PENDAHULUAN

Di dalam modul ini Anda akan mempelajari teori gangguan bebas waktu yang mencakup: teori gangguan tak degenerasi bebas waktu, teori gangguan degenerasi bebas waktu, dan efek Stark. Oleh karena itu, sebelum mempelajari modul ini Anda terlebih dahulu harus mempelajari modul-modul sebelumnya.

Materi kuliah dalam modul ini merupakan dasar dari materi yang akan Anda pelajari pada modul-modul selanjutnya, terutama modul nomor 9 dari matakuliah Fisika Kuantum.

Pengetahuan yang akan Anda peroleh dari modul ini akan barmanfaat untuk mempelajari materi kuliah Fisika Zat Padat, Fisika Inti, Fisika Atom, Fisika Partikel, dan ilmu-ilmu Fisika lanjut lainnya.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat mencapai beberapa tujuan instruksional khusus, sebagai berikut:

Anda harus dapat

1. menghitung pemisahan energi dengan menggunakan teori gangguan bebas waktu yang tak degenerasi.
2. menghitung pemisahan energi dengan menggunakan teori gangguan bebas waktu yang degenerasi.
3. menghitung pemisahan energi pada efek Stark.

Materi kuliah dalam modul ini akan disajikan dalam urutan sebagai berikut:

1. KB. Teori gangguan. Di dalam KB. 1 ini Anda akan mempelajari sub-pokok bahasan : teori gangguan tak-degenerasi bebas waktu dan teori gangguan degenerasi bebas waktu..

2. KB. 2 interaksi partikel dengan medan listrik. Dalam KB. 2 ini Anda akan mempelajari sub-pokok bahasan: efek Stark.

Agar Anda dapat mempelajari modul ini dengan baik, ikutilah petunjuk belajar berikut ini.

1. Bacalah tujuan instruksional khusus untuk modul ini.
2. Baca dan pelajari dengan seksama uraian setiap kegiatan belajar.
3. Salinlah konsep dasar dan persamaan-persamaan penting ke dalam buku latihan Anda.
4. Perhatikan dan pelajari dengan baik contoh-contoh soal/masalah dalam setiap kegiatan belajar.
5. Kerjakan semua soal latihan dan usahakan tanpa melihat kunci jawaban terlebih dahulu.

KB. 1 Teori Gangguan

1.1 Teori gangguan tak degenerasi yang tak bergantung pada waktu.

Pada KB-1 ini kita akan mempelajari tentang cara memperhalus metoda aproksimasi. Teori gangguan dimulai dengan asumsi bahwa hamiltonian pengganggu (pertubation hamiltonian), H', adalah sangat kecil dibanding dengan hamiltonian awal yaitu hamiltonian sebelum ada gangguan (unperturbed hamiltonian), H_0, sehingga hamiltonian total (H) dapat ditulis sebagai berikut

$$H = H_0 + H'. \qquad (1)$$

Asumsi lainnya adalah bahwa fungsi eigen dan energi eigen dari hamiltonian total (H) tidak jauh berbeda dengan fungsi eigen dan energi eigen dari hamiltonian awal (H_0). Dengan kata lain, misalkan φ_n dan E_n adalah fungsi eigen dan enegi eigen dari H, sehingga

$$H|\varphi_n> = (H_0 + H')\,|\varphi_n> = E_n\,|\varphi_n> \qquad (2).$$

Sedangkan fungsi eigen dan energi eigen dari H_0 adalah masing-masing φ_n^0 dan E_n^0, sehingga kita dapat menulis persamaan eigenvaluenya sebagai berikut

$$H_0|\varphi_n^0> = E_n^0|\varphi_n^0> \qquad (3)$$

Kemudian berdasarkan kedua asumsi tadi kita dapat menulis

$$\varphi_n = \varphi_n^0 + \Delta\varphi_n \qquad (4)$$

$$E_n = E_n^0 + \Delta E_n \qquad (5)$$

Untuk tujuan penekanan bahwa H' ini adalah sangat kecil dibanding H_0, kita akan menuliskan H' ini dengan cara menyertakan sebuah parameter yang bernilai sangat kecil dan diberi notasi λ, sehingga H' = λH'. Dengan menggunakan hamiltonian pengganggu ini, kita dapat menulis ulang persamaan eigenvalue di atas sebagai berikut

$$(H_0 + \lambda H')\,|\varphi_n> = E_n\,|\varphi_n> \qquad (6)$$

Selanjutnya kita asumsikan bahwa fungsi eigen dan energi eigen dari H_0 diketahui. Karena kita tahu bahwa jika λ mendekati nol, maka φ_n akan mendekati harga φ_n^0 dan E_n akan mendekati E_n^0. Dengan demikian kita dapat mengekspansi φ_n dan E_n dalam bentuk deret dengan φ_n^0 dan E_n^0 sebagai suku pertamanya, yakni sebagai berikut:

$$\varphi_n = \varphi_n^0 + \lambda\varphi_n^{(1)} + \lambda^2\varphi_n^{(2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \qquad (7)$$

$$E_n = E_n^0 + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (8)$$

Perhatikan bahwa angka-angak di dalam tanda kurung ( ) tidak menyatakan pangkat menlainkan menyatakan ***orde.*** Jika kita substitusikan persamaan (7) dan (8) ke dalam persamaan (6) di atas, kita akan mendapatkan

$$(H_0 + \lambda H')(\varphi_n^0 + \lambda\varphi_n^{(1)} + \lambda^2\varphi_n^{(2)} + \ldots...) = (E_n^0 + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \ldots)(\varphi_n^0 + \lambda\varphi_n^{(1)} + \lambda^2\varphi_n^{(2)} + \ldots.) \qquad (9)$$

$$[H_0\varphi_n^0 - E_n^0\,\varphi_n^0] + \lambda[H_0\,\varphi_n^{(1)} + H'\varphi_n^0 - E_n^0\varphi_n^{(1)} - E_n^{(1)}\,\varphi_n^0] + \lambda^2[H_0\varphi_n^{(2)} + H'\varphi_n^{(1)} - E_n^{(1)}\,\varphi_n^{(1)} - E_n^{(2)}\,\varphi_n^0] + \ldots\ldots\ldots\ldots. = 0. \qquad (10)$$

Persamaan ini bernebtuk

$$F^{(0)} + \lambda F^{(1)} + \lambda^2 F^{(2)} + \lambda^3 F^{(3)} + \lambda^4 F^{(4)} + \lambda^5 F^{(5)} + \ldots\ldots\ldots = 0.$$

Jika persamaan ini harus benar untuk sembarang nilai λ, maka :

$$F^{(0)} = F^{(1)} = F^{(2)} = F^{(3)} = F^{(4)} = F^{(5)} = \ldots\ldots\ldots\ldots. = 0.$$

Dengan cara seperti ini, dari persamaan (10) di atas kita dapat memperoleh himpunan persamaan-persamaan sebagai berikut

a. $H_0\varphi_n^0 = E_n^0\ \varphi_n^0$.

b. $[H_0 - E_n^0]\varphi_n^{(1)} = [E_n^{(1)} - H']\varphi_n^0$.

c. $[H_0 - E_n^0]\varphi_n^{(2)} = [E_n^{(1)} - H']\varphi_n^{(1)} + E_n^{(2)}\ \varphi_n^0$. (11)

d. $[H_0 - E_n^0]\varphi_n^{(3)} = [E_n^{(1)} - H']\varphi_n^{(2)} + [E_n^{(2)}\ \varphi_n^{(1)} + E_n^{(3)}\ \varphi_n^0$.

Persamaan (11.a) dalam metoda aproksimasi terendah mengembalikan informasi ke keadaan semula, yakni φ_n^0 dan E_n^0 masing-masing merupakan fungsi eigen dan energi eigen dari H_0. Dalam persamaan (11.b) kita melihat bahwa H_0 beroperasi pada $\varphi_n^{(1)}$. Hal ini menyarankan bahwa solusi untuk persamaan ini dapat diperoleh melalui ekspansi $\varphi_n^{(1)}$ dalam sebuah superposisi dari fungsi eigen dari H_0, yaitu sebagai berikut

$$|\varphi_n^{(i)}> = \sum_i c_{ni}\ |\varphi_i^0>. \qquad (12)$$

Substitusikan persamaan (12) ke dalam persamaan (11.b) di atas ! Anda akan memperoleh:

$$[H_0 - E_n^0] \sum_i c_{ni}\ |\varphi_i^0> = [E_n^{(1)} - H'] \sum_i c_{ni}\ |\varphi_i^0> \qquad (13)$$

Kita kalikan persamaan (13) ini dengan $<\varphi_j^0 |$ dari kiri, sehingga kita dapatkan:

$$<\varphi_j^0 | [H_0 - E_n^0] \sum_i c_{ni}\ |\varphi_i^0> = <\varphi_j^0 | [E_n^{(1)} - H'] \sum_i c_{ni}\ |\varphi_i^0> \qquad (14)$$

$$[E_j^0 - E_n^0]\ c_{nj} = E_n^{(1)}\ \delta_{jn} - H'_{jn}.$$

$$[E_j^0 - E_n^0]\ c_{nj} + H'_{jn} = E_n^{(1)}\ \delta_{jn}, \qquad (15)$$

dimana H'_{jn} adalah elemen matrik dari hamiltonian H' dalam representasi φ_n^0, yakni

$$H'_{jn} \equiv \langle \varphi_j^0 | H' | \varphi_n^0 \rangle \tag{16}$$

Jika $j \neq n$, maka akan menghasilkan koefisien-koefisien c_{nj} yang jika disubstitusikan ke dalam persamaan (12) menghasilkan koreksi orde pertama untuk φ_n, yaitu:

$$c_{ni} = \frac{H'_{in}}{E_n^0 - E_i^0}$$

$$\varphi_n^{(1)} = \sum_{i \neq n} \frac{H'_{in}}{E_n^0 - E_i^0} \varphi_i^{(0)} + c_{nn} \varphi_i^{(0)} \tag{17}$$

Koefisien c_{nn} pada persamaan (17) sebenarnya bernilai 0, karena kita berasumsi bahwa semua koreksi terhadap $\varphi_n^{(0)}$ adalah normal (tegak lurus) terhadap $\varphi_0^{(0)}$, sehingga

$$\langle \varphi_n^{(s)} | \varphi_n^0 \rangle = 0. \tag{18}$$

Jadi persamaan (17) dapat ditulis lebih sederhana sebagai berikut :

$$\varphi_n^{(1)} = \sum_{i \neq n} \frac{H'_{in}}{E_n^0 - E_i^0} \varphi_i^{(0)} \tag{19}$$

Sekarang marilah kita kembali ke persamaan (15). Jika $j = n$, persamaan (15) menghasilkan koreksi orde pertama untuk energi E_n, sehingga

$$E_n^{(1)} = H'_{nn} \tag{20}$$

Persamaan (20) adalah elemen-elemen diagonal dari matrik H'. Akhirnya dengan mensubstitusikan persamaan-persamaan (19) dan (20) ke dalam persamaan-persamaan (7) dan (8) dan meisalkan $\lambda = 1$, Anda akan mendapatkan

$$\varphi_n = \varphi_n^0 + \sum_{i\neq n} \frac{H'_{in}}{E_n^0 - E_i^0}\varphi_i^{(0)} \qquad (21)$$

dan $\quad E_n = E_n^0 + H'_{nn} \qquad (22)$

Persamaan (21) dan (22) menyatakan fungsi eigen dan energi eigen dari hamiltonia total H sampai koreksi orde pertama.

Untuk menentukan koreksi orde kedua terhadap φ_n dan E_n kita harus menyelesaikan persamaan (11-c) di atas. Disini kita juga mencatat bahwa H_0 beroperasi pada $\varphi_n^{(2)}$. Dalam hal ini akan lebih baik jika kita mengekspasi $\varphi_n^{(2)}$ dalam fungsi eigen dari H_0, yaitu sebagai berikut:

$$\varphi_n^{(2)} = \sum_i d_{ni}\,\varphi_i^{(0)} \qquad (23)$$

Jika kita substitusikan persamaan (23) ke dalam persamaan (11-c) di atas, maka kita akan memperoleh:

$$\sum_i E_i^{(0)} d_{ni}\,|\varphi_i^{(0)}> + H'|\varphi_n^{(1)}> = E_n^{(0)} \sum_i d_{ni}\,|\varphi_i^{(0)}> + E_n^{(1)}\,|\varphi_n^{(1)}> + E_n^{(2)}\,|\varphi_n^{(0)}>$$

Kemudian kita kalikan persamaan ini dengan $<\varphi_j^{(0)}|$ dari sebelah kiri, sehingga kita dapatkan:

$$(E_j^{(0)} - E_n^{(0)})\,d_{nj} + <\varphi_j^{(0)}|\,H'|\varphi_n^{(1)}> = E_n^{(2)}\,\delta_{jn} + E_n^{(1)} <\varphi_j^{(0)}|\,|\varphi_n^{(1)}> \qquad (24)$$

Jika j = n, persamaan (24) akan menghasilkan :

$$E_n^{(2)} = \;<\varphi_n^{(0)}|\,H'|\varphi_n^{(1)}> \qquad (25)$$

Dengan menggunakan persamaan (19) di atas, kita akan dapat menuliskan persamaan (25) sebagai berikut:

$$E_n^{(2)} = \sum_{i\neq n} <\varphi_n^{(0)}|\,H' \frac{H'_{in}}{E_n^0 - E_i^0}|\varphi_i^{(0)}>$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{i\neq n} \frac{H_{ni}H'_{in}}{E_n^0 - E_i^0}$$

$$E_n^{(2)} = \sum_{i \neq n} \frac{|H_{ni}|^2}{E_n^0 - E_i^0} \qquad (26)$$

Dengan demikian, energi total dari hamiltonian total H dapat ditulis sampai koreksi energi orde kedua adalah sebagai berikut:

$$E_n = E_n^{(0)} + H'_{nn} + \sum_{i \neq n} \frac{|H_{ni}|^2}{E_n^0 - E_i^0}. \qquad (27)$$

Persamaan (27) menyatakan nilai energi total setelah adanya gangguan (H’) yang dapat diterima sampai koreksi orde kedua.

1.2 Teori gangguan bebas waktu yang degenerasi.

Anda baru saja mempelajari teori gangguan bebas waktu yang tak-degenerasi. Selanjutnya sekarang Anda akan mempelajari teori gangguan bebas waktu yang degenerasi. Untuk hal ini, kita juga akan menggunakan hamiltonian total H sebagai berikut :

$$H = H_0 + H' \qquad (22)$$

dimana H’ juga sangat kecil dibanding H_0. Hal ini mirip dengan pembahasan untuk kasus tak-degenerasi. Tetapi disini H_0 memiliki fungsi eigen yang degenerasi. Misalkan keadaan dasar dari H_0 adalah terdiri dari q buah (lipat) degenerasi. Tujuan utama dari toeri pertubasi degenerasi adalah untuk menghitung tingkat-tingkat energi baru yang dihasilkan akibat adanya degenerasi. Misalkan, seperti dalam kasus tak-degenerasi, kita ekspansi orde pertama fungsi gelombang H’ dalam bentuk fungsi eigen H_0 sebagai berikut:

$$|\varphi_n^{(i)}> = \sum_i c_{ni} |\varphi_i^0> \tag{23}$$

dimana koefisien-koefisien c_{ni} ditentukan oleh

$$c_{ni} = \frac{H'_{in}}{E_n^0 - E_i^0} \tag{24}$$

Jika $E_1^{(0)}$ adalah q buah degenerasi, berarti:

$E_1^{(0)} = E_2^{(0)} = E_3^{(0)} = E_4^{(0)} = \ldots\ldots.= E_q^{(0)}$

dan c_{ni} adalah tak berhingga untuk nilai n, i $\leq$ q. Keadaan ini dapat diperbaiki dengan cara mebuat sebuah himpunan fungsi basis yang baru dari himpunan $\{\varphi_n^{(0)}\}$ yang mendiagonalisasi sub-matrik H'_{in}. Dengan elemen-elemen diluar diagonal bernilai nol, kita akan memperoleh koefisien-koefisien (c_{ni}) yang berkaitan dengan elemen-elemen tersebut adalah juga bernilai nol, dan kita dapat memprosesnya seperti dalam kasus tak-degenerasi. Jadi tujuan utama dalam teori gangguan bebas waktu yang degenerasi adalah untuk mendiagonalisasi sub-matrik dari H'_{in}.

Kita misalkan ke q buah fungsi yang mendiagonalisasi H'_{in} diberi label $\overline{\varphi}_n$, sehingga kita dapat mengekspansi

$$\overline{\varphi}_n = \sum_i^q a_{ni} |\varphi_i^0> \tag{25}$$

Kombinasi linier dari fungsi eigen-fungsi eigen ini mendiagonalisasi H'_{in} sehingga

$$< \overline{\varphi}_n | H' | \overline{\varphi}_p > = H'_{np} \, \delta_{np} \,. \tag{26}$$

Matrik H' dihitung dalam basis ini dengan cara sebagai berikut:

$$H' = \begin{pmatrix} H'_{11} & & 0 \\ & H'_{22} & \\ 0 & & \\ & & H'_{qq} \\ & & \end{pmatrix} \qquad (27)$$

Kita sekarang akan menunjukkan bahwa elemen-elemen diagonal sub-matrik q x q dari H' adalah merupakan koreksi energi orde pertama (E'_n) terhadap E_n^0, yaitu:

$$E'_n = \langle \bar{\varphi}_n | H' | \bar{\varphi}_n \rangle = H'_{nn} \qquad \text{untuk } n \leq q \qquad (28)$$

Jika semua elemen diagonal ini adalah masing-masing berbeda, kemudian ke q buah degenerasi dari H_0 ditiadakan oleh perturbasi (gangguan) H'. Untuk mempertahankan kesamaan dari persamaan (28) kita lakukan hal berikut.

Persamaan Schrodinger untuk hamilton total dapat ditulis sebagai berikut:

$$H \varphi_n = (H_0 + H') \varphi_n = E_n \varphi_n \qquad (29)$$

Keadaan dasar dari H_0 adalah degenerasi sebanyak q buah. Jika kita substitusikan

$\varphi_n = \bar{\varphi}_n$ dan $E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)}$ ke dalam persamaan (29) maka kita akan mendapatkan

$$H' | \bar{\varphi}_n \rangle = E_n^{(1)} | \bar{\varphi}_n \rangle \qquad (30)$$

Anda harus ingat bahwa $\bar{\varphi}_n$ adalah juga merupakan keadaan yang degenerasi. Dari persamaan (30) Anda dapat membuktikan bahwa

$$E_n^{(1)} = H'_{nn} . \qquad (31)$$

Persamaan (31) ini merupakan bentuk lain dari persamaan (28).

Latihan:

Sebuah atom hidrogen yang berada dalam keadaan dasar (ground state) diberi gangguan (perturbasi) oleh sebuah potensial yang berbentuk:

$$H' = er^2 (3 \cos^2 \theta - 1) q/4$$

dimana e muatan listrik elektron, θ = sudut antara vektor jari-jari (r) dengan sumbu-z positif, q komponen dari medan yang menimbulkan gangguan. Tentukan orde pertama fungsi gelombang yang terganggu untuk n = 2 dan n = 3.

Rangkuman.

1. Koreksi orde pertama untuk φ_n (yang tak degenerasi) adalah:

$$\varphi_n^{(1)} = \sum_{i \neq n} \frac{H'_{in}}{E_n^0 - E_i^0} \varphi_i^{(0)} + c_{nn}\, \varphi_i^{(0)}$$

2. koreksi orde pertama untuk energi E_n (yang tak degenerasi) adalah:

$$E_n^{(1)} = H'_{nn}$$

3. koreksi orde kedua untuk energi E_n (yang tak degenerasi) adalah:

$$E_n^{(2)} = \langle \varphi_n^{(0)} | H' | \varphi_n^{(1)} \rangle$$

Tes Formatif-1

Petunjuk: jawablah semua soal di bawah ini.

Sebuah partikel berada dalam sebuah potensial osilator harmonik dua dimensi $V(x,y) = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2)$.

1. Tuliskan hamiltonian dari osilator dua dimensi yang tidak terganggu (unperturbed).
2. Tuliskan hamiltonian total untuk sistem tersebut.
3. Tulislah tiga tingkat energi pertama.
4. Tentukan ketiga fungsi gelombangnya untuk ketiga tingkat energi pada pertanyaan © di atas.
5. Misalkan partikel tersebut ditempatkan dalam sebuah perturbasi sebesar $H' = \lambda xy$. Tentukan koreksi energi orde pertama untuk keadaan dasar dan keadaan eksitasi pertama.
6. Tentukan pula orde ke nol fungsi gelombang untuk keadaan eksitasi pertama.

Tindak Lanjut (Balikan):

Cocokanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban tes formatif 1 pada akhir modul ini, dan berilah skor (nilai) sesuai dengan bobot nilai setiap soal yang dijawab dengan benar. Kemudian jumlahkan skor yang Anda peroleh lalu gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan (TP) Anda terhadap materi KB-1 ini.

Rumus (TP) = (jumlah skor/jumlah soal) x 100 %

Arti TP yang Anda peroleh adalah sebagai berikut :

90 % - 100 % = baik sekali.

80 % - 89 % = baik

70 % - 79 % = cukup

< 70 % = rendah.

Apabila TP Anda ≥ 80 %, maka Anda boleh melanjutkan pada materi KB 2, dan Selamat !!, Tetapi jika TP Anda < 80 %, Anda harus mengulang materi KB-1 di atas terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai.