

### Rangkuman:

Setelah Anda mempelajari KB-1 di atas, simaklah dan hafalkan beberapa hal penting di bawah ini !

1. Elemen-elemen matrik  $L_{\ell m, \ell' m'}^2$  dapat dihitung sebagai berikut:

$$L_{\ell m, \ell' m'}^2 = \hbar^2 \ell(\ell+1) \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \quad , \quad (1)$$

2. Element-elemen matrik  $(L_z)_{\ell m, \ell' m'}$  dapat dihitung dengan menggunakan persamaan

$$(L_z)_{\ell m, \ell' m'} = m \hbar \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \quad (2)$$

3. Hubungan antara elemen matrik-matrik  $(L_+)_{\ell m, \ell' m'}$  dan  $(L_-)_{\ell m, \ell' m'}$  dengan fungsi gelombang  $Y_{\ell}^m$ , adalah sebagai berikut:

$$(L_{\pm})_{\ell m, \ell' m'} = \{(\ell' \mp m')(\ell' \pm m' + 1)\}^{1/2} \hbar \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m' \pm 1} \quad (4)$$

1. Kita dapat menghitung matrik  $L_x$  dan  $L_y$  sebagai berikut :

$$L_x = \frac{1}{2} (L_+ + L_-)$$

$$L_y = -\frac{i}{2} (L_+ - L_-)$$

2. Matrik spin Pauli adalah:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\sigma_y = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dan}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Eigenvektor  $\alpha$  dan  $\beta$  dapat dinyatakan dalam bentuk matrik sebagai berikut:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{dan } \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Untuk sebuah nilai  $s$  tertentu, nilai  $m_s$  adalah mulai dari  $-s$  sampai  $+s$  dengan step  $+1$ .

8. Sifat-sifat dari operator momentum sudut spin  $S$  (Tanpa tanda vektor) adalah sama dengan sifat-sifat untuk momentum sudut orbit.

9. Hubungan komutatif antara komponen-komponen  $S_x$ ,  $S_y$ , dan  $S_z$  memenuhi aturan berikut:  $[S_x,$

$$S_y] = i\hbar S_z; \quad [S_y, S_z] = i\hbar S_x; \quad [S_z, S_x] = i\hbar S_y.$$

10. Definisi operator-operator  $S_+$  dan  $S_-$  untuk momentum sudut spin adalah sebagai berikut :

$$S_{\pm} = S_x \pm i S_y .$$

11. Persamaan eigenvalue untuk spin adalah sebagai berikut:

$$S^2 |s, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) |s, m_s\rangle ; \text{ dan } S_z |s, m_s\rangle = \hbar m_s |s, m_s\rangle .$$

12. Operator-operator  $S_+$  dan  $S_-$  dalam fungsi eigen  $\alpha$  dan  $\beta$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$S_+ |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s+1)} |s, m_s+1\rangle$$

$$S_- |s, m_s\rangle = \hbar \sqrt{s(s+1) - m_s(m_s-1)} |s, m_s-1\rangle .$$

13. Persamaan-persamaan untuk  $S_x$ ,  $S_y$ , dan  $S_z$  di dalam basis  $\alpha$  dan  $\beta$  sebagai berikut:

$$S_x \alpha = (\frac{1}{2}) \hbar \beta \quad \text{dan} \quad S_x \beta = (\frac{1}{2}) \hbar \alpha;$$

$$S_y \alpha = (i/2) \hbar \beta, \text{ dan } S_y \beta = -(i/2) \hbar \alpha.$$

$$S_z \alpha = (\frac{1}{2}) \hbar \alpha, \text{ dan } S_z \beta = -(\frac{1}{2}) \hbar \beta.$$

14. Matrik-matrik yang merepresentasikan operator-operator  $S_x$ ,  $S_y$ , dan  $S_z$  di dalam basis  $\alpha$  dan

$\beta$ , adalah sebagai berikut:

$$S_x = \begin{pmatrix} \langle \alpha | S_x | \alpha \rangle & \langle \alpha | S_x | \beta \rangle \\ \langle \beta | S_x | \alpha \rangle & \langle \beta | S_x | \beta \rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = \begin{pmatrix} \langle \alpha | S_y | \alpha \rangle & \langle \alpha | S_y | \beta \rangle \\ \langle \beta | S_y | \alpha \rangle & \langle \beta | S_y | \beta \rangle \end{pmatrix} = \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_z = \begin{pmatrix} \langle \alpha | S_z | \alpha \rangle & \langle \alpha | S_z | \beta \rangle \\ \langle \beta | S_z | \alpha \rangle & \langle \beta | S_z | \beta \rangle \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

15. Operator spin biasa didefinisikan sebagai berikut:

$$\hat{\sigma} = \frac{2}{\hbar} \hat{S}, \text{ dimana } \hat{\sigma} \text{ merupakan operator spin Pauli dan } \hat{S} \text{ merupakan operator Spin.}$$

### **Tes Formatif 1**

Petunjuk: Pilihlah jawaban yang benar dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf di depan pilihan yang disediakan.

- 
1. Sebuah partikel memiliki bilangan kuantum orbit ( $\ell = \ell'$ ) sebesar 2 satuan. Berapakah besarnya elemen matrik  $L^2_{21,21}$  adalah:
    - a.  $2 \hbar^2$
    - b.  $4 \hbar^2$
    - c.  $6 \hbar^2$
    - d. 0.
  2. Berapakah besarnya elemen matrik  $L^2_{22,11}$  untuk soal nomor (1) di atas ?
    - a. 0
    - b.  $3 \hbar^2$
    - c.  $5 \hbar^2$
    - d.  $6 \hbar^2$
  3. Sebuah elektron memiliki bilangan kuantum orbit ( $\ell = \ell'$ ) sebesar 1. Berapakah nilai elemen matrik  $(L_z)_{10,10}$  ?
    - a. 0
    - b.  $\hbar$
    - c.  $2\hbar$
    - d.  $-\hbar$
  4. Sebuah partikel memiliki bilangan kuantum orbit  $\ell = \ell' = 2$ . Nilai-nilai bilangan kuantum  $m_\ell$  untuk partikel tersebut adalah:
    - a.  $m_\ell = 2$
    - b.  $m_\ell = -2$  dan 2
    - c.  $m_\ell = 0, 1,$  dan 2
    - d.  $m_\ell = -2, -1, 0, 1, 2.$
  5. Elemen matrik  $(L_+)_{21,20}$  adalah :
    - a.  $3 \hbar$

b.  $(3)^{1/2} \hbar$

c.  $\hbar$

d.  $2 \hbar$

6. Matrik spin Pauli yang benar adalah:

a.  $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

b.  $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c.  $\sigma_z = i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

d.  $\sigma_y = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Persamaan-persamaan untuk  $S_x$ ,  $S_y$ , dan  $S_z$  di dalam basis  $\alpha$  dan  $\beta$  berikut yang benar adalah:

a.  $S_x \alpha = (\frac{1}{2}) \hbar \alpha$ ;

b.  $S_y \beta = -(i/2) \hbar \alpha$ .

a.  $S_z \alpha = (\frac{1}{2}) \hbar \beta$ .

b.  $S_z \beta = -(\frac{1}{2}) \hbar \beta$ .

8. Matrik-matrik yang merepresentasikan operator  $S_x$  di dalam basis  $\alpha$  dan  $\beta$ , adalah sebagai berikut:

a.  $S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b.  $S_x = \frac{i\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c.  $S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

d.  $S_x = i \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

**Tindak Lanjut (Balikan):**

Cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban tes formatif 1 pada akhir modul ini, dan berilah skor (nilai) sesuai dengan bobot nilai setiap soal yang dijawab dengan benar. Kemudian jumlahkan skor yang Anda peroleh lalu gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan (TP) Anda terhadap materi KB-1 ini.

$$\text{Rumus (TP)} = (\text{jumlah skor/jumlah soal}) \times 100 \%$$

Arti TP yang Anda peroleh adalah sebagai berikut :

90 % - 100 % = baik sekali.

80 % - 89 % = baik

70 % - 79 % = cukup

< 70 % = rendah.

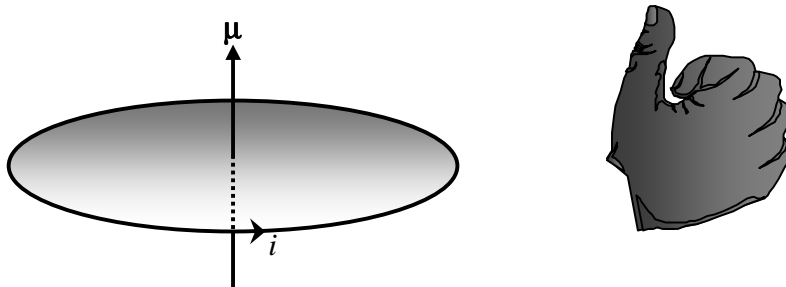
Apabila TP Anda  $\geq 80 \%$ , maka Anda boleh melanjutkan pada materi KB 2, dan Selamat !!, Tetapi jika TP Anda  $< 80 \%$ , Anda harus mengulang materi KB-1 di atas terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai.

## KB. 2 GERAK ELEKTRON DALAM MEDAN MAGNET

### 2.1 Momen magnet dari sebuah elektron.

Anda tentu masih ingat bahwa jika sebuah kawat konduktor berbentuk lingkaran mengalirkan arus listrik  $i$  akan menimbulkan momen dipol magnet sebesar:

$\mu = i A$ , dimana  $A$  adalah luas lingkaran kawat tersebut. Hubungan antara arah arus listrik  $i$  dengan momen dipol magnet  $\mu$  ditunjukkan padan Gambar 1 di bawah ini.



Gambar 1. Hubungan arah arus listrik  $i$  dengan momen dipol magnet  $\mu$ . Hubungan ini mengikuti kaidah (aturan) tangan kanan, arah putaran keempat jari menyatakan arah arus listrik  $i$  dan ibu jari menyatakan arah momen dipol magnet  $\mu$ .

Dari matakuliah Fisika Modern Anda telah mengetahui bahwa momen dipol magnet sebuah elektron adalah berbanding lurus dengan momentum sudut spin ( $S$ ) dari elektron tersebut. Secara matematik, hubungan ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{mc} \vec{S} = \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} \quad (1)$$

Karena muatan listrik elektron adalah negatif, maka nilai momen dipol magnet tersebut dapat ditulis sebagai berikut :

$$\mu = -\frac{|e|\hbar}{2mc} = -\mu_b \sigma, \quad (2)$$

dimana  $\mu_b = \frac{|e|\hbar}{2mc}$  sering disebut **magneton Bohr**. Nilai magneton Bohr dapat kita hitung dengan cara memasukan nilai-nilai dari setiap parameter di atas, yaitu:  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  Coulomb,  $\hbar = 1,0546 \times 10^{-34}$  J.det,  $m = 9,1 \times 10^{-31}$  kg, dan  $c = 3 \times 10^8$  m/det, sehingga nilai magneton Bohr tersebut sama dengan  $\mu = 0,927 \times 10^{-27}$  C. J.det<sup>2</sup>/kg.m =  $0,927$  J/gauss =  $0,927 \times 10^{-20}$  erg/gauss =  $0,57884 \times 10^{-8}$  eV/gauss.

Jika sebuah momen dipol magnet ditempatkan dalam medan magnet ( $\beta$ ) yang nilainya tetap dan serba sama (homogen), maka momen dipol tersebut akan mengalami sebuah momen gaya yang nilainya dan besarnya dinyatakan oleh persamaan berikut

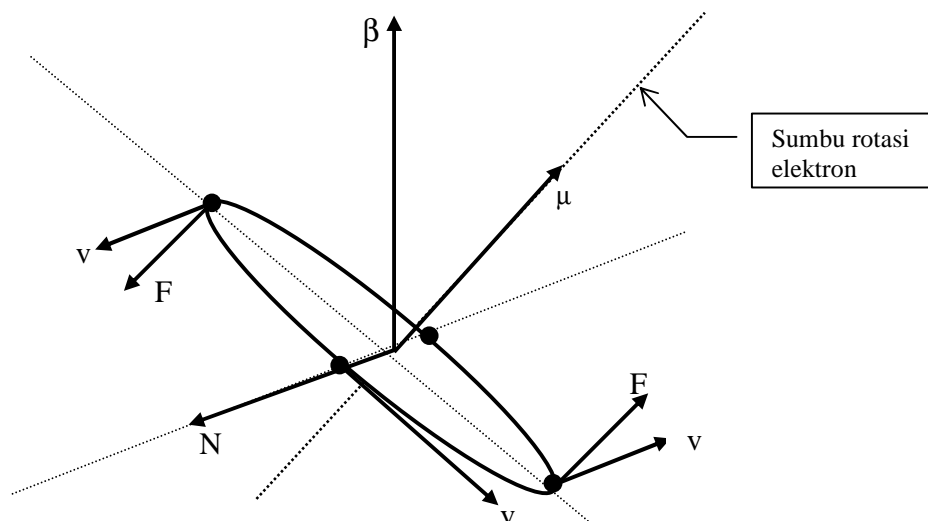
$$\vec{N} = \vec{\mu} \times \vec{\beta}, \quad (3)$$

dan besarnya adalah :

$$N = \mu\beta \sin \theta, \quad (4)$$

Dimana  $\theta$  adalah sudut antara medan magnet ( $\beta$ ) dengan momen dipol magnet ( $\mu$ ).

Arah momen gaya ( $N$ ) ditunjukkan dalam gambar 2 di bawah ini.



Gambar 2. Arah momen gaya ( $N$ ) yang bekerja pada sebuah momen dipol ( $\mu$ ) yang terletak di dalam medan magnet ( $\beta$ ).



Seperti tampak di dalam Gambar 2 di atas, Anda dapat melihat bahwa apabila arah putaran (rotasi) elektron adalah sama dengan arah vektor kecepatan ( $v$ ), maka momen dipol magnet ( $\mu$ ) elektron tersebut adalah miring ke atas sesuai dengan kaidah tangan kanan. Misalkan arah medan magnet ( $\beta$ ) adalah vertikal ke atas, maka arah gaya magnetik ( $F$ ) yang bekerja pada elektron tersebut adalah seperti ditunjukkan pada Gambar 2 di atas, sehingga arah momen dipol magnet akan disejajarkan dengan arah medan magnet. Jadi, setiap momen dipol magnet yang terletak di dalam sebuah medan magnet tetap dan homogen akan cenderung untuk mensejajarkan diri dengan arah medan magnet tersebut.

Apabila kita ingin memutar arah momen dipol magnet dari sejajar dengan medan magnet menjadi tidak sejajar (membentuk sudut  $\theta$ ) dengan medan magnet maka kita harus melakukan usaha. Besarnya usaha yang diperlukan untuk memutar arah momen dipol tersebut sama dengan energi potensial ( $V$ ) momen dipol itu dan dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

$$V = \int_0^{\theta} N d\theta = \int_0^{\theta} (\mu\beta \sin \theta) d\theta. \quad \{\text{Karena nilai } N = (\mu\beta \sin \theta)\}$$

$$V = -\mu\beta \cos \theta. \quad (4)$$

Secara umum besarnya energi potensial dapat dinyatakan oleh persamaan di bawah ini.

$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{\beta} \quad (5)$$

Persamaan (4) dan (5) di atas kita turunkan dengan asumsi bahwa medan magnet ( $\beta$ ) adalah tetap nilainya dan serba sama (homogen) di setiap tempat. Jadi medan magnet yang kita gunakan selama ini tidak merupakan fungsi apapun. Akibatnya, jika persamaan (4) atau (5) kita turunkan terhadap posisi atau waktu, hasilnya adalah nol. Dan kita tahu bahwa negatif turunan energi potensial terhadap posisi adalah sama dengan gaya yang bekerja pada momen dipol (karena energi potensial itu adalah energi potensial momen dipol). Jadi:

$$F = -\nabla V = -\nabla (-\vec{\mu} \cdot \vec{\beta}) = \nabla (\vec{\mu} \cdot \vec{\beta}) = 0, \quad (6)$$

karena baik medan magnet ( $\beta$ ) maupun momen dipol ( $\mu$ ) tidak bergantung pada posisi. Dengan kata lain, meskipun ada momen gaya ( $N$ ) yang berkerja pada momen dipol, tetapi tidak ada

resultan gaya yang bekerja. Semoga Anda tidak keliru tentang arti gaya dan resultan gaya, sebab jika tidak hati-hati Anda mungkin bingung, karena pada Gambar 2 di atas Anda melihat ada Gaya yang bekerja, sedangkan penjelasan ini mengatakan tidak ada resultan gaya. Memang benar ada gaya yang bekerja pada momen dipol ! Tetapi gaya-gaya itu saling meniadakan sehingga jumlahnya (resultan-nya) menjadi nol. Sedangkan momen gaya (N) timbul akibat adanya dua gaya yang berlawanan arah dan terletak pada garis kerja gaya yang berbeda.

Jika medan magnet itu tidak homogen, berarti bergantung pada posisi misalnya, maka akan ada resultan gaya yang bekerja pada momen dipol, sehingga momen dipol ini akan ditarik kearah resultan gaya itu sendiri. Di alam, pada umumnya memang medan magnet itu tidak homogen. Akibatnya, persamaan (6) di atas tidak bernilai nol, tetapi ada nilainya sehingga persamaan (6) di atas menjadi

$$F = - \nabla V = - \nabla (-\mu \cdot \beta(x,y,z)) = \nabla (\mu \cdot \beta(x,y,z)) \neq 0. \quad (7)$$

Akibat adanya resultan gaya ini, maka momen dipol itu akan ditarik ke daerah dimana energi interaksinya (energi potensialnya yang  $= -\mu \cdot \beta$ ) paling kecil.

Persamaan di atas merupakan teori dasar untuk menjelaskan gaya yang timbul di dalam percobaan Stern-Gerlach (S-G) yang pada awalnya menggunakan atom perak sebagai partikel yang bermomen dipol magnet. Selanjutnya, atom-atom perak ini dapat diganti dengan partikel lain yang memiliki momen dipol magnet, seperti elektron misalnya. Bagian terpenting dari alat percobaan S-G adalah medan magnet yang tidak homogen. Disamping itu, komponen medan magnet dalam arah sumbu-z jauh lebih besar dari pada komponen medan magnet dalam arah sumbu-x dan sumbu-y ( $\beta_z \gg \beta_x$  dan  $\beta_z \gg \beta_y$ ). Akibatnya, momen dipol magnet ini akan cenderung untuk disejajarkan dengan sumbu-z. Akhirnya, akibat adanya resultan gaya tadi, maka momen dipol yang sudah sejajar ini akan dibelokkan ke arah yang sesuai dengan arah resultan gaya yang bekerja.

Dari persamaan (7) di atas kita dapat melihat bahwa arah resultan gaya itu hanya ditentukan oleh arah (tanda) momen dipol itu sendiri. Artinya, jika arah momen dipole ke atas (atau tanda momen dipol itu positif) maka arah resultan gaya juga ke atas, dan jika arah momen dipol itu ke bawah (atau tanda momen dipol itu negatif), maka arah resultan gaya juga ke bawah. Jadi arah resultan gaya selalu searah dengan arah momen dipol. Perlu diketahui bahwa

sebenarnya arah momen dipol itu ditentukan oleh arah putaran arus, yaitu jika arah putaran arus berlawanan dengan arah jarum jam, maka tanda momen dipol itu adalah positif, dan sebaliknya jika arah putaran arus itu searah dengan arah jarum jam, maka tanda momen dipol itu adalah negatif. Jadi tanda positif atau negatif tidak selalu berarti arahnya ke atas atau ke bawah saja.

Karena tanda momen dipol mungkin positif dan mungkin negatif, maka arah resultan gaya yang bekerja pada momen dipol itu hanya ada dua kemungkinan yaitu ke atas atau ke bawah. Karena itulah, setelah elektron itu melewati medan magnet yang tidak homogen tadi, elektron itu akan dipisahkan oleh dua resultan gaya yang arahnya saling berlawanan, yaitu ke atas dan ke bawah, sehingga pada saat sampai di layar elektron-elektron itu akan menumbuk layar di dua tempat yang berbeda sesuai dengan orientasi momen dipol itu sendiri. Untuk mempermudah penjelasan selanjutnya, elektron yang menumbuk layar di atas sumbu percobaan disebut elektron dengan spin ke atas (*spin up*) dan elektron yang menumbuk layar di bawah sumbu percobaan disebut elektron dengan spin ke bawah (*spin down*). Jika kita mengetahui tempat dimana elektron itu menumbuk layar, dan energi kinetik elektron diketahui, maka kita dapat menghitung komponen gaya dalam arah sumbu-z ( $F_z$ ). Selanjutnya, karena turunan medan magnet dalam arah sumbu-z ( atau  $\frac{\partial \beta_z}{\partial z}$  ) biasa diketahui, maka dengan menggunakan persamaan (7) di atas kita dapat menghitung komponen momen dipol magnet dalam arah sumbu-z ( $\mu_z$ ), yaitu sebagai berikut:

$$F = \nabla \mu \cdot \beta(x,y,z) \cong e_z \mu_z \frac{\partial \beta_z}{\partial z} = e_z F_z, \quad (8)$$

karena komponen medan magnet dalam arah sumbu-z sangat dominan. Perhatikan bahwa disini kita telah menggunakan vektor satuan dalam arah sumbu-z, yaitu  $e_z$ . Jadi jika  $F_z$  dapat dihitung, dan  $\frac{\partial \beta_z}{\partial z}$  diketahui, maka kita akan dapat menghitung  $\mu_z$ . Jadi dengan demikian, Alat S-G dapat digunakan untuk mengukur komponen z dari momen dipol magnet. Tetapi karena momen dipol magnet ( $\mu$ ) itu berbanding lurus dengan spin ( $S$ ), maka alat S-G tersebut sebenarnya dapat digunakan untuk mengukur komponen z dari spin, yaitu  $S_z$ . Hal ini dapat ditunjukkan secara

matematik dengan cara mensubstitusikan  $\mu = -2(\mu_b)S/\hbar$  ke dalam persamaan (8), sehingga gaya yang bekerja pada elektron tersebut dapat ditulis dalam bentuk spin elektron sebagai berikut:

$$F = -\frac{2\mu_b}{\hbar} \nabla \vec{S} \cdot \vec{\beta} = -\frac{2\mu_b}{\hbar} S_z \frac{\partial \beta_z}{\partial z} e_z. \quad (9)$$

Dan karena kita tahu bahwa nilai  $S_z = \pm \frac{1}{2} \hbar$ , maka gaya dalam persamaan (9) menjadi

$$F_z = \pm \mu_b \frac{\partial \beta_z}{\partial z} e_z \quad (10)$$

Jadi arah gaya yang bekerja pada elektron yang dilewatkan ke dalam medan magnet S-G hanya ada dua kemungkinan, yaitu dalam arah sumbu-z positif dan sumbu-z negatif. Akibatnya, seperti sudah dijelaskan di atas, lintasan elektron-elektron tersebut akan dibelokkan ke arah sumbu-z positif untuk elektron dengan  $S_z = -\frac{1}{2} \hbar$  (spin down) dan ke arah sumbu-z negatif untuk elektron dengan  $S_z = +\frac{1}{2} \hbar$  (spin up).

## 2.2 Gerak Presesi elektron di dalam medan magnet.

Dalam sub pokok bahasan ini kita akan membahas gerak spin elektron yang berada di dalam medan magnet homogen dan konstan dalam arah sumbu-z. Jadi, berbeda dengan medan magnet dalam alat S-G. Misalkan mula-mula elektron berada dalam keadaan (state)  $\alpha_x$  :

$$\xi(0) = \alpha_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Tugas kita sekarang adalah untuk menentukan keadaan elektron pada suatu saat  $t$ , yaitu  $\xi(t)$ . Untuk menyelesaikan tugas kita ini, kita harus menggunakan persamaan Schrodinger yang bergantung pada waktu untuk keadaan  $\xi(t)$ , yaitu sebagai berikut:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \xi(t) = \hat{H} \xi(t). \quad (12)$$

Dalam hal ini, hamiltonian ( $\hat{H}$ ) adalah sama dengan energi interaksi, yaitu:

$$\hat{H} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\beta} = \mu_b \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\beta} = \mu_b \beta \sigma_z. \quad (13)$$

Dalam bentuk matrik dimana  $S_z$  diagonal,  $\hat{H}$  dapat ditulis sebagai berikut:

$$\hat{H} = \mu_b \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Selanjutnya tugas kita adalah mencari solusi (penyelesaian) untuk persamaan (12) dengan hamiltonian seperti dalam persamaan (14). Dalam bentuk matrik, solusi yang kita cari dapat ditulis sebagai berikut:

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

dimana  $a(t)$  dan  $b(t)$  adalah komponen-komponen dari eigenvektor  $\xi(t)$ . Oleh karena itu, jika persamaan (14) dan (15) disubstitusikan ke dalam persamaan (12), maka Anda akan memperoleh:

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \mu_b \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial b(t)}{\partial t} \end{pmatrix} = -i \mu_b \beta / \hbar \begin{pmatrix} a(t) \\ -b(t) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \dot{a} \\ \dot{b} \end{pmatrix} = -\frac{i\Omega}{2} \begin{pmatrix} a(t) \\ -b(t) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

dimana  $\Omega/2$  adalah *frekuensi Larmor* dan  $\Omega$  itu sendiri sering disebut sebagai *frekuensi cyclotron* dan nilainya adalah:

$$\Omega = \frac{|e|\hbar}{mc} \quad (17)$$

Selanjutnya marilah kita kembali perhatikan persamaan (16) di atas. Dari persamaan ini dapat melihat bahwa:

$$\dot{a} = - \frac{i\Omega}{2} a(t)$$

$$\dot{b} = + \frac{i\Omega}{2} b(t),$$

sehingga solusi yang kita cari adalah

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i(\Omega/2)t} \\ e^{+i(\Omega/2)t} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Persamaan (18) di atas memiliki perioda sebesar  $T = 2\pi/\Omega$ .

**Contoh soal:** Sebuah elektron yang mula-mula berada pada keadaan  $\alpha_x$  ditempatkan dalam medan magnet homogen dan konstan. Tentukanlah keadaan elektron setelah  $t = T/4$  detik berada di dalam medan magnet tersebut.

Jawab:

$$t = T/4 = 2\pi/4\Omega = \pi/2\Omega$$

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i(\Omega/2)\pi/2\Omega} \\ e^{+i(\Omega/2)\pi/2\Omega} \end{pmatrix}$$

$$\xi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} \\ e^{+i\pi/4} \end{pmatrix} = e^{-i\pi/4} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

dan karena  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ , maka

$$\xi(t) = e^{-i\pi/4} \alpha_y.$$

Jadi setelah  $t = 1/4$  perioda (T), keadaan elektron menjadi  $e^{-i\pi/4} \alpha_y$ .

**Latihan:**

Sebuah elektron yang mula-mula berada pada keadaan  $\alpha_x$  ditempatkan dalam medan magnet homogen dan konstan. Tentukanlah keadaan elektron setelah  $t = T/2$  detik berada di dalam medan magnet tersebut.

Petunjuk: ikuti langkah-langkah seperti contoh di atas dan dengan cara mensubstitusikan  $t = T/2$  ke dalam persamaan (18).

## Rangkuman

1. Momen dipol magnet sebuah elektron adalah berbanding lurus dengan momentum sudut spin ( $S$ ) dari elektron tersebut. Secara matematik, hubungan ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$\vec{\mu} = \frac{e}{mc} \vec{S} = \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma} = -\mu_b \sigma,$$

dimana  $\mu_b = \frac{|e|\hbar}{2mc}$  sering disebut *magneton Bohr*.

2. Momen gaya dari sebuah momen dipol yang ditempatkan dalam sebuah medan magnet ( $\beta$ ) adalah:

$$\vec{N} = \vec{\mu} \times \vec{\beta}.$$

3. Setiap momen dipol magnet yang terletak di dalam sebuah medan magnet tetap dan homogen akan cenderung untuk mensejajarkan diri dengan arah medan magnet tersebut.
4. Besarnya usaha yang diperlukan untuk memutar arah momen dipol tersebut sama dengan energi potensial ( $V$ ) momen dipol itu dan dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

$$V = \int_0^\theta N d\theta = \int_0^\theta (\mu\beta \sin \theta) d\theta = -\vec{\mu} \cdot \vec{\beta}$$

5. Bagian terpenting dari alat percobaan S-G adalah medan magnet yang tidak homogen. Disamping itu, komponen medan magnet dalam arah sumbu-z jauh lebih besar dari pada komponen medan magnet dalam arah sumbu-x dan sumbu-y ( $\beta_z \gg \beta_x$  dan  $\beta_z \gg \beta_y$ ). Akibatnya, momen dipol magnet ini akan cenderung untuk disejajarkan dengan sumbu-z.
6. Arah resultan gaya yang bekerja pada sebuah momen dipol selalu searah dengan arah momen dipol.
7. Momen dipol magnet dalam arah sumbu-z ( $\mu_z$ ), dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

$$e_z \mu_z \frac{\partial \beta_z}{\partial z} = e_z F_z.$$

8. Alat S-G dapat digunakan untuk mengukur komponen z dari spin, yaitu  $S_z$ .



9. Pada alat S-G, gaya yang bekerja pada elektron tersebut dapat ditulis dalam bentuk spin elektron sebagai berikut:

$$F = \pm \mu_b \frac{\partial \beta_z}{\partial z} e_z$$

10. Persamaan *frekuensi cyclotron* adalah:

$$\Omega = \frac{|e|\hbar}{mc}$$

11. Keadaan elektron setelah selama  $t$  detik berada dalam medan magnet dapat dinyatakan oleh persamaan :

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i(\Omega/2)t} \\ e^{+i(\Omega/2)t} \end{pmatrix}.$$

### Tes Formatif-2.

Petunjuk: Jawablah semua soal/pertanyaan di bawah ini dengan cara memberi tanda silang (X) pada huruf di depan jawaban yang benar. Bobot nilai setiap soal adalah satu.

---

---

1. Momen dipol magnet sebuah elektron adalah sama dengan:

- a.  $\vec{\mu} = - \frac{e}{mc} \vec{S}$
- b.  $\vec{\mu} = - \frac{e\hbar}{2mc} \vec{\sigma}$
- c.  $\vec{\mu} = - \mu_b \vec{\sigma}$ ,
- d.  $\vec{\mu} = \frac{e}{mc} \vec{S}^2$ .

2. Magneton Bohr dapat dinyatakan oleh persamaan :

- a.  $\mu_b = \frac{|e|\hbar}{2mc}$
- b.  $\mu_b = \frac{|e|\hbar}{mc}$
- c.  $\mu_b = - \frac{|e|\hbar}{mc}$
- d.  $\mu_b = 2 \frac{|e|\hbar}{mc}$

3. Momen gaya dari sebuah momen dipol yang ditempatkan dalam sebuah medan magnet ( $\vec{\beta}$ ) adalah:

- a.  $\vec{N} = \vec{\mu} \times \vec{\beta}$ .
- b.  $\vec{N} = \vec{\mu} \cdot \vec{\beta}$
- c.  $\vec{N} = \frac{1}{2} \vec{\mu} \times \vec{\beta}$
- d.  $\vec{N} = \vec{\mu} \times \vec{\beta}^2$

4. Setiap momen dipol magnet yang terletak di dalam sebuah medan magnet tetap dan homogen akan cenderung untuk ..... dengan arah medan magnet tersebut.
- tegak lurus.
  - berlawanan arah.
  - membentuk sudut yang lebih kecil dari 90 derajat.
  - sejajar.
5. Pada alat S-G, gaya yang bekerja pada elektron tersebut dapat ditulis dalam bentuk spin elektron sebagai berikut:
- $F = \pm \mu_b \frac{\partial \beta_z}{\partial z} e_z$
  - $F = \pm S_z \frac{\partial \beta_z}{\partial z} e_z$
  - $F = \pm \sigma_z \frac{\partial \beta_z}{\partial z} e_z$
  - $F = \pm \frac{\partial \beta_z}{\partial z} e_z$
5. Alat Percobaan Stern-Gerlach (S-G) dapat digunakan untuk mengukur:
- Spin Pauli.
  - Momen dipole listrik.
  - Momentum sudut orbit
  - Komponen spin.
6. Sebuah elektron yang mula-mula berada pada keadaan  $\alpha_x$  ditempatkan dalam medan magnet homogen dan konstan. Tentukanlah keadaan elektron setelah  $t = T/2$  detik berada di dalam medan magnet tersebut.
- $\alpha_x$ .
  - $e^{-i\pi/4} \alpha_y$ .
  - $e^{-i\pi/4} \beta_x$ .
  - $e^{-i3\pi/4} \beta_y$ .

**Tindak Lanjut (Balikan):**

Cocokkanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban tes formatif 2 pada akhir modul ini, dan berilah skor (nilai) sesuai dengan bobot nilai setiap soal yang dijawab dengan benar. Kemudian jumlahkan skor yang Anda peroleh lalu gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan (TP) Anda terhadap materi KB-2 ini.

$$\text{Rumus (TP)} = (\text{jumlah skor/jumlah soal}) \times 100 \%$$

Arti TP yang Anda peroleh adalah sebagai berikut :

90 % - 100 % = baik sekali.

80 % - 89 % = baik

70 % - 79 % = cukup

< 70 % = rendah.

Apabila TP Anda  $\geq 80 \%$ , maka Anda boleh melanjutkan pada materi Modul berikutnya, dan Selamat !!, Tetapi jika TP Anda  $< 80 \%$ , Anda harus mengulang materi KB-2 di atas terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai.

### Kunci Jawaban Tes Formatif –1.

(Bobot nilai setiap soal adalah satu).

1. c. {Karena  $L^2_{lm,l'm'} = \hbar^2 l(l+1) \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ }
2. a. {Karena  $L^2_{lm,l'm'} = \hbar^2 l(l+1) \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ }
3. a. {Karena  $(L_z)_{lm,l'm'} = m \hbar \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ }
4. d { Karena  $m_l = -l, \dots, +l$  }
5. b. (sudah jelas )
6. a. (sudah jelas)
7. b. (sudah jelas.)
8. a. (sudah jelas)

**Kunci Jawaban Tes Formatif –2.**

(Bobot nilai setiap soal adalah satu).

1. b
2. a
3. a
4. d
5. a
6. c

## **Kepustakaan**

1. Richard L Libooff, *Introduction to Quantum Mechanics*, 2<sup>nd</sup> ed., Addison Wesley Publishing Co, Reading- Massachusetts, 1992.
2. Claude Cohen- Tannoudji, dkk, *Quantum Mechanics*, Vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1977.
3. Claude Cohen- Tannoudji, dkk, *Quantum Mechanics*, Vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 1977.
4. Min Chen, *Physics Problems with Solution*, Prentice Hall of India, New Delhi, 1987.
5. W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1994.