PENDAHULUAN

Di dalam modul ini Anda akan mempelajari fungsi gelombang spin yang mencakup: matrik spin dan gerak elektron di dalam medan magnet. Oleh karena itu, sebelum mempelajari modul ini Anda terlebih dahulu harus mempelajari modul nomor 4 tentang elemen matrik.

Materi kuliah dalam modul ini merupakan dasar dari materi yang akan Anda pelajari pada modul-modul selanjutnya, terutama modul nomor 6 dari matakuliah Fisika Kuantum.

Pengetahuan yang akan Anda peroleh dari modul ini akan barmanfaat untuk mempelajari materi kuliah Fisika Zat Padat, Fisika Inti, Fisika Atom, Fisika Partikel, dan ilmu-ilmu Fisika lanjut lainnya.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapakan dapat mencapai beberapa tujuan instruksional khusus, sebagai berikut:

Anda harus dapat

1. menuliskan momentum sudut dalam bentuk matrik
2. membuktikan bahwa matrik-matrik Pauli adalah antikomutatif
3. menghitung momen megnet sebuah elektron
4. menghitung frekuensi gereak presesi, dan
5. menghitung spin total dari sebuah sistem partikel

Materi kuliah dalam modul ini akan disajikan dalam urutan sebagai berikut:

1. KB. 1 Matrik Spin. Di dalam KB. 1 ini Anda akan mempelajari sub-pokok bahasan : matrik-matrik momentum sudut, dan matrik-matrik spin Pauli.

2. KB. 2 Gerak elektron dalam medan magnet. Dalam KB. 2 ini Anda akan mempelajari sub-pokok bahasan: momen magnet elektron, gerak presesi elektron, dan penjumlahan dua buah spin.

Agar Anda dapat mempelajari modul ini dengan baik, ikutilah petunjuk belajar berikut ini.

1. Bacalah tujuan instruksional khusus untuk modul ini.
2. Baca dan pelajari dengan seksama uraian setiap kegiatan belajar.
3. Salinlah konsep dasar dan persamaan-persamaan penting ke dalam buku latihan Anda.
4. Perhatikan dan pelajari dengan baik contoh-contoh soal/masalah dalam setiap kegiatan belajar.
5. Kerjakan semua soal latihan dan usahakan tanpa melihat kunci jawaban terlebih dahulu.

KB. 1 MATRIK SPIN

1.1 Matrik-matrik momentum sudut.

Dalam modul nomor 4 dari matakuliah Fisika Kuantum Anda telah mempelajari representasi matrik dari sebuah operator. Di dalam modul tersebut telah dijelaskan bahwa representasi matrik (penulisan dalam bentuk matrik) dari sebuah operator A dalam basis-basis yang terdiri dari eigenvektor-eigenvektor A adalah berbentuk *matrik diagonal*. Artinya semua elemen matrik dari operator A itu adalah nol kecuali elemen matrik a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, ……, a_{nn} (elemen matrik dalam arah diagonal). Untuk mengingatkan kembali marilah kita ambil contoh operator-operator momentum sudut L^2 dan L_z. Di dalam koordinat bola, L^2 dan L_z memiliki eigenfuncntion (fungsi eigen/fungsi yang tepat) $Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)$, dimana ℓ dan m masing-masing adalah bilangan kuantum orbit dan bilangan kuantum magnetik, ϑ dan φ adalah sudut-sudut polar. Eigenfuncntion $Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)$ ini adalah merupakan basis yang dimaksud di atas. Perhatikan bahwa eigenvektor diartikan sama dengan eigenfuncntion. Elemen-elemen matrik dari L^2 dan L_z biasa diberi simbol masing-masing dengan huruf $L^2_{\ell m,\ell' m'}$ dan $(L_z)_{\ell m,\ell' m'}$. Sebagai contoh marilah kita hitung elemen matrik $L^2_{\ell m,\ell' m'}$.

Di dalam himpunan basis { $Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)$ } elemen-elemen matrik $L^2_{\ell m,\ell' m'}$ dapat dihitung sebagai beriktut:

$$L^2_{\ell m,\ell' m'} = \langle \ell m | L^2 | \ell' m' \rangle = \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta) \int_0^{2\pi} d\varphi \, Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)^* \quad L^2 \; Y_{\ell'}^{m'}(\vartheta,\varphi)$$

$$L^2_{lm,l'm'} = \hbar^2 \, \ell(\ell+1) \; \delta_{\ell\ell'} \, \delta_{mm'} \qquad , \qquad (1)$$

dimana $\delta_{\ell\ell'}$ dan $\delta_{mm'}$ adalah fungsi delta Kronecker yang nilainya adalah sebagai berikut:

$\delta_{\ell\ell'}$ = 1 jika $\ell = \ell'$

$\delta_{\ell\ell'}$ = 0 jika $\ell \neq \ell'$

$\delta_{mm'}$ = 1 jika m = m'

$\delta_{mm'}$ = 0 jika m $\neq$ m'.

Jadi, persamaan (1) hanya akan bernilai $\hbar^2 \; \ell(\ell+1)$ jika dan hanya jika $\ell = \ell'$ dan m = m'. Artinya, nomor kolom = dengan nomor baris. Dengan demikian, elemen-elemen matrik yang bernilai $\hbar^2 \; \ell(\ell+1)$ adalah mereka yang terletak pada garis diagonal matrik tersebut. Karena itu matrik L^2 disebut matrik diagonal.

Demikian halnya dengan matrik L_z. Element-elemen matrik $(L_z)_{\ell m, \ell' m'}$ dapat dihitung dengan menggunakan persamaan berikut:

$$(L_z)_{\ell m, \ell' m'} = \langle \ell m | \; L_z \; | \ell' m' \rangle = \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta) \int_{0}^{2\pi} d\varphi \; Y_{\ell}^{m}(\vartheta, \varphi)^* \; L_z \; Y_{\ell'}^{m'}(\vartheta, \varphi)$$

$$(L_z)_{\ell m, \ell' m'} = m\hbar \; \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} \qquad (2)$$

sehingga elemen-elemen matrik yang bernilai $m\hbar$ adalah mereka yang terletak pada garis diagonal, sedangkan elemen-elemen matrik lainnya adalah nol.

Cara menuliskan elemen matrik dari sebuah matrik adalah sebagai berikut : baris-baris dan kolom-kolom sebuah matrik disusun sedemikian rupa sehingga untuk setiap nilai ℓ, m bernilai mulai dari -ℓ sampai +ℓ dengan selang 1. Demikian pula m'. Untuk setiap nilai ℓ', m' bernilai muali dari -ℓ' sampai +ℓ' dengan selang 1. Dalam hal ini m menyatakan baris dan m' menyatakan kolom dari matrik tersebut.

Contoh :

1. untuk $\ell = 0$ dan $\ell' = 0$, nilai m = m' = 0, sehingga matrik $L^2 = [0]$.
2. Untuk $\ell = 1$ dan $\ell' = 1$, maka nilai m = -1, 0, +1. Dan juga nilai m' = -1, 0, +1. Nilai elemen matrik $L^2_{\ell m,\ell' m'}$ adalah:

$L^2_{\ell m,\ell' m'} = \hbar^2 \ \ell(\ell+1) \ \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} = 2\hbar^2$. Jadi matrik L^2 dapat ditulis sebagai berikut :

$$L^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ingatlah bahwa nilai m menyatakan baris, dan m' menyatakan kolom. Elemen-elemen matrik L^2 tersebut dihitung dengan menggunakan persamaan (1).

Contoh: element matrik $L^2_{11,11} = \hbar^2 \ \ell(\ell+1) \ \delta_{\ell\ell'} \ \delta_{mm'}$.

$$= \hbar^2 \ 1(1+1) \ \delta_{11}, \delta_{11}. = 2\hbar^2 \ .$$

Dalam contoh ini, nilai kedua $\delta = 1$, karena $\ell = \ell'$, dan m = m'.

Contoh lainnya adalah elemen matrik $L^2_{10,11}$. Dengan menggunakan persamaan (1) Anda dapat menentukan nilai elemen matrik $L^2_{10,11}$ sebagai berikut :

$$L^2_{10,11} = \hbar^2 \ \ell(\ell + 1) \ \delta_{11} \ \delta_{01}.$$

$$= \hbar^2 \text{ x } 1 \text{ x } (1+1) \text{ x } 1 \text{ x } 0 = 0.$$ (catatan: x = operator kali).

Perhatikan dengan teliti urutan indek untuk kedua δ dan indek untuk L^2.

Latihan:

1. Buktikan nilai elemen-elemen matrik lainnya.
2. Tentukan elemen-elemen matrik L^2 untuk $\ell = 2$ dan $\ell' = 2$. Petunjuk untuk menjawab soal-soal latihan ini adalah sebagai berikut:
   1. tentukan nilai-nilai m dan m'.

2. gunakan persamaan (1) untuk menghitung elemen-elemen matrik $L^2_{\ell m,\ell' m'}$.

Perhatikan bahwa elemen-elemen matrik yang bernilai tidak sama dengan nol adalah elemen-elemen matrik yang terletak pada diagonal matrik tersebut. Karena itu, matrik L^2 disebut matrik diagonal.

Dari contoh-contoh dan jawaban soal-soal latihan di atas, Anda dapat menyusun sebuah tabel untuk elemen-elemen matrik $L^2_{\ell m,\ell' m'}$. Tabel tersebut akan tampak sebagai berikut:

	$\downarrow$ ℓ	$\downarrow$ m									
ℓ' $\rightarrow$			0	1	1	1	2	2	2	2	2
m' $\rightarrow$			0	1	0	-1	2	1	0	-1	-2
	0	0	0								
	1	1		$2\hbar^2$	0	0					
	1	0		0	$2\hbar^2$	0			0		
	1	-1		0	0	$2\hbar^2$					
	2	2					$6\hbar^2$	0	0	0	0
	2	1					0	$6\hbar^2$	0	0	0
	2	0			0		0	0	$6\hbar^2$	0	0
	2	-1					0	0	0	$6\hbar^2$	0
	2	-2					0	0	0	0	$6\hbar^2$

Catatan: angka nol yang dicetak besar menyatakan matrik-matrik yang semua elemennya bernilai nol.

Selanjutnya marilah kita bahas elemen matrik $(L_z)_{lm,l'm'}$, seperti yang ditunjukan oleh persamaan (2) di atas. Marilah kita ambil contoh untuk $\ell = \ell' = 0$, dan untuk $\ell = \ell' = 1$.

1. Matrik elemen $(L_z)_{lm,l'm'}$ untuk $\ell = \ell' = 0$.

   Jika $\ell = 0$, maka m = 0, sehingga:

   Elemen matrik $(L_z)_{lm,l'm'} = (L_z)_{00,00} = m\ \hbar\, \delta_{00}.\ \delta_{00}$.

   Meskipun nilai kedua $\delta = 1$, tetapi karena nilai m = 0, maka

   $$(L_z)_{lm,l'm'} = (L_z)_{00,00} = 0.$$

2. Matrik elemen $(L_z)_{lm,l'm'}$ untuk $\ell = \ell' = 1$.

   Karena $\ell = \ell' = 1$, maka nilai m = -1, 0, 1 dan nilai m'= -1, 0, 1 sehingga banyaknya elemen matrik yang dapat diperoleh adalah 9 buah, yaitu sebagai berikut :

   a. Baris ke 1: $(L_z)_{11,11}$, $(L_z)_{10,11}$, $(L_z)_{1(-1),11}$.
   b. Baris ke 2: $(L_z)_{11,10}$, $(L_z)_{10,10}$, $(L_z)_{1(-1),10.}$
   c. Baris ke 3: $(L_z)_{11,1(-1)}$, $(L_z)_{10,1(-1)}$, $(L_z)_{1(-1),1(-1)}$.

   Perhatikan bahwa indek yang bernilai negatif disimpan di dalam tanda kurung (…). Dengan menggunakan persamaan (2) di atas kita dapat menghitung ke 9 elemen matrik tersebut. Sebagai contoh, marilah kita hitung elemen matrik $(L_z)_{11,11}$. Untuk elemen matrik ini kita tahu bahwa nilai $\ell = \ell' = 1$, dan nilai m = m' = 1 sehingga elemen matrik ini dapat dihitung sebagai berikut:

   $$(L_z)_{11,11} = m\ \hbar\ \ \delta_{11}\ .\ \delta_{11} = \hbar\,.$$

   Sebagai contoh yang lain, marilah kita hitung elemen matrik $(L_z)_{10,1(-1)}$. Untuk elemen matrik ini kita tahu bahwa nilai $\ell = \ell' = 1$, dan m = 0, m' = -1 sehingga:

$(L_z)_{10,1(-1)} = m\ \hbar\ \ \delta_{11}.\delta_{0(-1)}$.

Disamping m = 0, juga $\delta_{0(-1)} = 0$, sehingga nilai elemen matrik $(L_z)_{10,1(-1)} = 0$.

Latihan:

Hitunglah ketujuh elemen matrik lainnya untuk $\ell = \ell' = 1$ dari matrik L_z tersebut di atas.

<u>*Petunjuk*</u>:

1. Tentukan nilai-nilai ℓ, m, ℓ', dan m' untuk setiap elemen matrik .
2. Gunakan persamaan (2) di atas.

Apabila Anda dapat menjawab soal latihan ini dengan benar, maka Anda akan dapat menuliskan matrik L_z dengan elemen-elemen matrik sebagai berikut:

$$L_z = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Latihan:

Tentukanlah nilai-nilai elemen matrik L_z untuk $\ell = \ell' = 2$ serta tuliskan semua nilai matrik tersebut dalam bentuk sebuah matrik L_z.

<u>*Petunjuk*</u>:

1. Tentukan nilai-nilai m dan m'.
2. Gunakan persamaan (2).
3. Susun semua elemen matrik dalam sebuah matrik dengan ketentuan m = nomor baris, dan m' = nomor kolom.

Secara umum, semua elemen matrik $(L_z)_{lm,l'm'}$ untuk matrik L_z dapat dirangkum dalam sebuah tabel seperti di bawah ini:

	↓ ℓ	↓ m									
ℓ' →			0	1	1	1	2	2	2	2	2
m’ →			0	1	0	-1	2	1	0	-1	-2
	0	0	0								
	1	1		$1\hbar$	0	0					
	1	0		0	$1\hbar$	0			0		
	1	-1		0	0	$-1\hbar$					
	2	2					$2\hbar$	0	0	0	0
	2	1					0	$1\hbar$	0	0	0
	2	0		0			0	0	0	0	0
	2	-1					0	0	0	$-\hbar$	0
	2	-2					0	0	0	0	$-2\hbar$

Selanjutnya marilah kita hitung matrik L_x dan L_y yang merupakan komponen dari marik L. Untuk menghitung matrik-matrik L_x dan L_y di dalam basis tersebut di atas Anda dapat menggunakan matrik-matrik untuk operator L_+ dan L_-, yaitu sebagai berikut:

$L_x = ½ (L_+ + L_-)$ dan $L_y = - i/2 (L_+ - L_-)$ (3).

Jadi tugas kita adalah menentukan matrik-matrik untuk L_+ dan L_-. Tetapi karena $L_+ = L_-^*$ (Baca : L_+ sama dengan ajoin/sekawan dari L_-) maka kita cukup menentukan salah satu matrik saja, yaitu L_+ saja atau L_- saja.

Di dalam modul nomor 4 dari matakuliah fisika kuantum Anda telah mempelajari hubungan antara elemen matrik-matrik $(L_+)_{\ell m, \ell' m'}$ dan $(L_-)_{\ell m, \ell' m'}$ dengan fungsi gelombang Y_ℓ^m, yaitu sebagai berikut:

$$(L_\pm)_{\ell m, \ell' m'} = \{(\ell' \mp m')(\ell' \pm m' + 1)\}^{1/2}\ \hbar\ \delta_{\ell \ell'} \delta_{mm' \pm 1} \qquad (4)$$

Contoh: untuk $\ell = 1$ dan $\ell' = 1$ tentukanlah elemen-elemen matrik $(L_+)_{11,11}$, $(L_+)_{11,10}$, $(L_-)_{10,11}$, dan $(L_-)_{10,10}$.

Jawab:

Untuk $\ell = 1$ dan $\ell' = 1$ berarti m = -1, 0, 1 dan m' = -1, 0, 1. Karena kita hanya diminta untuk menghitung elemen matrik matrik $(L_+)_{11,11}$, $(L_+)_{11,10}$, $(L_-)_{10,11}$, dan $(L_-)_{10,10}$ saja, maka nilai-nilai m dan m' yang terlibat hanya 1 dan 0 saja. (Silahkan amati nilai indek dari setiap elemen matrik tersebut). Dengan demikian, elemen-elemen matrik tersebut di atas dapat kita hitung sebagai berikut:

a. $(L_+)_{11,11} = \{(1-1)(1+1+1)\}^{1/2}\ \hbar\, \delta_{11}.\delta_{12}.$

$= 0.$

Perhatikan bahwa nilai elemen matrik $(L_+)_{11,11}$ sama dengan nol tidak hanya disebabkan oleh (1-1) saja, tetapi juga kerana nilai delta δ_{12} yang juga sama dengan nol.

d. $(L_+)_{11,10} = \{(1-0)(1+0+1)\}^{1/2}\ \hbar\ \delta_{11}.\delta_{11}.$

$= \hbar\sqrt{2}.$

c. $(L_-)_{10,11} = \{(1+1)(1-1+1)\}^{1/2}\ \hbar\, \delta_{11}.\delta_{00}.$

$= \hbar\sqrt{2}.$

d. $(L_-)_{10,10} = \{(1+0)(1-0+1)\}^{1/2}\ \hbar\, \delta_{11}.\ \delta_{0(-1)}.$

$= 0,$ karena $\delta_{0(-1)} = 0.$

Apabila Anda menghitung semua elemen matrik $(L_+)_{\ell m, \ell' m'}$ untuk $\ell = 1$ dan $\ell' = 1$, serta menuliskannya dalam bentuk matrik, maka Anda dapat menulis operator L_+ dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$L_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Demikian juga halnya dengan operator L_-. Cobalah hitung semua elemen matrik $(L_-)_{\ell m, \ell' m'}$ untuk $\ell = 1$ dan $\ell' = 1$ dengan menggunakan persamaan (4) dan contoh di atas, kemudian tuliskan pula matrik L_-. Matrik L_- tersebut akan tampak sebagai berikut :

$$L_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Akhirny kita dapat menentukan matrik L_x dan L_y dengan menggunakan persamaan (3), (5), dan (6) di atas. Dengan menggunakan ketiga persamaan tersebut kita dapat menghitung matrik L_x dan L_y sebagai berikut :

a. $L_x = ½ (L_+ + L_-)$

$$L_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Perhatikan bahwa kita telah menyederhanakan penulisan *tanda akar* untuk semua elemen matrik.

Hal ini karena $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b. $L_y = -\frac{i}{2}\,(L_+ - L_-)$

$$L_y = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2i}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_y = \frac{\hbar}{i\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Perhatikan bahwa $-\frac{i}{2} = +\frac{1}{2i}$.

5.2 Matrik-matrik spin Pauli.

Seperti kita ketahui bahwa momentum sudut suatu partikel dapat dibagi menjadi dua, yaitu ***momentum sudut orbit (*** $\vec{L}$ ***)*** dan ***momentum sudut intrinsik (*** $\vec{S}$ ***)*** atau sering disebut ***spin***. Kita baru saja membahas representasi momentum sudut $\vec{L}$ dalam bentuk matrik. Sekarang kita akan membicarakan representasi Spin ($\vec{S}$) dalam bentuk matrik, serta akan mendifinisikan matrik spin Pauli (σ).

Vektor momentum sudut spin sering ditandai dengan simbol $\vec{S}$ (Perhatikan tanda vektor). Sifat-sifat dari operator mementum sudut spin S (Tanpa tanda vektor) adalah sama dengan sifat-sifat untuk momentum sudut orbit. Sebagai contoh, hubungan komutatif antara komponen-komponen S_x, S_y, dan S_z memenuhi aturan berikut:

$[S_x, S_y] = i\hbar\ S_z$; $[S_y, S_z] = i\hbar\ S_x$; $[S_z, S_x] = i\hbar\ S_y$. Disamping itu, seperti halnya untuk momentum sudut L, kita juga dapat mendefinisikan operator-operator

S_+ dan $S\_$ untuk momentum sudut spin, yaitu sebagai berikut :

$$S_{\pm} = S_x \pm i\, S_y\ . \qquad (9)$$

Demikian pula halnya dengan persamaan eigenvalu-nya. Kita juga dapat menuliskan persamaan eigenvalue untuk spin sebagai berikut:

$$S^2 |s, m_s\rangle\ =\ \hbar^2\, s\,(s + 1)\ |s, m_s\rangle\ \text{; dan } S_z |s, m_s\rangle\ =\ \hbar\, m_s\ |s, m_s\rangle. \qquad (10)$$

Perhatikan bahwa nilai-nilai $\hbar^2\, s\,(s + 1)$ dan $\hbar\, m_s$ masing-masing disebut *eigenvalue* dari S^2 dan S_z. Sedangkan vektor $|s, m_s\rangle$ disebut *eigenvektor* dari S^2 dan S_z.

Untuk sebuah nilai s tertentu, nilam m_s adalah mulai dari –s sampai +s dengan step +1. Sebagai contoh, untuk s = 1, maka nilai m_s = -1, 0, dan 1. Untuk nilai s = 2, maka nilai m_s = -2, -1, 0, 1, dan 2. Untuk s = 5/2, maka nilai m_s = -5/2, -3/2, -1/2, 1/2, 3/2, dan 5/2.

Contoh partikel yang memiliki nilai spin s = 0 adalah *meson*, dan partikel yang memiliki spin s = 1 adalah *foton*. Sedangkan partikel-partikel yang memiliki nilai spin s = ½ adalah: *elektron*, *proton*, dan *netron*.

Selanjutnya marilah kita pelajari fungsi eigen (eigenfuction/eigenstate) untuk partikel yang memiliki spin ½, seperti elektron, proton, dan netron. Karena partikel-partikel tersebut memiliki spin = ½ , maka m_s bernilai – ½ dan + ½ . Selanjutnya marilah kita definisikan fungsi eigen untuk s = ½ , m_s = ½ dan s = ½ , m_s = - ½ sebagai berikut :

$$\alpha = |s, m_s\rangle\ =\ \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle \text{ dan}$$

$$\beta = |s, m_s\rangle\ =\ \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle. \qquad (11)$$

Dengan demikian kita dapat menuliskan persamaan eigenvalue untuk S^2 dan S_z sebagai berikut:

$S^2 \alpha = \frac{3}{4}\ \hbar^2\ \alpha$; $S_z \alpha = \hbar/2\ \alpha$.

$S^2 \beta = \frac{3}{4}\ \hbar^2\ \beta$; $S_z \beta = -\hbar/2\ \beta$.

Operator-operator S_+ dan $S\_$ dalam fungsi eigen α dan β dapat ditulis sebagai berikut:

$$S_+ |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s+1)}\ |s, m_s+1\rangle \quad (12)$$

$$S_- |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s-1)}\ |s, m_s-1\rangle . \quad (13)$$

Untuk s = ½ , kita punya m_s = ½ dan m_s = - ½ . Jika nilai-nilai ini kita substitusikan ke dalam persamaan (12) dan (13), maka kita akan memperoleh persamaan untuk S_+ dan $S\_$ sebagai berikut:

a. untuk s = ½ dan m_s = ½ .

$(S_x + iS_y)\alpha = S_+\ |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle$ = 0; karena nilai di dalam akar = 0. (14)

$$(S_x - iS_y)\alpha = S_-\ |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\, |\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \hbar\ \beta. \quad (15)$$

Jika persamaan (14) dan (15) di atas kita jumlahkan, maka kita akan memperoleh persamaan (bukan persamaan eigenvalue, karena vektor sebelah kiri adalah α sedangkan di ruas kanan adalah β):

$$S_x \alpha = (\tfrac{1}{2})\hbar \beta, \quad (16)$$

Dan jika kita kurangkan maka kita akan memperoleh persamaan (bukan persamaan eigenvalue, karena vektor sebelah kiri adalah α sedangkan di ruas kanan adalah β):

$$S_y \alpha = (i/2)\hbar \beta. \quad (17)$$

b. untuk s = ½ dan m_s = - ½ .

$(S_x + iS_y)\beta = S_+\ |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \hbar\, |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \hbar\ \alpha$, dan (18)

$(S_x - iS_y)\beta = S_{-}|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = 0$; Karena nilai di dalam akar = 0. (19)

Jika kedua persamaan ini dijumlahkan, maka Anda akan mendapatkan persamaan (juga bukan persamaan eigenvalue):

$S_x\,\beta = (½)\,\hbar\,\alpha,$ (20)

Dan jika dikurangkan, Anda akan mendapatkan persamaan (bukan persamaan eigenvalue):

$S_y\,\beta = -(i/2)\,\hbar\,\alpha.$ (21)

Dengan demikian, kita dapat simpulkan bahwa persamaan-persamaan untuk S_x, S_y, dan S_z di dalam basis α dan β sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{l} S_x\,\alpha = (½)\,\hbar\,\beta \quad \text{dan } S_x\,\beta = (½)\,\hbar\,\alpha; \\ S_y\,\alpha = (i/2)\,\hbar\,\beta, \text{ dan } S_y\,\beta = -(i/2)\,\hbar\,\alpha. \\ S_z\,\alpha = (½)\,\hbar\,\alpha, \text{ dan } S_z\,\beta = -\,(½)\,\hbar\,\beta. \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Catatan: Kedua persamaan untuk S_z di dalam persamaan (22) adalah merupakan persamaan eigenvalue.

Dengan menggunakan persamaan eigenvalue di atas (persamaan 22), kita dapat menentukan matrik-matrik yang merepresentasikan operator-operator S_x, S_y, dan S_z di dalam basis α dan β, yaitu sebagai berikut:

$$\left.\begin{array}{l} S_x = \begin{pmatrix} \langle\alpha|S_x|\alpha\rangle & \langle\alpha|S_x|\beta\rangle \\ \langle\beta|S_x|\alpha\rangle & \langle\beta|S_x|\beta\rangle \end{pmatrix} = \dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\[2ex] S_y = \begin{pmatrix} \langle\alpha|S_y|\alpha\rangle & \langle\alpha|S_y|\beta\rangle \\ \langle\beta|S_y|\alpha\rangle & \langle\beta|S_y|\beta\rangle \end{pmatrix} = \dfrac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\[2ex] S_z = \begin{pmatrix} \langle\alpha|S_z|\alpha\rangle & \langle\alpha|S_z|\beta\rangle \\ \langle\beta|S_z|\alpha\rangle & \langle\beta|S_z|\beta\rangle \end{pmatrix} = \dfrac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Operator spin biasa didefinisikan sebagai berikut:

$\hat{\sigma} = \frac{2}{\hbar}\hat{S}$, dimana $\hat{\sigma}$ merupakan <u>operator spin Pauli</u> dan $\hat{S}$ merupakan <u>operator Spin</u>.

Dengan menggunakan persamaan (23) kita dapat menuliskan matrik yang merepresentasikan komponen operator spin Pauli σ_x sebagai berikut:

$$\sigma_x = \frac{2}{\hbar} \text{ x } \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Dengan cara yang sama, kita dapat menuliskan komponen-komponen operator spin Pauli σ_y, σ_z sebagai berikut:

$$\sigma_y = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan} \qquad (25)$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \qquad (26)$$

Ketiga matrik inilah (persamaan 24, 25, dan 26) yang kita cari dan kita sebut sebagai <u>***matrik-matrik spin Pauli***</u>.

Eigenvektor α dan β dapat dinyatakan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; dan $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sehingga persamaan orthonomalisasi dari kedua vektor tersebut dapat kita hitung sebagai berikut:

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.$$

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

$\langle\beta|\beta\rangle = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 1.$

$\langle\beta|\alpha\rangle = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0.$

Contoh soal :

Hitunglah eigenvalue dan eigenvektor untuk S_x dari sebuah spin setengah (s = ½).

Jawab:

a. Kita misalkan eigenvalue dari S_x tersebut adalah E_x, dan eigenvektornya $|A\rangle$ yang komponennya adalah $a_1$dan a_2, sehingga kita dapat menuliskan persamaan eigenvalue sebagai berikut:

$S_x\ |A\rangle = E_x\ |A\rangle.$

Dimana : $|A\rangle = a_1|A_1\rangle + a_2|A_2\rangle$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = E_x\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}.$$

Supaya persamaan matrik ini dapat diselesaikan, kita terlebih dahulu harus mengalikan suku persamaan di ruas kanan dengan sebuah matrik identitas (yaitu matrik $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$) kemudian memindahkannya ke ruas kiri, sehingga persamaan tersebut tampak seperti di bawah ini

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} - E_x\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix}-E_x & \frac{\hbar}{2}\\ \frac{\hbar}{2} & -E_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix} = 0. \qquad (27)$$

$$\begin{vmatrix} -E_x & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & -E_x \end{vmatrix} = 0, \text{ atau } E_x = \pm \frac{\hbar}{2} \,. \tag{28}$$

Jadi eigenvalue dari operator S_x adalah $-\frac{\hbar}{2}$ dan $+\frac{\hbar}{2}$.

b. Selanjutnya marilah kita hitung eigenvektor S_x. Untuk itu, kita substitusikan kedua nilai eigenvalue tadi ke persamaan (27) satu persamaan satu sebagai berikut.

- untuk $E_x = +\frac{\hbar}{2}$, kita peroleh persamaan sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} -\frac{\hbar}{2} & \frac{\hbar}{2} \\ \frac{\hbar}{2} & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0, \text{ berarti } a_1 = a_2.$$

Karena eigenvektor ini harus normal, maka:

$\langle A|A\rangle = 1 = (a_1)^2 + (a_2)^2$. Karena $a_1 = a_2$, maka $2\,(a_1)^2 = 1$. Atau $a_1 = a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Jadi eigenvektor S_x dengan eigenvalue $E_x = +\frac{\hbar}{2}$ adalah:

$$|A\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|A_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|A_2\rangle.$$

Atau dalam bentuk matrik $|A\rangle = \alpha_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Latihan</u> : Cobalah tentukan eigenvektor S_x untuk eigenvalue $-\frac{\hbar}{2}$.

<u>Petunjuk</u> : Ikuti langkah-langkah seperti pada bagian b diatas, dengan mensubstitusikan nilai $E_x = -\frac{\hbar}{2}$ ke dalam persamaan (27). Anda harus mendapatkan nilai eigenvektor $|B\rangle = \beta_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$