s dapat memiliki dua nilai yaitu $+\frac{1}{2}$ dan $-\frac{1}{2}$, maka setiap tingkat energi elektron dapat diisi (ditempati) oleh dua buah elektron yang memiliki arah spin yang berbeda, yaitu spin up dan spin down.. Hal ini tidak bertentangan dengan prinsip Pauli, sebab jika nilai m_s untuk kedua elektron

itu berbeda maka kedua elektron itu dikatakan memiliki keadaan kuantum yang berbeda pula. Dengan demikian, setiap tingkat energi itu *degenerasi ganda*. Jadi seperti dijelaskan di atas, jika kita memiliki elektron sebanyak N buah, maka pada keadaan dasar (0^0 K) kita perlu tempat (tingkat energi elektron) hanya sebanyak N/2 tingkat. (Hal ini hanya berlaku untuk elektron-elektron yang tidak saling berinteraksi. Jika semua elektron itu saling berinteraksi, maka ceritanya menjadi lain dan tidak akan di bahas pada bagian ini).

Nah sekarang marilah kita bahas pengaruh suhu terhadap penempatan (distribusi) elektron pada tingkat-tingkat energi itu. Pengaruh suhu terhadap distribusi elektron ini diatur oleh fungsi distribusi yang dikemukakan oleh Fermi dan Dirac, sehingga fungsi distribusi ini sering disebut *Fungsi Distribusi Fermi-Dirac*. Fungsi ini secara matematik (dan dibahas secara rinci dalam matakuliah Fisika Statistika) ditulis sebagai berikut:

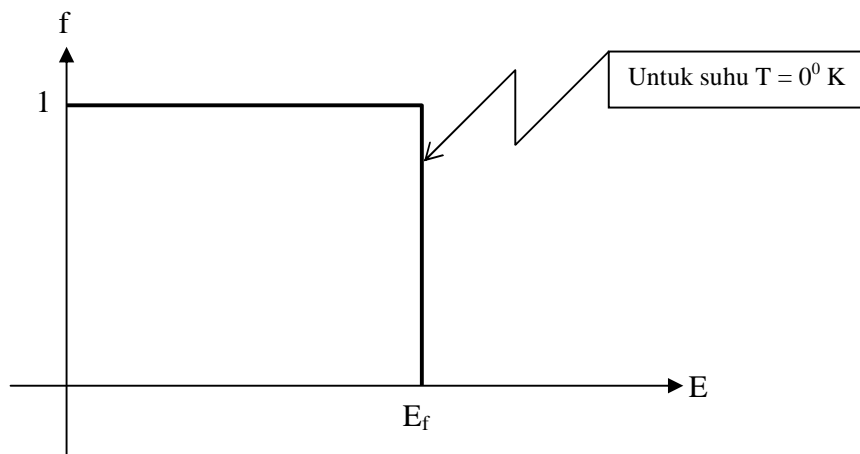
$$f(E) = \frac{1}{\exp((E - \mu) / k_B T) + 1} \quad (19)$$

dimana $f(E)$ = peluang untuk menemukan elektron di tingkat energi E, k_B = konstanta Boltzmann, T = suhu dalam satuan Kelvin, μ = energi potensial kimia dan nilainya bergantung pada suhu (atau merupakan fungsi suhu), dan E = energi dari suatu tingkat energi. Pada $T = 0^0$ K, $\mu = E_f$.

Persamaan (19) ini menyatakan nilai peluang $f(E)$ sebuah tingkat energi elektron (E) untuk ditempati elektron pada suhu T. Sehingga nilai $f(E)$ ini adalah

$$0 \leq f(E) \leq 1.$$

Persamaan tersebut dapat difahami sebagai berikut. Pada keadaan dasar ($T = 0^0\text{K}$) semua tingkat energi yang terletak di bawah energi Fermi dan energi Fermi itu sendiri akan diisi penuh oleh elektron. Artinya, pada keadaan dasar peluang untuk menemukan elektron di tingkat-tingkat energi tersebut adalah 1 atau 100 %. Sebaliknya tidak satu pun tingkat energi yang terletak di atas energi Fermi akan diisi elektron, sehingga peluang untuk menemukan elektron di tingkat energi yang lebih besar dari energi Fermi adalah 0 atau 0%. Sehingga kalau kita buat grafik f sebagai fungsi E untuk keadaan dasar, maka



Gambar 3. Grafik f sebagai Fungsi E pada suhu 0^0 K .

kita akan memperoleh grafik seperti ditunjukkan pada Gambar 3. Grafik ini menunjukkan bahwa pada saat $E = E_f = \mu$:

$$f(E) = 1 \text{ untuk } E \leq E_f. \text{ dan}$$

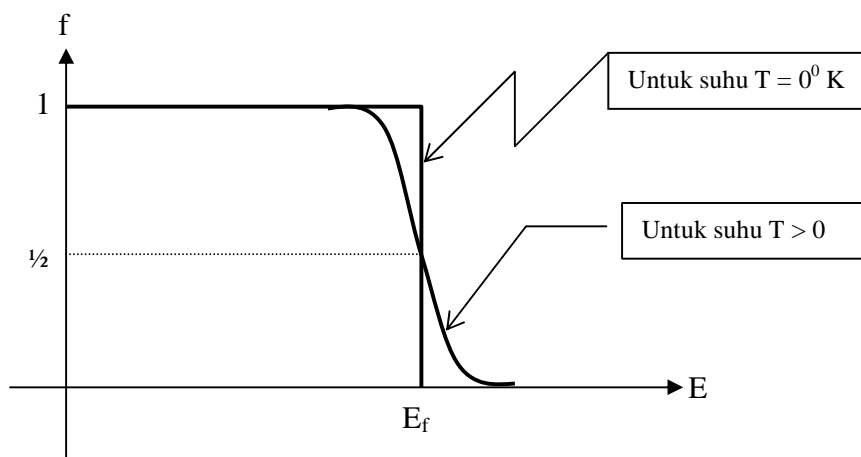
$$f(E) = 0 \text{ untuk } E > E_f.$$

Apabila suhunya *sedikit* lebih besar dari 0^0 K sedemikian rupa sehingga $E - \mu > k_B T$, maka beberapa elektron yang terletak sedikit di bawah energi Fermi akan memperoleh cukup energi untuk locat ke tingkat energi yang lebih tinggi dari energi Fermi, sehingga peluang untuk

menemukan elektron di tingkat energi yang lebih tinggi dari energi Fermi itu tidak lagi 0.

Sehingga peluang di tingkat energi yang sedikit lebih kecil dari energi Fermi itu akan lebih kecil dari satu dan sedikit di atas energi Fermi akan lebih besar dari 0. Untuk semua suhu, nilai $f(E) = \frac{1}{2}$ pada saat $E = \mu$, karena pada saat ini penyebut dari persamaan (19) di atas akan sama dengan

2. Keadaan ini dapat dilukiskan dalam sebuah grafik fungsi sebagai berikut:



Gambar 4. Grafik f sebagai fungsi E untuk $T > 0$. Perhatikan bahwa pada Gambar ini Grafik f sebagai fungsi E untuk $T = 0^0$ K masih ditunjukkan. Hal ini sebagai pembandingan saja.

Gambar 4 ini menerangkan kepada kita bahwa meskipun suhu (T) logam itu naik, tetapi energi panas yang besarnya hanya sekitar $k_B T$ tidak dibagi merata oleh seluruh elektron. Nilai energi panas ini ($k_B T$) pada suhu kamar hanya bernilai sekitar 0,025 eV. Sedangkan nilai energi Fermi untuk sebuah logam biasanya sekitar 5 eV. Jadi nilai $k_B T$ ini jauh lebih kecil dari nilai E_F . Akibatnya hanya elektron-elektron yang paling dekat tingkat energi Fermi (E_f) saja yang akan mengalami eksitasi (loncat ke tingkat yang lebih tinggi). Oleh karena itu, nilai peluang yang akan berubah pun hanya nilai peluang untuk energi-energi yang sedikit saja di bawah energi Fermi.

Rangkuman.

1. Ratio antara konduktivitas listrik (σ) terhadap konduktivitas panas (κ) adalah selalu konstan, yaitu:

$$\frac{\sigma}{\kappa} = \text{konstan.}$$

2. Fungsi gelombang yang dinormalisasi untuk sebuah elektron yang terletak di dalam sebuah sumur potensial yang lebarnya L dan kedalamannya tak-terhingga ditulis secara lengkap sebagai berikut :

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(n\pi/L)x.$$

3. Energi kinetik elektron yang berada di tingkat ke n dapat kita hitung dari persamaan

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}. \quad (15)$$

Dari persamaan (15) kita lihat bahwa tingkat energi elektron (E_n) yang berada di dalam kotak energi potensial yang kedalamannya tak hingga adalah terkuantisasi dan bergantung pada n^2 untuk L tertentu.

4. Energi Fermi (E_f) didefinisikan sebagai energi dari tingkat teratas yang terisi penuh elektron pada keadaan dasar. Jadi jika kita memiliki $N = 10$, maka energi fermi adalah energi untuk tingkat energi kelima pada keadaan dasar.

5. Secara amtematika energi fermi dapat ditulis sebagai berikut:

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{n_f \pi}{L} \right)^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N\pi}{2L} \right)^2.$$

6. Fungsi Distribusi Fermi-Dirac secara matematik ditulis sebagai berikut:

$$f(E) = \frac{1}{\exp((E - \mu) / k_B T) + 1}$$

dimana $f(E)$ = peluang untuk menemukan elektron di tingkat energi E , k_B = konstanta

Boltzmann, T = suhu dalam satuan Kelvin, μ = energi potensial kimia dan nilainya bergantung pada suhu (atau merupakan fungsi suhu), dan E = energi dari suatu tingkat energi. Pada $T = 0^0$

K, $\mu = E_f$.