Berdasarkan apa yang sudah kita pelajari dalam modul 4 kegiatan belajar 1, maka dapat kita simpulkan sebagai berikut : ruang Hilbert adalah ruang vektor linier dengan dimensi tak hingga yang memiliki produk skalar dan bersifat lengkap. Elemen - elemen dari ruang Hilbert ialah vektor ket dan vektor bra. Hubungan antara vektor ket dan vektor bra adalah antilinier. Analogi ruang Hilbert dengan ruang fungsi gelombang adalah sebagai berikut $\psi \in$ ruang gelombang $\leftrightarrow |\psi\rangle \in \aleph$. Suatu set $\{|U_i\rangle\}$dikatakan basis dalam ruang $\aleph$ bila setiap $|\psi\rangle \in \aleph$ dapat dijabarkan kedalam basis tersebut $|\psi\rangle = \sum_i C_i |U_i\rangle$. Dua hubungan antar basis dalam ruang $\aleph$ adalah orthonormal dan relasi closure. Suatu vektor dijabarkan ke dalam komponen. Suatu vektor dijabarkan kedalam komponen – komponen vektornya, sedangkan suatu operator dijabarkan oleh elemen- elemen matriksnya. Representasi matriks suatu vektor ket ialah berupa matriks kolom, sedangkan vektor bra berupa matriks baris. Berdasarkan haltersebuat maka perkalian sklar dua vektor ket adalah berupa bilangan. Elemen – elemen matriks suatu operator dalam basis $\{|U_i\rangle\}$ didefinisikan sebagai berikut $\langle U_i |\hat{A}| U_j\rangle = A_{ij}$. Matriks – matriks dari sebuah operator mempunyai sifat – sifat diantaranya simetris, antisimetris, orthogonal dan lain- lain. Representasi keadaan suatu sistem dalam ruang Hilbert menurut notasi dirac ini umum digunakan dalam menjabarkan permasalahan- permasalahan mekanika kuantum.

I. Pilihlah satu jawaban yang benar untuk soal – soal dari no. 1 – no. 4.

1. Hermitian adjoint dari pernyataan berikut $\lambda\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle\langle V|W\rangle$ (dengan A adalah operator dan λ bilangana kompleks) ialah
   A. $\lambda\langle\psi|\hat{A}^{+}|\varphi\rangle\langle V|W\rangle$
   B. $\lambda^{*}\langle V|W\rangle\langle\varphi|\hat{A}|\psi\rangle$
   C. $\lambda^{*}\langle W|V\rangle\langle\varphi|\hat{A}^{+}|\psi\rangle$
   D. $\lambda\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle\langle W|V\rangle$

2. Manakah diantara matriks – matriks dibawah ini yang hermitian
   A. $\begin{pmatrix} 2i & -4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -2 & i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} \\ i\sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 2i & 3 \\ 4 & -2i \end{pmatrix}$

3. Manakah diantara operator- operator matriks dibawah ini yang bersifat uniter
   A. $\hat{T} = e^{i\hat{A}}$, bila $\hat{A}$ hermitian
   B. $\hat{D} = \dfrac{1+i\hat{A}}{1-i\hat{A}}$, bila $\hat{A}$ tak hermitian
   C. $\hat{D} = \dfrac{i-i\hat{A}}{1+i\hat{A}}$, bila $\hat{A}$ hermitian
   D. $\hat{T} = e^{-i\hat{A}}$, bila $\hat{A}$ tak hermitian
4. Tarce dari operator $\hat{A}$ berikut, dengan $\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ialah
   A. $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$
   B. $a_{21} + a_{31} + a_{32}$
   C. $a_{12} + a_{13} + a_{23}$
   D. $a_{11} + a_{22} + a_{33}$

II. ESSAI

1. Fungsi eigen dari operator hermitian $\hat{H}$ ialah $|\psi_n\rangle$. Kita asumsiskan bahwa keadaan $|\psi_n\rangle$ membentuk basis orthonormal diskrit. Suatu operator $\hat{U}$ didefinisikan sebagai berikut

   $\hat{U}(m,n) = |\psi_m\rangle\langle\psi_n|$

   a) Hitunglah $\hat{U}(m,n)$
   b) Hitunglah komutator dari $\left[\hat{H}, \hat{U}(m,n)\right]$
   c) Buktikanlah $\hat{U}(m,n)\hat{U}^{+}(p,q) = \delta_{nq}\hat{U}(m,p)$

d) Misalkan $\hat{A}$ adalah operator dengan elemen – elemen matriks $A_{mn} = \langle \psi_m | \hat{A} | \psi_n \rangle$ buktikan lah bahwa $A = \sum_m \sum_n A_{mn} \hat{U}(m,n)$

2. Representasi matriks untuk persamaan nilai eigen dapat diungkapkan sebagai berikut $\hat{H}|U_i\rangle = h_i|U_i\rangle$. Tentukanlah persamaan keadaan tersebut dalam bentuk matriks untuk $i = 4$.

<u>Kunci jawaban Tes Formatif KB 1</u>

I. Pilihan ganda

1. C

   penjelasan

   $\left(\lambda\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle\langle V|W\rangle\right)^+ = \langle V|W\rangle^+ \langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle^+ \lambda^+$

   $\left(\lambda\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle\langle V|W\rangle\right)^+ = \langle W|V\rangle\langle\varphi|\hat{A}^+|\psi\rangle\lambda^*$

   $\left(\lambda\langle\psi|\hat{A}|\varphi\rangle\langle V|W\rangle\right)^+ = \lambda^*\langle W|V\rangle\langle\varphi|\hat{A}^+|\psi\rangle$

2. B

   Penjelasan

   Harus dibuktikan bahwa $\hat{A}^+ = \hat{A}^{T*} = \hat{A}$

   $$\begin{pmatrix} -2 & i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix}^+ = \begin{pmatrix} -2 & i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix}^{T*} = \begin{pmatrix} -2 & -i\sqrt{3} \\ i\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} -2 & i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} & 6 \end{pmatrix}$$

3. A

   Penjelasan

   Harus dibuktikan bahwa $\hat{T}\hat{T}^+ = 1$ atau $\hat{D}\hat{D}^+ = 1$, untuk $\hat{T} = e^{i\hat{A}}$ dengan $\hat{A}$ hermitian.

   $\hat{T}^+ = \left(e^{i\hat{A}}\right)^+ = e^{-i\hat{A}^+}$ karena $\hat{A}$ hermit maka $\hat{A}^+ = \hat{A}$, sehingga

   $\hat{T}^+ = e^{-i\hat{A}^+} = e^{-i\hat{A}}$, maka

   $\hat{T}\hat{T}^+ = e^{i\hat{A}}e^{-i\hat{A}} = 1$

   bila anda memilih $\hat{T} = e^{-i\hat{A}}$ dengan $\hat{A}$ tak hermitian. $\hat{T}^+ = \left(e^{-i\hat{A}}\right)^+ = e^{i\hat{A}^+}$, karena $\hat{A}$ tak hermit maka $\hat{A}^+ \neq \hat{A}$, maka $\hat{T}\hat{T}^+ = e^{-i\hat{A}}e^{i\hat{A}+} = e^{i\hat{A}^+ - i\hat{A}} \neq 1$

4. D

Penjelasan

Lihat definisi trace suatu operator

$$Tr\hat{A} = \sum_i a_i$$

yaitu trace dari suatu operator sama dengan jumlah dari elemen – elemen diagonalnya.

II. ESSAI

1. d

a) $\hat{U}^+(m,n) = \left(|\psi_m\rangle\langle\psi_n|\right)^+ = |\psi_n\rangle\langle\psi_m|$

b) $\left[\hat{H},\hat{U}(m,n)\right] = \hat{H}\hat{U}(m,n) - \hat{U}(m,n)\hat{H}$

$\left[\hat{H},\hat{U}(m,n)\right] = \hat{H}|\psi_m\rangle\langle\psi_n| - |\psi_m\rangle\langle\psi_n|\hat{H}$ dari persamaan nilai eigen

$$\hat{H}|\varphi_m\rangle = E_m|\varphi_m\rangle$$
$$\langle\varphi_n|\hat{H} = \langle\varphi_n|E_n$$

maka persamaan diatas menjadi

$$\left[\hat{H},\hat{U}(m,n)\right] = E_m|\psi_m\rangle\langle\psi_n| - |\psi_m\rangle\langle\psi_n|E_n$$
$$\left[\hat{H},\hat{U}(m,n)\right] = (E_m - E_n)|\psi_m\rangle\langle\psi_n|$$
$$\left[\hat{H},\hat{U}(m,n)\right] = (E_m - E_n)\hat{U}(m,n)$$

c) $\hat{U}(m,n)\hat{U}^+(p,q) = |\psi_m\rangle\langle\psi_n|\left(|\psi_p\rangle\langle\psi_q|\right)^+$

$\hat{U}(m,n)\hat{U}^+(p,q) = |\psi_m\rangle\langle\psi_n|\psi_q\rangle\langle\psi_p|$ diketahui bahwa keadaan $|\psi_n\rangle$ membentuk basis orthonormal diskrit, maka

$$\langle\psi_n|\psi_q\rangle = \delta_{nq}$$

jadi terbukti bahwa

$$\hat{U}(m,n)\hat{U}^+(p,q) = \delta_{nq}|\psi_m\rangle\langle\psi_p| = \delta_{nq}\hat{U}(m,p)$$

d) bukti

$$\hat{A} = \sum_m \sum_n A_{mn} \hat{U}(m,n)$$

$$\hat{A} = \sum_m \sum_n \langle \psi_m | \hat{A} | \psi_n \rangle | \psi_m \rangle \langle \psi_n |$$

$$\hat{A} = \sum_m \sum_n | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \hat{A} | \psi_n \rangle \langle \psi_n |$$

$$\hat{A} = \sum_m | \psi_m \rangle \langle \psi_m | \hat{A} \sum_n | \psi_n \rangle \langle \psi_n |$$

$$\hat{A} = 1 \cdot \hat{A} \cdot 1$$

$$\hat{A} = \hat{A}$$

2. $\hat{H} | U_i \rangle = h_i | U_i \rangle$

produk skalarkan kedua ruas dengan basis $| U_j \rangle$ dari kiri

$\langle U_j | \hat{H} | U_i \rangle = h_i \langle U_j | U_i \rangle$ gunakan relasi closure

$$\langle U_j | \hat{H} \cdot 1 | U_i \rangle = h_i \langle U_j | U_i \rangle$$

$$\sum_k \langle U_j | \hat{H} | U_k \rangle \langle U_k | U_i \rangle = h_i \langle U_j | U_i \rangle$$

$$\sum_k \hat{H}_{jk} a_k^{(i)} = h_i a_j^{(i)}$$

untuk $i = 4$ maka

$$\begin{pmatrix} h_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & h_{22} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & h_{33} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & h_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} = h_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

TRANSFORMASI UNITER

2.1. Transformasi Uniter

Transformasi Uniter ialah transformasi yang menghubungkan dari satu basis ke basis lainya dalam ruang Hilbert

basis lama $\{|U_i\rangle\}$ —› basis baru $\{|t_n\rangle\}$.

Perubahan basis didefinisikan oleh komponen spesifiknya $\langle U_i|t_n\rangle$

$$S_{in} = \langle U_i|t_n\rangle \quad \longrightarrow \quad (S^+)_{ni} = (S_{in})^* = \langle t_n|U_i\rangle$$

matriks transformasi S ini bersifat uniter $S^+S = SS^+ = 1$

buktikanlah bahwa S bersifat uniter.

✓ Transformasi Komponen – Komponen Vektor Keadaan (ket)

sekarang mari kita pelajari bagaimana komponen – komponen dari sembarang vektor keadaan dalam basis lama di transformasi ke komponen dalam basis baru dan sebaliknya. Misalkan vektor keadaan ψ semula dalam basis lama $\{|U_i\rangle\}$ ingin ditransformasi ke basis baru $\{|t_n\rangle\}$ maka dilakukan sebagai berikut :

$$\langle t_n|\psi\rangle = \langle t_n|1|\psi\rangle$$
$$\langle t_n|\psi\rangle = \sum_i \langle t_n|U_i\rangle\langle U_i|\psi\rangle$$
$$\langle t_n|\psi\rangle = \sum_i S^+_{ni}\langle U_i|\psi\rangle$$

pada persamaan tersebut $\langle U_i|\psi\rangle$ adalah komponen ψ dalam basis lama, S^+_{ni} adalah matriks transformasi yang akan mentransformasikan komponen ψ dalam basis lama ke komponen ψ dalam basis baru $\langle t_n|\psi\rangle$.

Kebalikanya dapat dijelaskan dengan cara yang sama

$$\langle U_i|\psi\rangle = \langle U_i|1|\psi\rangle$$
$$\langle U_i|\psi\rangle = \sum_i \langle U_i|t_n\rangle\langle t_n|\psi\rangle$$
$$\langle U_i|\psi\rangle = \sum_i S_{in}\langle t_n|\psi\rangle$$

komponen ψ dalam basis baru $\langle t_n | \psi \rangle$ di transformasi oleh matriks transformasi S_{in} sehingga berubah menjadi komponen ψ dalam basis lama $\langle U_i | \psi \rangle$.

Jika $|\varphi\rangle$ dan $|\psi\rangle$ adalah dua vektor sembarang dalam ruang Hilbert maka dengan transformasi basis S, vektor – vektor tersebut ditransformasi menjadi $|\varphi'\rangle$ dan $|\psi'\rangle$ sebagai berikut

$$|\varphi'\rangle = S|\varphi\rangle$$
$$|\psi'\rangle = S|\psi\rangle$$

dengan transformasi seperti itu perkalian skalar kedua vektor tersebut tidak akan berubah

$$\langle \psi' | \varphi' \rangle = \langle \psi | S^{+} S | \varphi \rangle = \langle \psi | S^{-1} S | \varphi \rangle$$
$$\langle \psi' | \varphi' \rangle = \langle \psi | 1 | \varphi \rangle$$
$$\langle \psi' | \varphi' \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle$$

bila kita misalkan $|\psi\rangle = |\varphi\rangle$ maka akan diperoleh

$$\langle \varphi' | \varphi' \rangle = \langle \varphi | \varphi \rangle$$

jadi dengan demikian Transformasi Uniter tidak mengubah panjang vektor dan sudut antara kedua vektor tersebut.

- ✓ Transformasi Uniter Komponen – Komponen suatu bra

Misalkan kita ingin mentransformasi komponen suatu Bra yang semula dalam basis lama $\langle \psi | U_i \rangle$ menjadi komponen bra dalam basis baru $\langle \psi | t_n \rangle$. Untuk melakukan perubahan basis tersebut dilakukan Transformasi Uniter berikut :

$$\langle \psi | t_n \rangle = \langle \psi | 1 | t_n \rangle = \sum_i \langle \psi | U_i \rangle \langle U_i | t_n \rangle$$
$$\langle \psi | t_n \rangle = \sum_i \langle \psi | U_i \rangle S_{in}$$

dengan cara yang sama kebalikanya dapat dilakukan Transformasi Uniter sebagai berikut :

$$\langle \psi | U_i \rangle = \langle \psi | 1 | U_i \rangle = \sum_i \langle \psi | t_n \rangle \langle t_n | U_i \rangle$$
$$\langle \psi | U_i \rangle = \sum_i \langle \psi | t_n \rangle S^{+}_{ni}$$

- ✓ Transformasi Uniter Komponen - Komponen Matriks Suatu Operator

Pada uraian sebelumnya anda sudah mempelajari bagaimana menentukan elemen – elemen suatu operator. Sekarang kita pelajari bagaimana mentransformasi elemen matriks suatu operator dalam basisi lama $\langle U_i |\hat{A}| U_j \rangle$ menjadi elemen – elemen operator yang sama dalam basis baru $\langle t_n |\hat{A}| t_m \rangle$ atau sebaliknya. Untuk melakukan perubahan tersebut dilakukan Transformasi Uniter sebagai berikut :

$$\langle t_n |\hat{A}| t_m \rangle = \langle t_n |1 \cdot \hat{A} \cdot 1| t_m \rangle$$

$$\langle t_n |\hat{A}| t_m \rangle = \sum_i \sum_j \langle t_n | U_i \rangle \langle U_i |\hat{A}| U_j \rangle \langle U_j | t_m \rangle$$

$$A_{nm} = \sum_i \sum_j S_{ni}^{+} A_{ij} S_{jm} = \left(S^{+} AS \right)_{nm}$$

karena S bersifat uniter maka bisa juga ditulis

$$A_{nm} = \sum_i \sum_j S_{ni}^{-1} A_{ij} S_{jm}$$

$$A_{nm} = \left(S^{-1} AS \right)_{nm}$$

sebaliknya elemen - elemen matriksdalam basis lama ingin dinyatakan atau dijabarkan dalam elemen – elemen basis baru, maka dilakukan Transformasi Uniter berikut :

$$\langle U_i |\hat{A}| U_j \rangle = \langle U_i |1 \cdot \hat{A} \cdot 1| U_j \rangle$$

$$\langle U_i |\hat{A}| U_j \rangle = \sum_n \sum_m \langle U_i | t_n \rangle \langle t_n |\hat{A}| t_m \rangle \langle t_m | U_j \rangle$$

$$A_{ij} = \sum_n \sum_m S_{in} A_{nm} S_{mj}^{+} = \left(SAS^{+} \right)_{ij}$$

atau

$$A_{ij} = \sum_n \sum_m S_{in} A_{nm} S_{mj}^{-1}$$

$$A_{ij} = \left(SAS^{-1} \right)_{ij}$$

2.2. Representasi Energi

✓ Kotak satu dimensi

Dalam representasi energi, Hamiltonian adalah diagonal. Representasi ini mencakup basis berupa fungsi –fungsi eigen dari operator Hamiltonian. Dalam modul pengantar fisika kuantum atau dalam fisika modern, anda sudah mempelajari bagaimana menentukan fungsi eigen dan nilai eigen dari partikel yang terperangkap dalam kotak satu dimensi . Energi partikel diungkapkan oleh

$$E_n = \frac{h^2}{32m_0L^2} = E_1n^2$$

dengan fungsi eigen atau spektrum fungsi eigen

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Basis dimana Hamiltonianya diagonal ialah

$$\mathrm{B} = \sqrt{\frac{2}{L}}\left\{\sin\frac{\pi x}{L}, \sin\frac{2\pi x}{L}, \sin\frac{3\pi x}{L}, ...\right\}$$

dan representasi Hamiltonianya adalah

$$\hat{H} = E_1\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 4 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 9 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & .... & ... \\ ... & ... & ... & ... & n^2 \end{pmatrix}$$

✓ Osilator harmonik sederhana

Anda sudah mempelajari bagaimana menentukan spektrum nilai eigen dan spektrum fungsi eigen pada permasalahan osilator harmonis sederhana satu dimensi dalam pengantar fisika kuantum. Spektrum fungsi eigenya diungkapkan oleh

$$\varphi_n(\beta) = A_n\Re_n(\beta)e^{-\frac{1}{2}\beta^2}$$

dengan A_n adalah konstanta normalisasi

dan $\Re_n(\beta)$ adalah polynomial hermite.

Untuk osilator harmonis ini basis yang mendiagonalkan Hamiltonian $\hat{H}$ adalah

$$\mathrm{B} = e^{-\frac{\beta^2}{2}}\{A_1\Re_1, A_2\Re_2, ...\}$$
$$\mathrm{B} = \{|1\rangle, |2\rangle, |3, ...\rangle\}$$

Spektrum energi dari osilator harmonis satu dimensi ini adalah

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(\frac{2n+1}{2}\right)\hbar\omega$$

reprexentasi matriks dari Hamiltonian ini adalah

$$\hat{H} = \hbar\omega \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0. & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{2n+1}{2} \end{pmatrix}$$

- ✓ Operator posisi dan Momentum

Sekarang marilah kita hitung representasi matriks dari operator posisi dan operator momentum untuk osilator harmonik dalam representasi energi. Hubungan antara observable atau besaran dinamis posisi dam momentum dengan operator – operatornya ialah

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

$$\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}p$$

sedangkan untuk Hamiltonian ialah

$$\hat{H} = \hbar\omega\hat{H}$$

didefinisikan operator kreasi dan anihilasi yang dinotasikan oleh a^+ dan a hubungan kedua operator tersebut dengan operator posisi dan momentum adalah sebagai berikut

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} + i\hat{p})$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x} - i\hat{p})$$

atau

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^+ + a)$$

$$\hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^+ - a)$$

Bila operator kreasi dan anihilasi itu dioperasikan pada sembarang vektor ket maka

$$a^{+}|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle$$
$$a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle$$

Dapat kita lihat bahwa operator kreasi akan menaikan sedangkan operator anihilasi menurunkan. Bila kedua operator itu di operasikan pada vektor bra maka

$$\langle\varphi_n|a^{+} = \sqrt{n}\langle\varphi_{n-1}|$$
$$\langle\varphi_n|a = \sqrt{n+1}\langle\varphi_{n+1}|$$

Sekarang tinjau suatu observable bekerja pada suatu vektor ket

$$x|\varphi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\hat{x}|\varphi_n\rangle$$
$$x|\varphi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^{+}+a\right)|\varphi_n\rangle$$
$$x|\varphi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{a^{+}|\varphi_n\rangle + a|\varphi_n\rangle\right\}$$
$$x|\varphi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle + \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle\right\}$$

Repersentasi matriks dari operator posisi tersebut ialah

$$\langle\varphi_k|x|\varphi_n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{n+1}\langle\varphi_k|\varphi_{n+1}\rangle + \sqrt{n}\langle\varphi_k|\varphi_{n-1}\rangle\right\}$$
$$x_{kn} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left\{\sqrt{n+1}\delta_{k,n+1} + \sqrt{n}\delta_{k,n-1}\right\}$$

Dengnan k dan n adalah integer positif

Representasi matriksnya ialah

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \ldots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \ldots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

sedangkan untuk operator momentum ialah

$$p|\varphi_n\rangle = \sqrt{m\hbar\omega}\,\hat{p}|\varphi_n\rangle$$
$$p|\varphi_n\rangle = \sqrt{m\hbar\omega}\frac{i}{\sqrt{2}}\left(a^+ - a\right)|\varphi_n\rangle$$
$$p|\varphi_n\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a^+|\varphi_n\rangle - a|\varphi_n\rangle\right)$$
$$p|\varphi_n\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left\{\sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle - \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle\right\}$$

representasi matriksnya ialah

$$\langle\varphi_k|p|\varphi_n\rangle = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left\{\sqrt{n+1}\langle\varphi_k|\varphi_{n+1}\rangle - \sqrt{n}\langle\varphi_k|\varphi_{n-1}\rangle\right\}$$
$$p_{kn} = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left\{\sqrt{n+1}\,\delta_{k,n+1} - \sqrt{n}\,\delta_{k,n-1}\right\}$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & \dots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

✓ Representasi matriks operator kreasi dan anihilasi

dari persamaan sebelumnya

$$a^+|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle$$

kalikan dengan $|\varphi_k\rangle$ dari sebelah kiri maka

$$\langle\varphi_k|a^+|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}\langle\varphi_k|\varphi_{n+1}\rangle$$
$$a^+_{kn} = \sqrt{n+1}\,\delta_{kn+1}$$

matriksnya ialah

$$a^{+} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \end{pmatrix}$$

dan untuk operator anihilasi

$$a\left|\varphi_n\right\rangle = \sqrt{n}\left|\varphi_{n-1}\right\rangle$$

$$\left\langle\varphi_k\left|a\right|\varphi_n\right\rangle = \sqrt{n}\left\langle\varphi_k\left|\varphi_{n-1}\right\rangle\right.$$

$$a_{kn}^{+} = \sqrt{n}\delta_{k,n-1}$$

matriksnya adalah

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & ... \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & ... \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & ... \\ ... & ... & ... & ... & \sqrt{n} \end{pmatrix}$$

kita dapat mempelajari lebih jauh bagaimana pengaruh operator kreasi dan anihilasi terhadap fungsi eigen. Sudah kita pelajari sebelumnya bahwa fungsi eigen – fungsi eigen $\{|n\rangle\}$ untuk Hamiltonian osilator harmonik adalaha vektor kolom dengan elemen yang tak nol hanya pada baris ke $(n+1)$ seperti berikut

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \end{pmatrix} \qquad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ ... \end{pmatrix}$$

keadaan eigen bergantung waktu dari operator $\hat{H}$ adalah

$$\psi_0(x,t) = e^{-i\omega_0 t/2}|0\rangle$$

$$\psi_0(x,t) = e^{-i\omega_0 t/2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ ... \end{pmatrix}$$

$$\psi_1(x,t) = e^{-3i\omega_0 t/2}\left|1\right\rangle$$

$$\psi_1(x,t) = e^{-3i\omega_0 t/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\psi_2(x,t) = e^{-5i\omega_0 t/2}\left|2\right\rangle$$

$$\psi_2(x,t) = e^{-5i\omega_0 t/2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Sekarang kita coba operasikan $\hat{a}$ dan $\hat{a}^{+}$ pada ket diatas misalkan pada $\left|2\right\rangle$ untuk operator anihilasi dapat diungkapkan sebagai berikut :

$$\hat{a}\left|2\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}\left|2\right\rangle = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Dapatkah anda melihat bagaimana peranan $\hat{a}$? ternyata operator menurunkan fungsi eigen yang asalnya $\left|2\right\rangle$ menjadi $\left|1\right\rangle$. operasi $\hat{a}^{+}$ pada ket $\left|2\right\rangle$ adalah

$$\hat{a}^{+}\left|2\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}\left|2\right\rangle = \sqrt{3}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

$$\hat{a}^{+}\left|2\right\rangle = \sqrt{3}\left|3\right\rangle$$

Ternyata operator kreasi $\hat{a}^{+}$ yang bekerja pada fungsi eigen $\left|2\right\rangle$, hasil operasinya mengakibatkan fungsi eigen menjadi bertambah atau naik yaitu jadi $\left|3\right\rangle$. Dari kedua contoh itu anda dapat menyimpulkan bagaimana pengaruh kerja operator $\hat{a}$ dan $\hat{a}^{+}$ pada suatu fungsi eigen.

LATIHAN

1. Tunjukanlah bahwa $\hat{S}$ dengan elemen – elemen matriks $S_{ni} = \left\langle t_n \middle| U_i \right\rangle$ adalah uniter. Dimana set basis $\left\{\left|t_n\right\rangle\right\}$ dan $\left\{\left|U_i\right\rangle\right\}$ adalah lengkap dan orthonormal.

2. Tunjukan bahwa perkalian skalar tidak berubah dibawah Transformasi Uniter.
3. Elemen – elemen matriks dalam basis $\left\{\left|U_i\right\rangle\right\}$ adalah $B_{ij} = \left\langle U_i \middle| \hat{B} \middle| U_j \right\rangle$ sedangkan basis $\left\{\left|t_n\right\rangle\right\}$ adalah $B^{'}_{nm} = \left\langle t_n \middle| \hat{B} \middle| t_m \right\rangle$. Tunjukan bahwa $B^{'}_{nm} = \left(\hat{S}\hat{B}\hat{S}^{-1}\right)_{nm} = \left\langle t_n \middle| \hat{B} \middle| t_m \right\rangle$
4. Tentukanlah matriks komutator $[x, p]$untuk osilator harmonik dalam representasi energi. Gunakan reperesentasi matriks untuk $\hat{x}$ dan $\hat{p}$ yang sudah kita peroleh sebelumnya.
5. komponen vektor $\left|\psi\right\rangle$dalam basis lama dinyatakan oleh $\left\langle U_i \middle| \psi \right\rangle$. Nyatakanlah komponen vektor tersebut dalam term basis baru $\left\{\left|t_n\right\rangle\right\}$.

Rambu – Rambu Jawaban Latihan

1. Anda harus menunjukan bahwa $\left(S^{-1}\right)_{ni} = \left(\hat{S}^{+}\right)_{ni} = \left(S_{in}\right)^{*}$ atau yang setara dengan hal itu adalah anda harus menunjukan bahwa

   $$I_{ji} = \delta_{ji}$$
   $$I_{ji} = \sum_{n} S_{jn}\left(S^{-1}\right)_{ni}$$
   $$I_{ji} = \sum_{n} S_{jn}\left(S_{in}\right)^{*}$$

   kemudian gunakan definisi matriks transformasi S

2. Misalkan $\psi' = \hat{S}\psi$ dan $\varphi' = \hat{S}\varphi$. Anda harus membuktikan bahwa

   $$\langle \psi' | \varphi' \rangle = \langle \psi | \varphi \rangle$$

3. Anda harus menempatkan operator identitas dalam basis $\left\{ |U_i\rangle \right\}$ pada operator B'_{nm} .

   $$B'_{nm} = \langle t_n | \hat{B} | t_m \rangle = \langle t_n | 1 \cdot \hat{B} \cdot 1 | t_m \rangle$$
   $$B'_{nm} = \sum_{i}\sum_{j} \langle t_n | U_i \rangle \langle U_i | \hat{B} | U_j \rangle \langle U_j | t_m \rangle$$

   gunakan definisi matriks transformasi s dan definisi elemen matriks suatuoperator . kemudian jumlahkan untuk seluruh i dan j

4. Anda harus menghitung

   $\langle \varphi_k | [x, p] | \varphi_n \rangle$ gunakan definisi komutator

   $$\langle \varphi_k | xp - px | \varphi_n \rangle = \langle \varphi_k | xp | \varphi_n \rangle - \langle \varphi_k | px | \varphi_n \rangle$$

   gantikan x dan p masing – masing dengan komutsinya kemudian kalikan

   $$xp = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\sqrt{m\hbar\omega}\,\hat{x}\hat{p} = \hbar^{2}\hat{x}\hat{p}$$
   $$px = \sqrt{m\hbar\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\hat{p}\hat{x} = \hbar^{2}\hat{p}\hat{x}$$

   kemudian ganti

   $$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^{+} + a\right)$$
   $$\hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(a^{+} - a\right)$$

   hitung $\hat{x}\hat{p}$ dan $\hat{p}\hat{x}$.

   Hasilnya subtitusikan pada $\langle \varphi_k | xp | \varphi_n \rangle$ dan $\langle \varphi_k | px | \varphi_n \rangle$ lau hitung.

5. Tuliskan $\langle U_i | \psi \rangle$ lalu masukan operator identitas dalam basis baru.

   $\langle U_i | \psi \rangle = \langle U_i | 1 | \psi \rangle = \sum_{n} \langle U_i | t_n \rangle \langle t_n | \psi \rangle$ dan seterusnya.

RANGKUMAN

Kita dapat mengubah suatu basis lama ke basis baru dengan menggunakan Transformasi Uniter . dengan Transformasi Uniter ini juga kita dapat menjabarkan komponen suatu ket ke dalam basis baru dan sebaliknya. Selain itu kita juga dapat mengubah elemen – elemen matriks dari suatu operator dalam suatu basis menjadi elemen –elemen matriks dari suatu operator yang sama tapi dinyatakan dalam basis lain dan sebaliknya.

Transformasi Uniter itu sendiri ialah transformasi yang menghubungkan dari suatu basis ke basis lainyadalam ruang Hilbert. Perubahan basis didefinisikan oleh komponen – komponen spesifiknya, yaitu melalui matriks perubah basis. Matriks perubah basis ini akan memproyeksikan dari suatubasis ke basis lain. Matriks perubah basis itu bersifat uniter. Dalam kegiatan belajar ini juga kita sudah mempelajari bagaimana menentukan elemen – elemen matriks suatu operator dalam representasi energi. Dalam representasi energi, Hamiltonian adalah diagonal. Representasi ini mencakup basis beruopa fungsi – fungsi eigen dari operator Hamiltonian. Beberapa contoh sederhana seperti kotak satu dimensi dan osilator harmonik telah kita tentukan basis – basis nya dan representasi matriks dari Hamiltonianya.

Soal-Soal Latihan

1. Set $\{|U_i\rangle\}$ adalah basis lama dalam ruang Hilbert dan set $\{|t_n\rangle\}$ adalah basis baru. Komponen suatu vektor semula dinyatakan dalam basis lama sebagai berikut $\langle U_i|\psi\rangle$. Bagaimanakah komponen vektor tersebut bila dinyatakan dalam basis baru?
2. Elemen – elemen suatu operator dinyatakan dalam basis baru ialah $\langle t_k|\hat{A}|t_l\rangle$. Transformasikanlah elemen operator tersebut sehingga menjadi elemen operator dalam basis lama.
3. Suatu operator kreasi a^+ bila diopersikan pada sembarang ket akan memenuhi relasi $a^+|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle$

   Tunjukanlah relasi tersebut bila $|\varphi_n\rangle = |3\rangle$.
4. Hitung representasi matriks operator $\hat{x}^2$ untuk osilator harmonik dalam representasi energi.
5. Hitunglah representasi matriks oprerator $\hat{p}^2$ untuk osilator harmonik dalam representasi energi.

KUNCI JAWABAN Soal-Soal Latihan

1. $\langle t_k|\psi\rangle = \langle t_k|1|\psi\rangle$

   $\langle t_k|\psi\rangle = \sum_i \langle t_k|U_i\rangle\langle U_i|\psi\rangle$

   $\langle t_k|\psi\rangle = \sum_i S_{ki}^+ \langle U_i|\psi\rangle$

   dengan $\langle U_i|\psi\rangle$ adalahkomponen vektor ψ dalam basis lama dan S_{ki}^+ adalah matriks yang mentransformasikan komponen ψ dalam basis lama ke komponen ψ dalam basis baru.
2. $\langle U_i|\hat{A}|U_j\rangle = \langle U_i|1\cdot\hat{A}\cdot 1|U_j\rangle$

$$\langle U_i|\hat{A}|U_j\rangle = \sum_k\sum_l \langle U_i|t_k\rangle\langle t_k|\hat{A}|t_l\rangle\langle t_l|U_j\rangle$$

$$A_{ij} = \sum_k\sum_l S_{ik}A_{kl}S^+_{lj}$$

$$A_{ij} = \left(SAS^+\right)_{ij}$$

3. $$a^+|3\rangle = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$a^+|3\rangle = \sqrt{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix}$$

jadi terbukti bahwa

$$a^+|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle$$

atau $a^+|3\rangle = \sqrt{4}|U_4\rangle$

4. Dalam representasi energi hubungan antara observable posisi dan operatornya ialah

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

$\hat{x}$: operator posisi

x : observable

hubungan antara operator posisi dengan operator kreasi dan anihilasi ialah

$$\hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^+ + a\right)$$

sedangkan bila operator kreasi dan anihilasi dioperasikan pada sembarang ket, maka

$$a^+|\varphi_n\rangle = \sqrt{n+1}|\varphi_{n+1}\rangle$$

$$a|\varphi_n\rangle = \sqrt{n}|\varphi_{n-1}\rangle$$

dari dua persamaan diatas

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(a^+ + a\right)$$

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^+ + a\right)\left(a^+ + a\right)$$

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(a^+a^+ + a^+a + aa^+ + aa\right)$$

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\left(a^+\right)^2 + a^+a + aa^+ + a^2\right)$$

$$\left\langle \varphi_k \left| x^2 \right| \varphi_n \right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\langle \varphi_k \left| \left(a^+\right)^2 + a^+a + aa^+ + a^2 \right| \varphi_n \right\rangle$$

$$\left\langle \varphi_k \left| x^2 \right| \varphi_n \right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\left\langle \varphi_k \left| \left(a^+\right)^2 \right| \varphi_n \right\rangle + \left\langle \varphi_k \left| a^+a \right| \varphi_n \right\rangle + \left\langle \varphi_k \left| aa^+ \right| \varphi_n \right\rangle + \left\langle \varphi_k \left| a^2 \right| \varphi_n \right\rangle\right\}.$$

$$\left\langle \varphi_k \left| x^2 \right| \varphi_n \right\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\left\{\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,\delta_{k,n+2} + \left(2n+1\right)\right\}\delta_{kn} + \sqrt{n}\sqrt{n-1}\,\delta_{k,n-2}$$

representasi matriksnya adalah

$$x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 5 & 0 & \sqrt{12} & \ldots \\ \sqrt{6} & 0 & 7 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 9 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

5. Dalam representasi energi hubungan antara observable momentum dan operatornya ialah

$$\hat{p} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}}\, p$$

hubungan antara operator $\hat{p}$ dengan operator kreasi dan anihilasi ialah

$$\hat{p} = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(a^+ - a\right)$$

maka dari dua persamaan tersebut

$$p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}\left(a^+ - a\right)$$

$$p^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left(a^+ - a\right)\left(a^+ - a\right)$$

$$p^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left(\left(a^+\right)^2 - a^+a - aa^+ + a^2\right)$$

$$\left\langle \varphi_k \left| p^2 \right| \varphi_n \right\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left\langle \varphi_k \left| \left(a^+\right)^2 - a^+a - aa^+ + a^2 \right| \varphi_n \right\rangle$$

$$\left\langle \varphi_k \left| p^2 \right| \varphi_n \right\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left\{ \left\langle \varphi_k \left| \left(a^+\right)^2 \right| \varphi_n \right\rangle - \left\langle \varphi_k \left| a^+a \right| \varphi_n \right\rangle - \left\langle \varphi_k \left| aa^+ \right| \varphi_n \right\rangle + \left\langle \varphi_k \left| a^2 \right| \varphi_n \right\rangle \right\}$$

$$\left\langle \varphi_k \left| p^2 \right| \varphi_n \right\rangle = -\frac{m\hbar\omega}{2}\left\{ \sqrt{n+1}\sqrt{n+2}\,\delta_{k,n+2} - (2n+1) \right\}\delta_{kn} + \sqrt{n}\sqrt{n-1}\,\delta_{k,n-2}$$

representasi matriksnya adalah

$$p^2 = -\frac{m\hbar\omega}{2}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & -5 & 0 & \sqrt{12} & \ldots \\ \sqrt{6} & 0 & -7 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & -9 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

$$p^2 = m\hbar\omega\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 & -\sqrt{3} & \ldots \\ -\frac{\sqrt{6}}{2} & 0 & \frac{7}{2} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9}{2} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Daftar Pustaka

1. Richard, L Liboff. "Introductory Quantum Mechanics" second edition Addison-Wesley Publishing Company (1992).
2. Cohen-Tannoudji, Diu,Laloe. "Quantum Mechanics" volume 1 Willey –Interscience Paris (1977).
3. P. Sinaga. "Fisika Kuantum (diktat)"