BAB I. REPRESENTASI MATRIKS

1.1 Ruang Hilbert "ξ" Menurut notasi dirac

1.1.1 Vektor Ket dan Vektor Bra

Setiap elemen atau vektor didalam ruang hilbert disebut vektor ket atau ket. Ket menurut notasi dirac dinyatakan dengan simbol "$|\ \rangle$". Supaya kita dapat membedakan suatu ket dengan ket-ket lainnya maka kedalam tanda "$|\ \rangle$" dimasukan atau dituliskan huruf atau angka. Sebagai contoh ket Ψ dituliskan dengan simbol "$|\Psi\rangle$". Beberapa ket membentuk ruang vektor linier. Setiap kombinasi linier dari beberapa ket juga berupa suatu vektor ket. Sebagai contoh misalkan kita ambil dua ket "$|1\rangle$" dan "$|2\rangle$" juga dua bilangan kompleks sembarang λ_1 dan λ_2. Kombinasi linier kedua vektor ket tersebut adalah

$$|\Psi\rangle = \lambda_1|1\rangle + \lambda_2|2\rangle$$

Hasil kombinasi liniernya adalah juga berupa vektor ket. Analoginya dengan ruang gelombang dapat dinyatakan sebagai berikut $\Psi(r) \in$ ruang gelombang $\leftrightarrow$ $|\Psi\rangle \in$ ruang Hilbert menurut definisi ket-ket dari suatu ensambel adalah bebas linier atau tak bergantungan linier (linierly Independent) jika tak ada satupun dari mereka dapat dinyatakan dalam bentuk kombinasi linier dari ket-ket lainnya.

Jika suatu ruang vektor mengandung paling banyak n buah vektor bebas linier, maka dikatakan dimensi ruang ini terbatas dan jumlah dimensinya didefinisikan sama dengan n. Jika dalam suatu ruang mengandung jumlah vektor bebas liniernya tak terbatas maka dikatakan ruang ini memiliki jumlah dimensi tak berhingga. Ruang vektor berdimensi tak berhingga ini dinamakan ruang Hilbert.

Seperti yang kita ketahui dalam aljabar linier bahwa dengan setiap ruang vektor dapat dikaitkan dengan ruang vektor rangkap (dual space vektor). Setiap linier fungsional $\chi(|U\rangle)$ dari ket $|U\rangle$ memiliki sifat superposisi. Linier fungsional χ adalah suatu operasi linier yang mengasosiasikan suatu bilangan kompleks dengan setiap ket $|U\rangle$:

$$|U\rangle \in \xi \xrightarrow{\chi} \text{bilangan } \chi(|U\rangle)$$

$$\chi(\lambda_1|U_1\rangle + \lambda_2|U_2\rangle) = \lambda_1\chi(|U_1\rangle) + \lambda_2\chi(|U_2\rangle)$$

Linier fungsional dan operasi linier keduanya beroperasi linier tetapi membetuk kaitan masing-masing ket dengan bilangan kompleks. Linier fungsional didefinisikan pada ket $|U\rangle \in \xi$ merupakan ruang vektor yang disebut dual space dari ξ dan dilambangkan dengan ξ^*. Elemen –elemen dari ruang vektor ξ^* menurut notasi dirac disebut vektor Bra atau Bra dan dinyatakan dengan simbol

$"|"\rangle$. Untuk membedakan suatu vektor bra dengan bra lainnya maka kedalam simbol itu dituliskan huruf atau angka.Contoh bra Ψ ditulis $|\Psi\rangle$. $\langle\chi|\Psi\rangle$ menyatakan bilangan yang diperoleh dengan cara linier fungsional $\langle\chi| \in \xi^*$ bekerja pada ket $|\Psi\rangle \in \xi$.

$$\langle\chi|(|\Psi\rangle) = \langle\chi|\Psi\rangle$$

Simbol $\langle\ |\ \rangle$ itu sendiri dinamakan bracket (tanda kurung).

Secara garis besarnya ruang hilbert adalah suatu ruang vektor linier dengan dimensi tak hingga yang memiliki produk skalar dan bersifat lengkap. Vektor-vektor didalam ruang vektor linier mempunyai sifat-sifat sebagai berikut:

1. Jika $|C\rangle$ adalah jumlah dari $|a\rangle$ dan $|b\rangle$ maka ditulis $|C\rangle = |a\rangle + |b\rangle$.
2. Perkalian suatu bilangan kompleks λ dengan suatu vektor $|a\rangle$ menghasilkan vektor lain $|b\rangle$ dengan $|b\rangle = \lambda|a\rangle$
3. jika $|a\rangle$ dan $|b\rangle$ masing-masing elemen dari ruang hilbert maka $(|a\rangle + |b\rangle)$ adalah juga elemen dari ruang hilbert (sifat tertutup terhadap penjumlahan).
4. Jika $|a\rangle \in \xi$ dan λ adalah skalar kompleks maka $\lambda|a\rangle \in \xi$ (sifat tertutup terhadap perkaliandengan bilangan kompleks).
5. Terdapat elemen nol dalam ruang ξ sehingga untuk setiap $|a\rangle \in \xi$ berlaku $|a\rangle + |0\rangle = |a\rangle$
6. untuk setiap $|a\rangle \in \xi$ ada inversnya $|a'\rangle$ sedemikian hingga $|a\rangle + |a'\rangle = 0$
7. Berlaku hukum-hukum algebra untuk ket dalam ruang ξ
   a. $|\alpha\rangle + |\beta\rangle = |\beta\rangle + |\alpha\rangle$ sifat komutatif
   b. $(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) + |\gamma\rangle = |\alpha\rangle + (|\beta\rangle + |\gamma\rangle)$ sifat asosiatif
   c. $a(b|\alpha\rangle) = ab|\alpha\rangle$ sifat asosiatif terhadap perkalian
   d. $(a+b)|\alpha\rangle = a|\alpha\rangle + b|\alpha\rangle$ sifat distributif
   e. $a(|\alpha\rangle + |\beta\rangle) = a|\alpha\rangle + a|\beta\rangle$ sifat distributif

Hubungan Antara Ket Dan Bra

Anda sudah mempelajari bagaimana perkalian skalar dari dua vektor dinotasikan dan dijabarkan dalam ruang gelombang pada modul pengantar fisika kuantum. Berikutnya akan kita pelajari bagaimana hal itu dinotasikan dalam notasi dirac. Produk skalar atau perkalian skalar dua vektor ket $|\varphi\rangle$ dan $|\Psi\rangle$ dalam ruang gelombang.dituliskan dengan $(|\varphi\rangle, |\psi\rangle)$, sedangkan dalam notasi dirac dituliskan dengan $\langle\varphi|\Psi\rangle$ atau

$$(|\varphi\rangle, |\Psi\rangle) = \langle\varphi|\Psi\rangle$$

dengan demikian dapat kita lihat bahwa dalam ruang ξ perkalian skalar adalah antilinier terhadap vektor pertama. Sebagai contoh bila $|\varphi\rangle$ merupakan kombinasi linier dari $|\varphi_1\rangle$ dan $|\varphi_2\rangle$, $|\varphi\rangle = \lambda_1|\varphi_1\rangle + \lambda_2|\varphi_2\rangle$ maka perkalian skalarnya dengan $|\Psi\rangle$ adalah

$$(\lambda_1|\varphi_1\rangle + \lambda_2|\varphi_2\rangle, |\Psi\rangle) = \lambda_1^*(|\varphi_1\rangle, |\Psi\rangle) + \lambda_2^*(|\varphi_2\rangle, |\Psi\rangle) = (\lambda_1^*\langle\varphi_1| + \lambda_2^*\langle\varphi_2|)|\Psi\rangle$$

Maka untuk sembarang $|\Psi\rangle$ berlaku

$$\lambda_1|\varphi_1\rangle + \lambda_2|\varphi_2\rangle \Rightarrow \lambda_1^*\langle\varphi_1| + \lambda_2^*\langle\varphi_2|$$

Jadi dengan demikian perubahan dari ket ke Bra hubungannya antilinier. Sebagai catatan jika λ adalah bilangan kompleks dan $|\Psi\rangle$ adalah suatu ket maka $\lambda|\Psi\rangle = |\lambda\Psi\rangle$. Bila kita ubah ket $|\lambda\Psi\rangle$ menjadi bra maka $\langle\lambda\Psi| = \lambda^*\langle\Psi|$ yang menunjukan bahwa hubungan antara ket dan bra adalah antilinier.

SIFAT-SIFAT PERKALIAN SKALAR

a. $\langle\varphi|\Psi\rangle = \langle\Psi|\varphi\rangle^*$
b. $\langle\varphi|\lambda_1\Psi_1 + \lambda_2\Psi_2\rangle = \lambda_1\langle\varphi|\Psi_1\rangle + \lambda_2\langle\varphi|\Psi_2\rangle$
c. $\langle\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2|\Psi\rangle = \lambda_1\langle\varphi_1|\Psi\rangle + \lambda_2\langle\varphi_2|\Psi\rangle$
d. $\langle\Psi|\Psi\rangle$ real, positif, nol jika dan hanya jika $|\Psi\rangle = 0$

OPERATOR LINIER

Pengertian operator sedikit banyaknya sudah anda pelajari dalam modul pengatar fisika kuantum. Pada waktu kita mempelajari probabilitas gelombang materi misalnya menentukan harga rata-rata, variansi dari suatu besaran dinamis atau observable maka kita ubah dulu observable menjadi operator. Sekarang kita akan pelajari lebih jauh tentang pengertian dan kerja suatu operator linier dalam ruang hilbert.

Menuurt definisi operator linier adalah suatu operator yang berasosiasi dengan setiap ket dan menghasilkan ket lain yang berbeda dengan ket semula. Sebagai contoh misalkan suatu operator $\hat{A}$ bekerja pada suatu fungsi atau vektor $|\Psi\rangle \in \xi$ maka ditulis

$$\hat{A}|\Psi\rangle = |\Psi'\rangle$$

dimana $|\Psi\rangle \neq |\Psi'\rangle$. Bila $|\Psi\rangle$ merupakan kombinasi linier dari $|\Psi_1\rangle$ dan $|\Psi_2\rangle$ atau $|\Psi\rangle = \lambda_1|\Psi_1\rangle + \lambda_2|\Psi_2\rangle$ maka:

$$\hat{A}|\Psi\rangle = \hat{A}(\lambda_1|\Psi_1\rangle + \lambda_2|\Psi_2\rangle) = \hat{A}\lambda_1|\Psi_1\rangle + \hat{A}\lambda_2|\Psi_2\rangle = \lambda_1\hat{A}|\Psi_1\rangle + \lambda_2\hat{A}|\Psi_2\rangle$$

dari persamaan itu dapat kita lihat bahwa kerja suatu operator pada suatu fungsi hubungannya linier.

Perkalian dua operator linier $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ ditulis $\hat{A}\hat{B}$ dan didefinisikan sebagai berikut:

$$(\hat{A}\hat{B})|\Psi\rangle = A(B|\Psi\rangle)$$

Artinya bila operator $\hat{A}\hat{B}$ bekerja pada suatu fungsi maka operator $\hat{B}$ terlebih dahulu dikerjakan pada $|\Psi\rangle$ hingga menghasilkan ket lain $|\Psi^{'}\rangle = B|\Psi\rangle$, baru kemudian operator $\hat{A}$ bekerja pada $|\Psi^{'}\rangle$ dan akan menghasilkan ket yang lain lagi misalnya: $|\Psi^{''}\rangle = A|\Psi^{'}\rangle$.

Secara singkat dapat diungkapkan sebagai berikut:

$(\hat{A}\hat{B})|\Psi\rangle = \hat{A}(\hat{B}|\Psi\rangle) = \hat{A}|\Psi^{'}\rangle = |\Psi^{''}\rangle$

bila anda bertanya, "mengapa urutannya harus seperti itu"? ya, itu disebabkan karena pada umumnya $\hat{A}\hat{B}$ tidak sama dengan $\hat{B}\hat{A}$ atau pada umumnya dua operator tidak komut. Contoh-contoh operator linier misalnya:

1. perkalian dengan bilangan kompleks λ
   a. $|\Psi\rangle\lambda = \lambda|\Psi\rangle$
   b. $\langle\Psi|\lambda = \lambda\langle\Psi|$
   c. $\hat{A}\lambda|\Psi\rangle = \lambda\hat{A}|\Psi\rangle$
   d. $\langle\varphi|\lambda|\Psi\rangle = \lambda\langle\varphi|\Psi\rangle$
2. proyeksi pada $|\Psi\rangle$

misalkan $|\Psi\rangle \in \xi$ adalah ket yang ternormalisasi yaitu $\langle\Psi|\Psi\rangle$ = 1. Kita tinjau operator $\hat{P}_\Psi$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\hat{P}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|$$

Selanjutnya kita operasikan operato-operator tersebut pada sembarang ket $|\Psi\rangle \in \xi$ sebagian berikut:

$$\hat{P}_\Psi|\varphi\rangle = |\Psi\rangle\langle\Psi|\varphi\rangle$$

ternyata menghasilkan ket yang berbanding lurus dengan $|\Psi\rangle$ dengan koefisien perbandingannya berupa perkalian skalar antara $|\varphi\rangle$ dan $|\Psi\rangle$ yaitu $\langle\Psi|\varphi\rangle$ Arti geometris dari $\hat{P}_\Psi$ adalah proyeksi orthogonal sembarang ket pada ket $|\Psi\rangle$. Operator proyeksi ini $\hat{P}_\Psi$ mempunyai sifat idempoten yaitu $\hat{P}_\Psi^2 = \hat{P}_\Psi$.

contoh: buktikan bahwa $\hat{P}_\Psi^2 = \hat{P}_\Psi$

Jawab

$$\hat{P}_\Psi^2 = \hat{P}_\Psi\hat{P}_\Psi = |\Psi\rangle\langle\Psi|\Psi\rangle\langle\Psi|$$

Karena $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$ = 1 maka

$$\hat{P}_{\Psi}^{2} = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \hat{P}_{\Psi}$$

3. Proyeksi Ke Suatu Sub ruang (Sub Space)

   Misalkan $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, |\varphi_3\rangle, ..., |\varphi_q\rangle$ adalah q buah vektor ternormalisasi yang satu sama lain saling tegak lurus(orthogonal).

   Vektor-vektor yang ternormalisasi dan orthogonal dinamakan vektor orthonormal. Maka perkalian skalarnya dapat diungkapkan sebagai berikut.

$$\langle \varphi_i | \varphi_j \rangle = \delta_{ij}$$

   δ_{ij} adalah fungsi delta kroneker yaitu harganya sama dengan satu bila i = j dan nol yang lainnya atau

$$\delta_{ij} \begin{cases} = 1 & \text{bila } i = j \\ = 0 & \text{bila } i \neq j \end{cases}$$

   Kita bisa menyatakan bahwa kumpulan q buah vektor tersebut berada disuatu subruang dari ruang hilbert. Subruang vektor tersebut direntangkan (span) oleh q buah vektor dan dilambangkan dengan ξ_q Misalakan $\hat{P}_q =$ adalah operator linier yang didefinisikan oleh $\hat{P}_q = \sum |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$. Kita operasikan operator tersebut pada sembarang ket $|\Psi\rangle \in \xi$ maka

$$\hat{P}|\Psi\rangle = \sum_{i=1}^{q} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\Psi\rangle$$

$$= |\varphi_1\rangle\langle\varphi_1|\Psi\rangle + |\varphi_2\rangle\langle\varphi_2|\Psi\rangle + |\varphi_3\rangle\langle\varphi_3|\Psi\rangle + ... + |\varphi_q\rangle\langle\varphi_q|\Psi\rangle$$

   Ternyata menghasilakan superposisi linier dari proyeksi $|\Psi\rangle$ ke dalam berbagai variasi $|\varphi_i\rangle$. yang tidak lain adalah proyeksi $|\Psi\rangle$ kedalam subruang ξ_q.

KERJA SUATU OPERATOR LINIER PADA VEKTOR BRA

Relasi yang mendifinisikan kerja suatu operator linier $\hat{A}$ pada bra $\langle\varphi| \in \xi$ dapat didituliskan sebagai berikut

$$\left(\langle\varphi|\hat{A}\right)|\Psi\rangle = \langle\varphi|\left(\hat{A}|\Psi\rangle\right)$$

operator linier $\hat{A}$ yang bekerja pada bra $\langle\varphi|$ menghasilkan bra baru $\langle\varphi'|$ dimana $\langle\varphi| \neq \langle\varphi'|$ dan hubungannya adalah linier (correspondence linier). Sekarang mari kita tinjau kombinasi linier yang dinyatakan oleh $\langle\varphi_1|$ dan $\langle\varphi_2|$ sebagai berikut:

$$\langle\varphi| = \lambda_1\langle\varphi_1| + \lambda_2\langle\varphi_2|$$

Berdasarkan definisi diatas

$$\left(\langle\varphi|\hat{A}\right)|\Psi\rangle = \langle\varphi|\left(\hat{A}|\Psi\rangle\right)$$
$$= \left(\lambda_1\langle\varphi_1| + \lambda_2\langle\varphi_2|\right)\left(\hat{A}|\Psi\rangle\right)$$
$$= \lambda_1\langle\varphi_1|(\hat{A}|\Psi\rangle) + \lambda_2\langle\varphi_2|(\hat{A}|\Psi\rangle)$$
$$= \lambda_1(\langle\varphi_1|\hat{A})|\Psi\rangle + \lambda_2(\langle\varphi_2|\hat{A})|\Psi\rangle$$

jika $|\Psi\rangle$ adalah sembarang ket maka

$$\langle\varphi|\hat{A} = \lambda_1\langle\varphi_1|\hat{A} + \lambda_2\langle\varphi_2|\hat{A}$$

yang menyatakan bahwa bra $\langle\varphi|\hat{A}$ adalah bra sebagai hasil dari operasi linier $\hat{A}$ pada $|\varphi\rangle$. Berdasarkan apa yang sudah diuraikan diatas ada dua hal penting yang harus kita perhatikan yaitu:

1. penempatan tanda kurung dalam simbol yang mendefinisikan elemen matrik . $\hat{A}$ antara $|\varphi\rangle$ dan $|\Psi\rangle$ tidak penting
   $$\langle\varphi|A|\Psi\rangle = \left(\langle\varphi|A\right)|\Psi\rangle = \langle\varphi|\left(A|\Psi\rangle\right)$$
2. cara penulisan yang menyatakan operator $\hat{A}$ bekerja pada $\langle\varphi|$ adalah $\langle\varphi|\hat{A}$. Bila anda menuliskan $\hat{A}\langle\varphi|$ maka penulisan seperti itu bukan menyatakan kerja operator $\hat{A}$ pada $\langle\varphi|$ tapi hanyalah perkalian antara $\hat{A}$ dan $\langle\varphi|$. Bila $\langle\varphi|\hat{A}$ bekerja pada $|\Psi\rangle$ maka hasilnya $\hat{A}\langle\varphi|\Psi\rangle$ berupa operator.

OPERATOR HERMITIAN ADJOINT $\hat{A}^+$ DARI OPERATOR LINIER $\hat{A}$

Hermitian adjoint dari suatu operator linier $\hat{A}$ didefinisikan sebagai berikut:

$$|\Psi\rangle \xrightarrow{\hat{A}} |\Psi'\rangle = A|\Psi\rangle$$
$$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$$
$$\langle\Psi| \xrightarrow[\hat{A}^+]{} \langle\Psi'| = \langle\Psi|\hat{A}^+$$

hubungan. $\langle\Psi'| = \langle\Psi|\hat{A}^+$ adalah linier.

Contoh : buktikan bahwa hubungan $\langle\Psi'| = \langle\Psi|\hat{A}^+$ adalah linier dan $\hat{A}^+$ adalah operator linier.

Jawab : telah kita ketahui bahwa hubungan antara bra dan ket adalah anti linier.

$$\lambda_1\langle\Psi_1| + \lambda_2\langle\Psi_2| = \lambda_1^*|\Psi_1\rangle + \lambda_2^*|\Psi_2\rangle$$

$$\lambda_1^* \hat{A}|\Psi_1\rangle + \lambda_2^* \hat{A}|\Psi_2\rangle = \lambda_1^*|\Psi_1'\rangle + \lambda_2^*|\Psi_2'\rangle$$
$$= \lambda_1\langle\Psi_1'| + \lambda_2\langle\Psi_2'|$$
$$= \lambda_1\langle\Psi_1|\hat{A}^+ + \lambda_2\langle\Psi_2|\hat{A}^+$$
$$= (\lambda_1\langle\Psi_1| + \lambda_2\langle\Psi_2|)\hat{A}^+$$

jadi dengan demikian hubungan $\langle\Psi'| = \langle\Psi|\hat{A}^+$ adalah linier (perhatikan baris ke 3 dan ke 4)dan $\hat{A}^+$ (hermitian adjoint dari $\hat{A}$) berupa operator linier.
Berdasarkan uraian diatas maka. $\hat{A}^+$ .adalah operator linier yang didefinisikan oleh rumusan

$$|\Psi'\rangle = \hat{A}|\Psi\rangle \leftrightarrow \langle\Psi'| = \langle\Psi|\hat{A}^+$$

Bila $|\varphi\rangle$ adalah ket sembarang $|\varphi\rangle \in \xi$ dan dengan menggunakan sifat-sifat perkalian skalar maka selalu kita tuliskan

$$\langle\Psi'|\varphi\rangle = \langle\varphi|\Psi\rangle^*$$

Berdasarkan definisi $\hat{A}^+$ diatas kita dapat menuliskan

$$\langle\Psi|A^+|\varphi\rangle = \langle\varphi|A|\Psi\rangle^*$$

Ungkapan tersebut berlaku untuk semua $|\varphi\rangle$ dan $|\Psi\rangle$. Satu hal yang perlu anda catat adalah bahwa bila operator linier $\hat{A}$ dikeluarkan dari simbol bra maka haruslah diganti dengan adjoint nya $\hat{A}^+$ dan ditempatkan disebelah kanan bra.

Atau $\langle\Psi\hat{A}| = \langle\Psi|\hat{A}^+$

Beberapa sifat operator Hermitian Adjoint

1. $(\hat{A}^+)^+ = \hat{A}$
2. $(\lambda\hat{A})^+ = \lambda^*\hat{A}^+$; λ adalah bilangan kompleks
3. $(\hat{A}+\hat{B})^+ = \hat{A}^+ + \hat{B}^+$
4. $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$

sifat no 4 menunjukan bahwa hermitian adjoint dari perkalian skalar dua operator adalah sama dengan perkalian hermitian adjoint masing-masing operator tapi dengan urutan dibalik.

Soal: Buktikanlah bahwa $(\hat{A}\hat{B})^+ = \hat{B}^+\hat{A}^+$
Jawab

Misalkan $|\varphi\rangle = \hat{A}\hat{B}|\Psi\rangle = \hat{A}|\Psi'\rangle$ dengan $|\Psi'\rangle = \hat{B}|\Psi\rangle$

Kita ubah ket $|\varphi\rangle$ menjadi bra $\langle\varphi|$ maka menurut definisi

$$\langle\varphi| = \langle\Psi|\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{+}$$
$$= \langle\Psi'|\hat{A}^{+} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots* $$

karena $|\Psi'\rangle = \hat{B}|\Psi\rangle$ maka $\langle\Psi'| = \langle\Psi|\hat{B}^{+}$

jadi

$$\langle\varphi| = \langle\Psi|\hat{B}^{+}\hat{A}^{+} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.** $$

dari persamaan * dan ** diperoleh $\left(\hat{A}\hat{B}\right)^{+} = \hat{B}^{+}\hat{A}^{+}$

Hal lain yang perlu juga nada perhatikan adalah bahwa definisi operator hermitian adjoint dapat juga dituliskan sebagai berikut

$$\left\langle \hat{A}^{+}\varphi \middle| \Psi \right\rangle = \langle\varphi|\hat{A}|\Psi\rangle$$

yang artinya bahwa dalam perkalian skalar dua vektor suatu operator dapat pindah dari satu ruang ke ruang lainnya tapi dengan mengubahnya terlebih dahulu dengan hemitian adjointnya.

HERMITIAN ADJOINT DALAM NOTASI DIRAC

Telah kita tunjukan bahwa hermitian adjoint dari perkalian dua vektor sama dengan perkalian hermitian adjoint dari masing-masing operator dengan menukarkan letaknya. Sekarang marilah kita buktikan bahwa:

$$\left(|\Psi\rangle\langle\varphi|\right)^{+} = |\varphi\rangle\langle\Psi|$$

bukti

$$\langle U|\left(|\Psi\rangle\langle\varphi|\right)^{+}|V\rangle = \left[\langle V|\left(|\Psi\rangle\langle\varphi|\right)|U\rangle\right]$$
$$= \langle V|\Psi\rangle^{*}\langle\varphi|U\rangle^{*}$$
$$= \langle\Psi|V\rangle\ \langle U|\varphi\rangle$$
$$= \langle U|\varphi\rangle\langle\Psi|V\rangle$$
$$= \langle U|\left(|\varphi\rangle\langle\Psi|\right)|V\rangle$$

dengan demikian: $\left(|\Psi\rangle\langle\varphi|\right)^{+} = |\varphi\rangle\langle\Psi|$

Jadi dalam notasi Dirac, operasi hermitian adjoint mengikuti aturan sebagai berikut: untuk memperoleh hermitian adjoint dari setiap pernyataan yang terdiri dari konstanta, kets, bra dan operator ialah

1. mengganti konstanta dengan konjugasi kompleksnya
2. mengganti kets dengan bra yang berkaitan
3. mengganti bra dengan kets yang berkaitan
4. mengganti operator dengan hermitian adjointnya

Contoh Soal

1. tentukanlah hermitian adjoint dari pernyataan berikut

$$\lambda\langle U|\hat{A}|V\rangle|\Psi\rangle\langle\varphi|$$

jawab

dalam pernyataan tersebut λ dan $\langle U|\hat{A}|V\rangle$ adalah bilangan dan $|\Psi\rangle$ ket $\langle\varphi|$ adalah bra. Hermitian adjoint pernyataan tersebut menurut aturan diatas adalah

$$\left(\lambda\langle U|\hat{A}|V\rangle|\Psi\rangle\langle\varphi|\right)^{+} = \lambda^{*}\langle V|\hat{A}^{+}|U\rangle|\varphi\rangle\langle\Psi|$$

2. Tentukanlah Hermitian adjoint dari pernyataan berikut

$$\lambda\,|\,u\rangle\langle v\,|\,w\rangle$$

Jawab

Dalam pernyataan tersebut λ dan $\langle v\,|\,w\rangle$ adalah bilangan dan $|\,u\rangle$ adalah suatu ket. Hermitian adjiont dari pernyataan tersebut adalah

$$\lambda\,|\,u\rangle\langle v\,|\,w\rangle^{+} = \lambda^{*}\langle u\,|\,\langle w\,|\,v\rangle$$

OPERATOR HERMITIAN

Suatu operator disebut Hermitian bila sama dengan hermitian adjointnya atau bila $\hat{A} = \hat{A}^{+}$ maka operator $\hat{A}$ adalah Hermitian. Untuk operator Hermitian berlaku

$$\left.\begin{array}{l} 1.\langle\psi\,|\,A\,|\,\varphi\rangle = \langle\varphi\,|\,A\,|\,\psi\rangle^{*} \\ 2.\langle\hat{A}\varphi\,|\,\psi\rangle = \langle\varphi\,|\,\hat{A}\psi\rangle \end{array}\right. \quad \text{untuk semua } |\,\varphi\rangle.dan.|\,\psi\rangle$$

1.2. REFRESENTASI DAN BASIS

Anda sebaiknya mengingat kembali pengertian-pengertian basis dan komponen vektor dari suatu vektor didalam ruang vektor Cartesian, sebelum mempelajari bagian modul . hai itu dimaksudkan supaya anda dapat melihat analogo antara ruang Cartesian dan ruang Hilbert untuk pengertian basis dan komponen

Vektor dan operator dijabarkan ke dalam basis-basisnya oleh bilangan-bilangan. Vektor dijabarkan dalam komponen-komponennya sedangkan operatir dijabarkan oleh elemen-elemen matriknya. Dua hubungan antar basis dalam notasi Dirac ialah relasi Orthonormalisasi dan relasi Cosure.

a. Relasi Ortonormalisasi

Suatu set ket diskrit $\{|\,u_i\rangle\}$ atau set ket kontinu $\{|\,w_\alpha\rangle\}$ disebut ortonormal jika ket-ket tersebut memenuhi relasi sebagai berikut

$\langle u_i\,|\,u_j\rangle = \delta_{ij}$ Set diskrit

$\langle w_\alpha\,|\,w_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha-\alpha')$ Set kontinu

Produk skalar set diskrit menghasilkan fungsi delta Kronecker δ_{ij}. Dan produk skalar set kontinu menghasilkan fungsi delta Dirac $\delta(\alpha-\alpha')$.

b. **Relasi Closure**

Suatu set ket diskrit $\{|u_i\rangle\}$ atau set ket kontinu $\{|w_\alpha\rangle\}$ merupakan basis dalam ruang Hilbert jika setiap ket $|\psi\rangle \in$. Dapat dijabarkan secara unik ke dalam $|u_i\rangle$. Atau $|w_\alpha\rangle$. Yaitu

$\|\psi = \sum c_i \|u_i\rangle$	diskrit
$\|\psi\rangle = \int d\alpha.c(\alpha) \|w_\alpha\rangle$	kontinu

Pada persamaaan tersebut C_I dan C (α) masing-masing menyatakan komponen dari vektor ket $|\psi\rangle$. C_i adalah komponen $|\psi\rangle$ dalam basis diskrit $|u_i\rangle$ dan C(α). Adalah komponen dari $|\psi\rangle$. Dalam kontinu $|w_\alpha\rangle$ untuk menentukan komponen suatu vektor ket dalam dilakukan cara sebagai berikut : kalikan atau produkskalarkan $|\psi\rangle$. Dengan baris lalu integrasikan meliputi seluruh ruang

$$\langle u_j|\psi\rangle = \langle u_j|\sum_i c_i |u_i\rangle = \sum c_i \langle u_j|u_i\rangle$$

$$\Leftrightarrow = \sum_i c_i \delta_{ji} \qquad \text{untuk} \quad i = j$$

$$\Leftrightarrow = c_j$$

C_j adalah komponen ke C_j dari vektor ket $|\psi\rangle$ dengan cara yang sama komponen ke C_I dari vektor ket $|\psi\rangle$ adalah $\langle u_i|\psi\rangle = c_i$

Bila pada persamaan $|\psi\rangle = \sum c_i |u_i\rangle$ … harga C_I nya digantikan dengan $\langle u_i|\psi\rangle = c_i$ …. Maka diperoleh $|\psi\rangle = \sum_i \langle u_i|\psi\rangle |u_i\rangle = \sum_i |u_i\rangle\langle u_i|\psi\rangle$

coba anda perhatikan kedua ruas persamaan di atas supaya ruas kiri sama dengan ruas kanan maka haruslah dipenuhi

$$\sum_i |u_i\rangle\langle u_i| = I$$

Hubungan tersebut di namakan relasi Closure dengan I menyatakan Operator identitas.

Pada basis kontinu bila pada persamaan

$|\psi\rangle = \int d\alpha.c(\alpha)|w_\alpha\rangle$ harga C(α)nya kita gantikan dengan $\langle w_\alpha|\psi\rangle$ maka diperoleh:

$$|\psi\rangle = \int d\alpha.\langle w_\alpha|\psi\rangle |w_\alpha\rangle = \int d\alpha |w_\alpha\rangle\langle w_\alpha|\psi\rangle$$

Persamaan tersebut akan benar bila dipenuhi

$$\int d\alpha |W_\alpha\rangle\langle W_\alpha| = 1$$

Hubungan tersebut juga dinamakan relasi closure dengan 1 menyatakan operator identitas .

Jadi dengan demikian representasi dalam ruang keadaan dapat dinyatakan sebagai berikut:

Set diskrit $\{|U_i\rangle\}$	Set kontinu $\{|W_\alpha\rangle\}$
$\langle U_i | U_j\rangle = \delta_{ij}$	$\langle W_\alpha | W_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha - \alpha')$
$\sum_i |U_i\rangle\langle U_i| = 1$	$\int d\alpha |W_\alpha\rangle\langle W_\alpha| = 1$

Representasi Matriks Kets dan Bra

Dalam basis $\{|U_i\rangle\}$, vektor kets dijabarkan oleh suatu set komponen-komponennya yaitu oleh sejumlah bilangan $C_i = \langle U_i | \Psi\rangle$. Bilangan-bilangan tersebut disusun secara vertikal membentuk matriks kolomnya.

$$\begin{pmatrix} \langle U_1|\Psi\rangle \\ \langle U_2|\Psi\rangle \\ \langle U_3|\Psi\rangle \\ .... \\ .... \\ \langle U_i|\Psi\rangle \end{pmatrix} \quad \text{atau} \quad \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ .... \\ . \\ C_i \end{pmatrix}$$

Vektor bra $\langle\varphi|$ dalam basis $\{|U_i\rangle\}$ dapat diungkapkan sebagai berikut $\langle\varphi| = \sum \langle\varphi|U_i\rangle\langle U_i|$. Telah kita pelajari sebelumnya bahwa kita selalu dapat menempatkan operator identitas 1 antara $\langle\varphi|$ dan $|\Psi\rangle$ dalam pernyataan perkalian skalar:

$$\langle\varphi|\Psi\rangle = \langle\varphi|1|\Psi\rangle = \sum \langle\varphi|U_i\rangle\langle U_i|\Psi\rangle = \sum b_i^* C_i$$

Komponen – komponen dari $\langle\varphi|$ yaitu $\langle\varphi|U_i\rangle$ disusun secara horizontal membentuk matriks baris (mempunyai satu baris dan kolom yang tak berhingga)

$$\left(\langle\varphi|U_1\rangle\langle\varphi|U_2\rangle\langle\varphi|U_3\rangle........\langle\varphi|U_i\rangle\right)$$

Anda sekarang dapat membuktikan sendiri bahwa $\langle\varphi|\Psi\rangle$ menyatakan perkalian matriks yaitu matriks baris yang dinyatakan oleh $\langle\varphi|$ dan matriks kolom yang dinyatakan oleh $|\Psi\rangle$. Hasilnya adalah matriks satu baris satu kolom yaitu berupa suatu bilangan.

DIAGONALISASI SUATU OPERATOR

Misalkan basis orthogonal $\Re$ terdiri dari nilai eigen –nilai eigen dari operator hermitian $\hat{G}$:

$$\hat{G}|U_i\rangle = g|U_i\rangle$$

Elemen matrik dari operator $\hat{G}$ adalah:

$$\langle U_j|\hat{G}|U_i\rangle = \langle \mathrm{U_j}|\mathrm{g}|U_i\rangle$$
$$\mathrm{G_{ji}} = g\langle U_j|U_i\rangle$$
$$\mathrm{G_{ji}} = g\delta_{ji}$$

Bila kita jabarkan kedalam elemen matriknya maka

$$\begin{pmatrix} g_1 00........ \\ 0g_2 0........ \\ 00g_3 .... \\ .... \end{pmatrix}$$

jadi jabaran matriks dari suatu operator dalam basis berupa fungsi eigen dari operator itu adalah berbentuk matriks diagonal. Sebagaimana telah Anda pelajari sebelumnya bahwa suatu ket dijabarkan menjadi matriks kolom . Demikian juga representasu fungsi-fungsi eigen $|U_i\rangle$ adalah berupa sederetan koefisien $\{a_q^i\}$ yang disusun secara vertikal atau berupa matriks kolom dalam jabaran

$$|U_i\rangle = \sum a_j^i|U_j\rangle$$

Bila kita kalikan dari sebelah kiri dengan $\langle U_q|$ maka:

$$\langle U_q|U_i\rangle = \sum_{\mathrm{j}} \mathrm{a_j^i}\langle \mathrm{U_q}|\mathrm{U_j}\rangle$$
$$\delta_{\mathrm{qi}} = \sum_j a_j^i \delta_{qj}$$
$$\text{untuk } \mathrm{j} = q \;\; maka \;\; \delta_{\mathrm{qq}} = 1$$
$$\delta_{qi} = a_q^i$$

Jadi repersentasi matriks dari vektor eigen ** adalah vektor kolom (matriks kolom) dengan hanya satu elemennyayang tidak nol yaitu di baris ke *i*.

$$\left|U_1\right\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ a_3^{(1)} \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

$$\left|U_2\right\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \\ a_3^{(2)} \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

$$\left|U_3\right\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} a_1^{(3)} \\ a_2^{(3)} \\ a_3^{(3)} \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

$$\left|U_4\right\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} a_1^{(4)} \\ a_2^{(4)} \\ a_3^{(4)} \\ a_4^{(4)} \\ a_5^{(4)} \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

Representasi matrik untuk persamaan nilai eigen dapat diungkapkan sebagai berikut :

$$\hat{G}\left|U_i\right\rangle = g_i\left|U_i\right\rangle$$

$$\left\langle U_j\right|\hat{G}\left|U_i\right\rangle = \left\langle U_j \middle| U_i\right\rangle$$

Kita gunakan relasi klosure dam ditempatkan di samping operator Ĝ :

$$\langle U_j|\hat{G}1|U_i\rangle = \langle U_j|U_i\rangle$$
$$\sum_K \langle U_j|\hat{G}1|U_K\rangle\langle U_K|U_i\rangle = g_i\langle U_j|U_i\rangle$$
$$\sum_K G_{jk}a_k{}^{(i)} = g_i\ a_j{}^{(i)}$$

Untuk *i* = 3 bentuk matriks persamaan diatas adalah :

$$\begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & g_2 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & g_3 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & & & \\ . & . & . & . & & & \\ . & . & . & . & & & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \end{pmatrix} = g_1\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \end{pmatrix}$$

Anda masih ingat bagaimana menentukan besar atau panjamng suatu vektor dalam ruang kartesian ?. demikian pula dalam ruang Hilbert kita dapat menentukan panjang suatu vektor ψ dalam ruang Hilbert menurut notasi Dirac diungkapkan oleh :

$$|\psi|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = \sum_i \langle\psi|V_i\rangle\langle U_i|\psi\rangle$$
$$= \sum_i a_i{}^* a_i$$
$$= \sum_i |a_i|^2$$

Contoh :

Buktikan bahwa panjang vektor basis orthonormal $|V_i\rangle$ adalah Satu

Jawab :

$$|V_i|^2 = \langle U_i|U_i\rangle = \sum_i a_j{}^{*(i)} a_j{}^{(i)}\langle U_j|U_j\rangle$$
$$\delta_{ii} = \sum_j |a_j{}^{(i)}|^2\,\delta_{ii}$$
$$1 = \sum_j |a_j{}^{(i)}|^2$$

Misalkan untuk *i* = 4 representasi matriksnya adalah :

$$|U_4| = \langle U_4 | U_4 \rangle = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \ . \ . \ .) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \end{pmatrix} = 1$$

Berdasarkan apa yag telah kita bahas sebelumnya, maka disimpulkan bahwa oprator Ĝ adalah diagonal dalam basis{ $|U_i\rangle$ }.

$$G_{ij} = g_i \, \delta_{ji}$$

Atau equivalen dengan :

$$\langle U_j | \hat{G} | U_i \rangle = g_i \langle U_j | U_i \rangle$$

Kalikan kedua ruas dengan jumlah $\sum_j |U_j\rangle$, maka :

$$\sum_j |U_j\rangle\langle U_j | \hat{G} | U_i \rangle = g_i \sum_j |U_j\rangle\langle U_j | U_i \rangle$$

$$1\,\hat{G}|U_j\rangle = g_i J |U_j\rangle$$

$$1\left(\hat{G}|U_j\rangle - g_i J |U_j\rangle\right) = 0$$

$$\textit{atau} \quad \hat{G}|U_j\rangle = g_i |U_j\rangle$$

Dengan demikian kita peroleh jika operator Ĝ diagonal dalam basis B maka basis B adalah terdiri dari vektor eigen – vektor eigen dari Ĝ. Jadi permasalah menemukan nilai eigen dari suatu operator equivalen dengan menemukan basis yang mendiagonalkan operator.

1.3. SIFAT MATRIKS ELEMENTER.

Suatu operator Â dapat dijabarkan dalam basis { $|U_i\rangle$ } yang diasosiasikan oleh sederatan bilagan yang didefinisikan oleh :

$$A_{ij} = \langle U_j | \hat{A} | U_i \rangle$$

Bilangan tersebut bergantung pada dua indeks an dapat disusun dalam matriks persegi. Menurut perjanjian indeks pertama mununjukkan baris dan indeks kedua menyatakan kolom. Jadi dalam basis { $|U_i\rangle$ } operator Â dapat dijabarkan oleh matriks :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & . & . & . & A_{1j} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & . & . & . & A_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} & . & . & . & A_{ij} \end{pmatrix}$$

Bagaimana perkalian dua operator, misalnya $\hat{A}\hat{B}$ dijabarakan kedalam matriks dalam basis { $|U_i\rangle$ } ? untuk itu kita gunakan definisi diatas, yaitu :

$$\langle U_j | \hat{A}\hat{B} | U_i \rangle = (AB)_{ij}$$

Atau bisa juga dijabarkan sebagai berikut :

$$\langle U_j | \hat{A}\hat{B} | U_i \rangle = \langle U_j | \hat{A} \; 1 \; \hat{B} | U_i \rangle$$

$$= \sum_K \langle U_i | A | U_K \rangle \langle U_K | A | U_j \rangle$$

$$= \sum_K A_{iK} B_{Kj}$$

Penjabaran matriks dari $|\psi'\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$

Bagaimana caranya apabila kita ingin merepresentasikan hasil operasi suatu opertor pada suatu ket dalam basis { $|U_i\rangle$ } ?

$$|\psi'\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$$

Untuk itu kita kalikan skalar dari sebelah kiri dengan basis $|U_i\rangle$, maka :

$$\langle U_i | \psi' \rangle = \langle U_i | A | \psi \rangle$$

Kemudian gunakan relasi closure atau operator identitas dan tempatkan disamping A

$$\langle U_i | \psi' \rangle = \langle U_i | A \; 1 | \psi \rangle = \sum_j \langle U_i | A | U_j \rangle \langle U_j | \psi \rangle$$

Jadi pernyataan matrik untuk $|\psi'\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$ adalah bahwa matrik kolom $|\psi'\rangle$ sama dengan perkalian dengan matriks kolom yang dinyatakan oleh $|\psi\rangle$ dan matriks persegi yang dinyatakan oleh A, yaitu :

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ . \\ . \\ . \\ a_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & . & . & . & A_{1j} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & . & . & . & A_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} & . & . & . & A_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_i \end{pmatrix}$$

Penjabaran matriks untuk $\langle \varphi | A | \psi \rangle$

Pada pembahasan sebelumnya sudah kita sebutkan bahwa pernyataan $\langle \varphi | \hat{A} | \psi \rangle$ adalah berupa bilangan. Sekarang akan kita lihat bagaimana cara menjabarkannya. Dalam basis $\{ |U_i\rangle \}$ dapat dituliskan :

$$\begin{aligned}\langle \varphi | \hat{A} | \psi \rangle &= \langle \varphi | 1\, \hat{A}\, 1 | \psi \rangle \\ &= \sum_i \sum_j \langle \varphi | u_i \rangle \langle u_i | A | u_j \rangle \langle u_j | \psi \rangle \\ &= \sum_i \sum_j a_i * A_{ij} a_j\end{aligned}$$

Secara matriks dapat dituli8skan sebagai berikut :

$$\langle \varphi | \hat{A} | \psi \rangle = a_1 * a_2 * .. a_i * \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & . & . & . & A_{1j} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & . & . & . & A_{2j} \\ . \\ . \\ . \\ A_{i1} & A_{i2} & A_{i3} & . & . & . & A_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_j \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}&= a_1 * \left(A_{11} a_1 + A_{12} a_2 + \ . \ . \ . \ + A_{1j} a_j \right) \\ &\quad + a_2 * \left(A_{21} a_1 + A_{22} a_2 + \ . \ . \ . \ + A_{2j} a_j \right) \\ &\quad + a_j * \left(A_{i1} a_1 + A_{i2} a_2 + \ . \ . \ . \ + A_{ij} a_j \right)\end{aligned}$$

$\langle \varphi | \hat{A} | \psi \rangle$ = sebuah bilangan

- **Perkalian skalar dua fungsi gelombang**

Dalam basis $\{ |U_i\rangle \}$ perkalian skalar dua fungsi gelombang ψ dan ψ’ dapat direpresentasikan secara matriks sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\langle \psi | \psi' \rangle &= \langle \psi | 1 | \psi' \rangle \\ &= \sum_i \langle \psi | u_i \rangle \langle u_i | \psi' \rangle \\ &= \sum_i a_i^* a_i' \\ &= \left(a_1^* a_2^* \ldots a_i^* \right) \begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ . \\ . \\ . \\ a_i' \end{pmatrix} \\ &= \textit{sebuah bilangan}\end{aligned}$$

- **Invers dari operator**

  Invers dari operator Â datuliskan $Â^{-1}$ dan mempunyai sifat $Â^{-1}Â$ = $ÂÂ^{-1}$ = 1

  Contoh :

  Bila $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{pmatrix}$

  Maka $\hat{A} = \dfrac{1}{bc - a_1 a_2}\begin{pmatrix} -a_1 & b \\ c & -a_2 \end{pmatrix}$

  Bukti

$$\hat{A}^{-1}\hat{A} = \frac{1}{bc - a_1 a_2}\begin{pmatrix} -a_2 & b \\ c & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b \\ c & a_2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{bc - a_1 a_2}\begin{pmatrix} -a_2 a_1 + bc & -a_2 b + ba_2 \\ ca_1 - a_1 c & cb - a_2 a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1$$

- **Transpose dari operator Â**

  Transpose dari Â dituliskan $Â^T$. Elemen – elemen matriks dari $Â^T$ diperoleh dengan mencerminkan A_{ij} pada diagonal mayor dari matriks Â.

$$(Â^T)_{ij} = A_{ji}$$

Atau dengan cara mengubah baris menjadi kolom dan kolom menjadi baris.
Contoh :
Tentukanlah transpose dari operator matriks berikut :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \\ \mathrm{d} & \mathrm{e} & \mathrm{f} \\ \mathrm{g} & \mathrm{h} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

$$\hat{A}^T = \begin{pmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{d} & \mathrm{g} \\ \mathrm{b} & \mathrm{e} & \mathrm{h} \\ \mathrm{c} & \mathrm{f} & \mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Pada matriks tersebut a c i membentuk mayor doagonal. b c f dicerminkan terhadap mayor doagonal ini sehingga menempati tempat d g h dan d g h menempati tempat b c f.

- **Simetriks dan anti simetriks**

  Jika Â simetrik maka berkalu $\hat{A} = \hat{A}^T$

  Contoh :

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

  Transposenya adalah :

$$\hat{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

  Jadi $\hat{A} = \hat{A}^T$ dikatakan antisimetriks jika $\hat{A}^T = \hat{A}$

- **Trace dari operator Â**

  Trace dari operator Â adalah jumlah seluruh elemen – elemen diagonalnya, dituliskan :

$$Tr\ \hat{A} = \sum_i A_{ii}$$

  Contoh :

  Bila $\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & -6 \\ 5 & -6 & 3 \end{pmatrix}$ tentukanlah Trace dari Â

  Jawab :

  Tr Â = 1 + 4 + 3 = 8

- **Hermitian adjoint dari Â**

  Hermitian adjoint dari Â dapat ditulis $\hat{A}^+$. $\hat{A}^+$ dibangun dengan cara pertama membentuk kompleks konungate dari A dan kemudian mentransposenya atau :

  $\hat{A}^+ = \hat{A}^{*T}$

  Contoh :

  Bila $\hat{A} = \begin{pmatrix} -2i & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 3i \\ 2 & -i & 8 \end{pmatrix}$

  Tentukanlah hermitian adjoint dari Â

  Jawab :

$$\hat{A}^+ = \hat{A}^{*T}$$

$$= \begin{pmatrix} -2i & 4 & 6 \\ 7 & 5 & 3i \\ 2 & -i & 8 \end{pmatrix}^{*T} = \begin{pmatrix} 2i & 4 & 6 \\ 7 & 5 & -3i \\ 2 & i & 8 \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} 2i & 7 & 2 \\ 4 & 5 & i \\ 6 & -3i & 8 \end{pmatrix}$$

  Jadi dengan demikian elemen – elemen matriks dari $\hat{A}^+$ diberikan oleh :

$$(\hat{A}^+)_{ij} = (A_{ij})^*$$

Atau secara lebih eksplisit :

$$\left\langle U_i \middle| \hat{A}^+ U_j \right\rangle = \left\langle U_j \middle| \hat{A} U_i \right\rangle^* = \left\langle \hat{A} U_i \middle| U_j \right\rangle$$

- **Hermitian**

  Jika $\hat{A}^+ = \hat{A}$ maka dikatakan bahwa $\hat{A}$ adalah hermitian atau setara dengan itu. $(\hat{A}^+)_{ij} = \hat{A}_{ij}$ dengan menggunakan persamaan sebelumnya
  $(\hat{A}_{ij})^* = \hat{A}_{ij}$
  atau $\hat{A}^{*T} = \hat{A}$

- **Uniter**

  Jika hermitian adjoint $\hat{U}^+$ dari operator $\hat{U}$ dama dengan $\hat{U}^{-1}$ yaitu invers dari $\hat{U}$ atau $\hat{U}^+ = \hat{U}^{-1}$ maka dikatakan bahwa $\hat{U}$ adalah uniter. Elemen – elemen matriks dari $\hat{U}$ memenuhi relasi :

$$(\hat{U}^+)_{ij} = (\hat{U}^{-1})_{ij}$$
$$(\hat{U}_{ji})^* = (\hat{U}^{-1})_{ij}$$
$$\hat{U}^{*T} = \hat{U}^{-1}$$

Untuk operator uniter berlaku :

$$\hat{U}\,\hat{U}^+ = 1$$
$$(\hat{U}\,\hat{U}^+)_{ij} = \delta_{ij}$$
$$\sum_K U_{ik}(U_{jk})_* = \delta_{ij}$$

Contoh :

Tunjukkanlah bahwa jika $\hat{U}$ uniter maka nilai eigen a_n dari $\hat{U}$ adalah 1

Jawab :

$$U\varphi_n = a_n\varphi_n$$
$$\left\langle \hat{U}\varphi_n \middle| \hat{U}\varphi_n \right\rangle = \left\langle \varphi_n \middle| \hat{U}^+ U\varphi_n \right\rangle = \left\langle \varphi_n \middle| \hat{U}^{-1} U\varphi_n \right\rangle$$
$$= \left\langle \varphi_n \middle| 1\ \varphi_n \right\rangle = \left\langle \varphi_n \middle| \varphi_n \right\rangle$$

Maka

$a_n^*\, a_n = |\, a_n\, |^2 = 1$

Berdasarkan apa yang telah kita pelajari diatas, maka sifat – sifat matriks dapat diringkas sebagai berikut :

MATRIKS	DEFINISI	ELEMEN MATRIKS
Simetriks	$\hat{A} = \hat{A}^T$	$A_{ij} = A_{ji}$
Anti simetriks	$\hat{A} = -\hat{A}^T$	$A_{ii} = 0$; $A_{ij} = -A_{ji}$
Orthogonal	$\hat{A} = \hat{A}^{-1T}$	$(A^T A)_{ij} = \delta_{ij}$
Real	$\hat{A} = \hat{A}^*$	$A_{ij} = A^*_{ij}$
Imajiner murni	$\hat{A} = -\hat{A}^*$	$A_{ij} = i\,B_{ij}$; B_{ij} real
Hermitian	$\hat{A} = \hat{A}^+$	$A_{ij} = A^*_{ji}$
Anti hermitian	$\hat{A} = -\hat{A}^+$	$A_{ij} = -A^*_{ji}$
Uniter	$\hat{A} = (\hat{A}^+)^{-1}$	$(A^+ A)_{ij} = \delta_{ij}$
Singular	Det A = 0	

LATIHAN

1. misalkan $\{|U_i\rangle\}$ adalah basis orthonrmal lengkap dari ruang Hilbert B. tunjukkanlah bahwa operai identitas 1 mempunyai representasi :

$$I = \sum_i |U_i\rangle\langle U_i|$$

2. tentukanlah fungsi gelombang $\psi(K)$ daral representasi momentum untuk partikel bermassa m dalam medan gaya homogen $F = (F_o, 0, 0)$
3. a). tunjukkanlah bahwa $\hat{A}$ dan $\hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}$ mempunyai nilai eigen yang sama. Haruskah $\hat{U}$ bersifat uniter pada soal tersebut hingga benar ?

   b). jika vektor eigen dari $\hat{A}$ adalah φ_n, bagaimana vektor eigen untuk $\hat{U}^{-1}\hat{A}\hat{U}$?
4. jika $\hat{U}$ adalah uniter dan $\hat{A}$ Hermitian, tunjukkanlah bahwa $\hat{U}\hat{A}\hat{U}^{-1}$ adalah juga Hermitian !
5. tinjau dekomposisi sembarang operator uniter U berikut :

   $$\hat{U} = \frac{\hat{U} + \hat{U}^+}{2} + i\frac{\hat{U} - \hat{U}^+}{2i} = \hat{A} + i\hat{B}$$

   a). Tunjukkanlah bahwa $\hat{A}$ dan $\hat{B}$ adalah Hermitian

   b). Tunjukkanlah bahwa $[\hat{A}, \hat{B}] = [\hat{A}, \hat{U}] = [B,U] = 0$
6. suatu operator * direpresentasikan secara matriks sebagai berikut

   $$\hat{B} = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{2} \\ -i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

   a). Tunjukkanlah bahwa $\hat{B}$ hermitian

   b). Tentukanlah invers dari $\hat{B}$

   c). Tentukanlah Tr $\hat{B}$
7. tentukanlah representasi matriks dari operator $(\hat{A}\hat{B})^+$ dalam basis $\{|U_i\rangle\}$
8. suatu operator dinyatakan sebagai berikut $\hat{U} = \dfrac{1 + i\hat{H}}{1 - i\hat{H}}$ bila $\hat{H}$ bersifat Hermitian buktikanlah bahwa $\hat{U}$ adalah uniter