KB. 2 INTERAKSI PARTIKEL DENGAN MEDAN LISTRIK

2.1 Efek Stark.

Jika sebuah atom yang berelektorn satu ditempatkan di dalam sebuah medan listrik ($\pm$ sebesar 100.000 volt/cm) maka kita akan mengamati terjadinya pemisahan dari energi eigen. Gejala ini untuk pertama kali diamati oleh Stark pada tahun 1913 dan sering disebut efek Stark. Dia mengamati pemisahan dari deret Balmer dalam sebuah medan listrik sebesar 100.000 volt/cm.

Hamiltonian dari atom berelektron satu yang terletak di dalam sebuah medan listrik yang tetap dan homogen ε yang sejajar dengan sumbu-z adalah

$$H = H_0 + H'$$

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - e\varepsilon.z \qquad (1)$$

dimana $H' = - e\varepsilon.z = - e\varepsilon z \cos\theta$, dan θ adalah sudut antara medan listrik ε dengan sumbu-z positif. Fungsi eigen dari hamiltonian yng tak terganggu (H_0) adalah degenerasi sebanyak n^2 lipat. Nah sekarang marilah kita perhatikan bagaimana medan listrik ε ini menghilangkan degenerasi tersebut.

Contoh: marilah kita perhatikan keadaan untuk n = 2. Fungsi gelombang untuk n = 2 ini adalah degenerasi sebanyak 4 buah (4 lipat) dan di dalam notasi ket |n*l*m> keempat fungsi gelombang tersebut adalah:

$$\begin{matrix} |200\rangle \\ |211\rangle \\ |210\rangle \\ |21\text{-}1\rangle \end{matrix} \qquad (2)$$

Untuk menghitung perubahan energi, kita harus menyelesaikan persamaan determinan berikut:

$$\begin{vmatrix} \langle 200|H'|200\rangle - E' & \langle 200|H'|211\rangle & \langle 200|H'|210\rangle & \langle 200|H'|21-1\rangle \\ \langle 211|H'|200\rangle & \langle 211|H'|211\rangle - E' & \langle 211|H'|210\rangle & \langle 211|H'|21-1\rangle \\ \langle 210|H'|200\rangle & \langle 210|H'|211\rangle & \langle 210|H'|210\rangle - E' & \langle 210|H'|21-1\rangle \\ \langle 21-1|H'|200\rangle & \langle 21-1|H'|211\rangle & \langle 21-1|H'|210\rangle & \langle 21-1|H'|21-1\rangle - E' \end{vmatrix} = 0$$

Dari keenam belas elemen determinan tersebut di atas, hanya dua elemen yang tidak bernilai nol, yaitu <210|H’|200> dan <200|H’|210>, dimana kedua elemen ini bernilai sama, sehingga

<210|H’|200> = <200|H’|210>

$$= -\frac{ea_0\varepsilon}{32\pi}\int_0^\infty \rho^4\,(2-\rho)\,e^{-\rho}d\rho\int_{-1}^{1}\cos^2\theta\, d(\cos\theta)\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$= e\varepsilon\hbar^2/mZe = -3|e|\varepsilon\, a_0 \qquad (3)$$

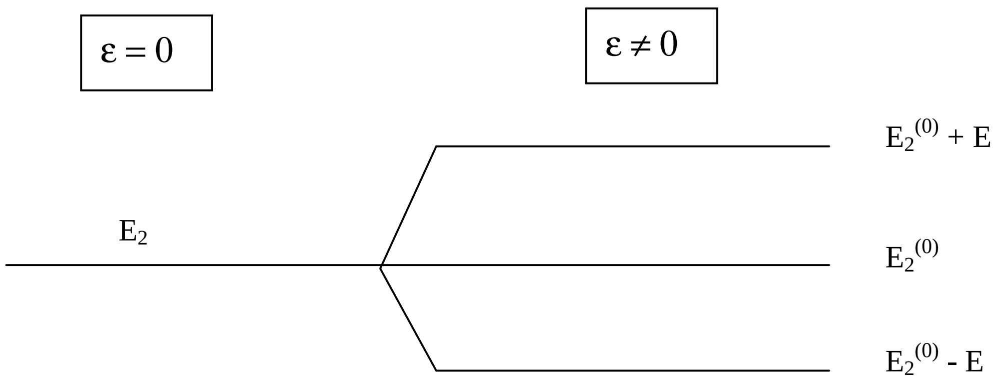
Kita misalkan $3|e|\varepsilon\, a_0 = E$, sehingga persamaan ditermninan di atas menjadi:

$$\begin{vmatrix} -E' & 0 & -E & 0 \\ 0 & -E' & 0 & 0 \\ -E & 0 & -E' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E' \end{vmatrix} = 0.$$

Diterminan ini memiliki empat buah akar, yaitu:

$$E' = 0,\ 0,\ +E,\ \text{dan}\ -E, \quad \text{dimana}\ E = 3|e|\varepsilon\, a_0. \qquad (4)$$

Jadi kita melihat bahwa medan listrik ε telah menyebabkan tingkat energi untuk n = 2 (yaitu $E_2^{(0)}$) pecah menjadi tiga tingkat energi yang baru, yatiu: $E_2^{(0)} + E$, $E_2^{(0)}$, dan $E_2^{(0)} - E$. Secara diagram, pemecahan tingkat energi ini ditunjukkan pada Gambar 1 di bawah.



Untuk menghitung fungsi gelombang yang baru untuk n = 2, kita harus mensubstitusikan nilai-nilai energi dalam persamaan (3) di atas satu demi satu ke dalam persamaan matrik

$$\begin{pmatrix} -E' & 0 & -E & 0 \\ 0 & -E' & 0 & 0 \\ -E & 0 & -E' & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0, \qquad (4)$$

dimana a, b, c, dan d adalah komponen fungsi gelombang baru tersebut, yaitu:

φ = a|200> + b | 211> + c |210> + d |21-1> (5)

Jika Anda selesaikan persamaan (4) di atas untuk setiap nilai E’ = 0, 0, +E, dan –E, maka Anda akan mendapatkan empat buah fungsi gelombang baru sebagai berikut:

- untuk E’ = $E_2^{(0)}$ + E:

  $$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|200> - |210>)$$

- Untuk E’ = $E_2^{(0)}$ - E:

  $$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}(|200> + |210>)$$

- untuk E’ = 0, kita memperoleh dua fungsi gelombang baru, yaitu:

  $\varphi = |211>$ dan $\varphi = |21{-}1>$.

Jadi pertubasi telah mencampur keadaan untuk m = 0, dan membiarkan keadaan untuk m = + 1 dan m = -1 tetap degenerasi.

Latihan:

Pikirkan sebuah atom hidrogen yang diletakkan dalam medan listrik. Hamiltonian awal (hamiltonian yang tak terganggu) untuk atom ini dinyatakan dalam bentuk sebagai berikut:

$$H_0 = -(\hbar^2/2m)\nabla^2 - e^2/r.$$

dan hamiltonian penggangu dinyatakan oleh

H’ = e F z,

dimana e = muatan listrik elektron, F = medan listrik dalam arah sumbu-z positif.

Tentukanlah koreksi orde pertama dan kedua untuk energi!

Petunjuk: gunakan tori gangguan bebas waktu yang tidak degeneras dan ikuti contoh di atas.

Rangkuman

1. Efek Stark menyatakan bahwa jika sebuah atom yang berelektorn satu ditempatkan di dalam sebuah medan listrik ($\underline{+}$ sebesar 100.000 volt/cm) maka kita akan mengamati terjadinya pemisahan dari energi eigen.
2. Hamiltonian dari atom berelektron satu yang terletak di dalam sebuah medan listrik yang tetap dan homogen ε yang sejajar dengan sumbu-z adalah

$$= \frac{p_r^2}{2m} + \frac{L^2}{2mr^2} - e\varepsilon . z$$

Tes formatif-2.

Petunjuk : Jawablah soal-soal di bawah ini !

1. Berapakah momen dipol atom hidrogen dalam keadaan $\varphi_{\pm}$?
   a. 3 $|e|\, a_0$.
   b. 2 $|e|\, a_0$.
   c. 3 $|e|^2\, a_0$.
   d. $2|e|^2\, a_0$.
2. Berapakah rapat muatan dari atom hidrogen dalam keadaan φ_- ?
   a. $q(r, \theta) = (e/16\pi a_0)[1 - r \sin^2(\theta/2)/a_0]^2\, e^{-r/a_0}$.
   b. $q(r, \theta) = (e/16\pi a^3{}_0)[1+ r \sin^2(\theta/2)/a_0]\, e^{-r/a_0}$.
   c. $q(r, \theta) = (e/16\pi a^3{}_0)[1 - r \sin^2(\theta/2)/a_0]^2\, e^{-r/a_0}$.
   d. $q(r, \theta) = (e/16\pi a^3{}_0)[1 + r \sin^2(\theta/2)/a_0]^2\, e^{-r/a_0}$.

Tindak Lanjut (Balikan):

Cocokanlah jawaban Anda dengan kunci jawaban tes formatif 2 pada akhir modul ini, dan berilah skor (nilai) sesuai dengan bobot nilai setiap soal yang dijawab dengan benar. Kemudian jumlahkan skor yang Anda peroleh lalu gunakan rumus di bawah ini untuk mengetahui tingkat penguasaan (TP) Anda terhadap materi KB-2 ini.

Rumus (TP) = (jumlah skor/10) x 100 %

Arti TP yang Anda peroleh adalah sebagai berikut :
90 % - 100 % = baik sekali.
80 % - 89 % = baik
70 % - 79 % = cukup
< 70 % = rendah.

Apabila TP Anda $\geq$ 80 %, maka Anda boleh melanjutkan pada materi Modul berikutnya, dan Selamat !!, Tetapi jika TP Anda < 80 %, Anda harus mengulang materi KB-2 di atas terutama bagian-bagian yang belum Anda kuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif-1.

(Bobot nilai untuk setiap soal adalah satu).

1. hamiltonian osilator dua dimensi yang tak terganggu adalah sebagai berikut:

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + ½\, m\omega^2\,(x^2 + y^2)$$

$$= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ½\, m\omega^2 x^2\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + ½\, m\omega^2 y^2\right)$$

Jadi hamiltonian dapat dipecah menjadi dua bagian yang terpisah, dan masing-masing bergantung pada variabel x dan y.

2. Hamiltonian total dapat ditentukan dengan cara menggabungkan hamiltonian yang tak terganggu dengan hamilton pengganggu H', yaitu sebagai berikut;

$$H = H_0 + H'$$

dan dari jawaban (a) di atas kita punya $H_0 = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ½\, m\omega^2 x^2\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + ½\, m\omega^2 y^2\right)$. Jadi

$$H = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + ½\, m\omega^2 x^2\right) + \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + ½\, m\omega^2 y^2\right) + \lambda\, xy.$$

3. Berdasarkan pada bentuk hamiltonian untuk osilator harmonis dua dimensi yang diperoleh pada jawaban (a) di atas, Anda dapat menuliskan tingkat-tingkat energi untuk osilator harmonis dua dimensi sebagai berikut:

$$E_{n1,n2} = E_{n1} + E_{n2} = \hbar\omega\,(n_1 + ½) + \hbar\omega\,(n_2 + ½)$$

$$E_{n1,n2} = \hbar\omega\,(n_1 + n_2 + 1).$$

Dengan demikian ketiga tingkat energi pertama dapat ditentukan sebagai berikut:

- keadaan dasar :

$E_{0,0} = \hbar\omega$

- tingkat energi tereksitasi pertama:

  $E_{1,0} = 2\hbar\omega$

  $E_{0,1} = 2\hbar\omega$

  Jadi tingkat energi ini adalah degenerasi dua lipat.

- Tingkat energi tereksitasi kedua:

  $E_{2,0} = 3\hbar\omega$

  $E_{0,2} = 3\hbar\omega$

  $E_{1,1} = 3\hbar\omega$

  Tingkat energi ini degenerasi tiga lipat.

4. Fungsi gelombang untuk ketiga tingkat energi tersebut di atas (jawaban c) adalah sebagai berikut:

- untuk keadaan dasar:

$\Psi_{0,0}(x,y) = \Psi_0(x)\ \Psi_0(y)$.

- untuk tingkat energi tereksitasi pertama:

$\Psi_{1,0}(x,y) = \Psi_1(x)\ \Psi_0(y)$

$\Psi_{0,1}(x,y) = \Psi_0(x)\ \Psi_1(y)$

- untuk tingkat energi tereksitasi kedua:

$\Psi_{2,0}(x,y) = \Psi_2(x)\ \Psi_0(y)$

$\Psi_{0,2}(x,y) = \Psi_0(x)\ \Psi_2(y)$

$\Psi_{1,1}(x,y) = \Psi_1(x)\ \Psi_1(y)$

5. Koreksi energi orde pertama untuk keadaan dasar dan keadaan terksitasi pertama.

- Koreksi untuk tingkat energi keadaan dasar.

Karena tingkat energi keadaan dasar tidak degenerasi, maka kita harus menggunakan teori gangguan bebas waktu yang tak degenerasi, yaitu sebagai berikut:

$$E_{0,0}^{(1)} = \langle\Psi_0(x)\ \Psi_0(y)|\ H'\ |\Psi_0(x)\ \Psi_0(y)\rangle$$

$$= \langle\Psi_0(x)\ \Psi_0(y)|\ \lambda\ xy\ |\Psi_0(x)\ \Psi_0(y)\rangle$$

$$E_{0,0}^{(1)} = \lambda \langle\Psi_0(x)\ \Psi_0(y)|\ x\ |\Psi_0(x)\ \Psi_0(y)\rangle \langle\Psi_0(x)\ \Psi_0(y)|\ y\ |\Psi_0(x)\ \Psi_0(y)\rangle$$

Karena operator-operator x dan y biasa dinyatakan oleh persamaan berikut

$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(a + a^+)$ dan $y = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_0}}(b + b^+)$, dimana ω_0 merupakan frekuensi osilator yang tak terganggu, maka:

$$E_{0,0}^{(1)} = \lambda \langle\Psi_0(x)\ \Psi_0(y)|\ x\ |\Psi_0(x)\ \Psi_0(y)\rangle \langle\Psi_0(x)\ \Psi_0(y)|\ y\ |\Psi_0(x)\ \Psi_0(y)\rangle = 0.$$

- Koreksi untuk tingkat energi tereksitasi pertama.

Karena tingkat energi tereksitasi pertama ini adalah degenerasi dua lipat, maka kita harus menggunakan teori gangguan bebas waktu yang degenerasi, yaitu sebagai berikut: Kedua fungsi gelombang untuk tingkat energi ini, yiatu

$\Psi_{1,0}(x,y) = \Psi_1(x)\ \Psi_0(y)$

$\Psi_{0,1}(x,y) = \Psi_0(x)\ \Psi_1(y)$

akan disingkat masing-masing menjadi Ψ_1 dan Ψ_2 sehingga elemen-elemen matrik dapat ditulis sebagai berikut :

$$H'_{11} = \langle\Psi_1|H'|\Psi_2\rangle = \langle \Psi_1(x)\ \Psi_0(y)|\lambda\ xy\ |\ \Psi_1(x)\ \Psi_0(y)\rangle$$

$$= \lambda\langle \Psi_1(x)|\ x\ |\ \Psi_1(x)\rangle \langle \Psi_0(y)\ |\ y\ |\ \Psi_0(y)\rangle = 0.$$

$$H'_{22} = \langle\Psi_0(x)\ \Psi_1(y)|\ \lambda\ xy\ |\Psi_0(x)\ \Psi_1(y)\rangle$$

$= \lambda <\Psi_0(x)|\ x\ \Psi_0(x)> < \Psi_1(y)|\ y\ |\ \Psi_1(y)> = 0$

$H'_{12} = \lambda <\Psi_1(x)\ \Psi_0(y)|\ xy\ |\Psi_0(x)\ \Psi_1(y)>$

$= \lambda <\Psi_1(x)|\ x\ |\Psi_0(x)> <\Psi_0(y)|\ y\ |\Psi_1(y)>$

$= \lambda\ (\hbar/2m\omega_0)$

$H'_{21} = \lambda <\Psi_0(x)\ \Psi_1(y)|\ xy\ |\ \Psi_1(x)\ \Psi_0(y)>$

$= \lambda <\Psi_0(x)|\ x\ |\Psi_1(x)> <\Psi_1(y)|\ y\ |\Psi_0(y)>$

$= \lambda\ (\hbar/2m\omega_0)$.

Jadi persamaan sekuler nya dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{vmatrix} H'_{11} - E^{(1)} & H'_{12} \\ H'_{21} & H'_{22} - E^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 - E^{(1)} & \dfrac{\lambda\hbar}{2m\omega_0} \\ \dfrac{\lambda\hbar}{2m\omega_0} & 0 - E^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

sehingga nilai koreksi energi orde pertama ini adalah: $E^{(1)} = \pm \lambda\hbar/2m\omega_0$.

6. Orde ke nol fungsi gelombang untuk keadaan eksitasi pertama dapat ditentukan sebagai berikut. Pertama kita substitusikan masing-masing $E^{(1)} = + \lambda\hbar/2m\omega_0$ ke dalam persamaan

$$\begin{vmatrix} 0 - E^{(1)} & \dfrac{\lambda\hbar}{2m\omega_0} \\ \dfrac{\lambda\hbar}{2m\omega_0} & 0 - E^{(1)} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0,$$

dimana c_1 dan c_2 adalah komponen dari fungsi gelombang orde ke nol untuk $E^{(1)} = + \lambda\hbar/2m\omega_0$. Dari persamaan ini Anda dapat menentukan nilai c dengan cara biasa, dan hasilnya adalah $c_1 = c_2$. Kemudian dari sifat normalisasi fungsi gelombang kita akan dapatkan $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. Dan karena $c_1 = c_2$, maka Anda dapatkan

$$c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Dengan demikian, fungsi gelombang orde ke nol adalah:

$$\Psi_+ = c_1\,\Psi_1 + c_2\,\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\Psi_1(x)\,\Psi_0(y) + \Psi_0(x)\,\Psi_1(y)\}$$

Dengan cara yang sama Anda dapat menentukan fungsi gelombang orde ke nol untuk $E^{(1)} = -\lambda\hbar/2m\omega_0$. Dan hasilnya adalah $c_1 = -c_2$, sehingga fungsi gelombang untuk $E^{(1)} = -\lambda\hbar/2m\omega_0$ adalah

$$\Psi_- = c_1\,\Psi_1 - c_2\,\Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\Psi_1(x)\,\Psi_0(y) - \Psi_0(x)\,\Psi_1(y)\}.$$

Kunci jawaban Tes formatif-2

(Bobot setiap nilai adalah 5)

1. a
2. c.

Kepustakaan

1. Richard L Libooff, *Introduction to Quantum Mechanics, 2nd ed.,* Addison Wesley Publishing Co, Reading- Massachusetts, 1992.
2. Claude Cohen- Tannoudji, dkk, *Quantum Mechanics,* Vol. 1, John Wiley & Sons, New York, 1977.
3. Claude Cohen- Tannoudji, dkk, *Quantum Mechanics,* Vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 1977.
4. Min Chen, *Physics Problems with Solution,* Prentice Hall of India, New Delhi, 1987.
5. W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics,* Springer-Verlag, New York, 1994.