MATEMATIKA UNTUK TERMODINAMIKA

1.1 Apakah Termodinamika itu ?

Termodinamika adalah ilmu tentang *temperatur, kalor,* dan *pertukaran energi.* Termodinamika mempunyai penerapan praktis dalam semua cabang sains dan teknologi seperti halnya dalam berbagai aspek kehidupan sehari-hari, mulai dari urusan cuaca sampai urusan masak-memasak.Temodinamika adalah ilmu yang mempelajari hubungan antara *kalor* dengan *usaha* serta sifat-sifat yang mendukung hubungan tersebut. Dapat pula dikatakan bahwa termodinamika adalah ilmu yang mempelajari *energi* dan *tranformasinya*. Prinsip-prinsip dan hukum-hukum termodinamika digunakan pada perencanaan motor-motor bakar, pusat-pusat tenaga nuklir, pesawat-pesawat pendingin, roket, pesawat terbang, pesawat dengan tenaga listrik, dan lain-lain.

Pembahasan termodinamika bersifat *makroskopis*, dalam arti menyangkut sifat kelompok atom atau molekul individual. Secara historis, termodinamika memang terlepas dari teori mikroskopis. Hal ini disebabkan karena termodinamika dikembangkan sebelum teori atom dan molekul mapan. Oleh karena itu maka hukum-hukum termodinamika tidak terpengaruh oleh perubahan-perubahan dalam teori tentang atom, molekul, struktur zat dan antar aksi atom atau molekul.

Termodinamika merupakan cabang dari termofisika. Termofisika adalah ilmu pengetahuan yang mempelajari dan menjelaskan perilaku zat dibawah pengaruh kalor dan perubahan-perubahan yang menyertainya. Termofisika mencakup cabang-cabang ilmu : *kalorimetri, termometri, perpindahan kalor, termodinamika, teori kinetik gas dan fisika statistik.*

Pada diktat ini kita hanya akan membicarakan termodinamika saja. Untuk lebih memantapkan pemahaman konsep-konsepnya kita akan mencoba dengan menggunakan pendekatan teknik, yaitu setiap pembahasan akan disertai dengan terapannya dalam kehidupan sehari-hari dan dalam teknologi.

Termodinamika berbeda dengan fisika statistik. Dalam termodinamika kita akan berusaha mendapatkan rumus-rumus yang menggambarkan kaitan antara besaran fisika tertentu, untuk menjelaskan pengaruh zat dibawah pengaruh kalor. Besaran fisika yang dimaksud disebut *koordinat makroskopik sistem*. Rumus-rumus yang menggambarkan kaitan antara besaran fisika tertentu dalam termodinamika diperoleh secara empiris melalui eksperimen yang kemudian digunakan untuk meramalkan perilaku zat tersebut dibawah pengaruh kalor yang lain. Jumlah koordinat makroskopik yang diperlukan untuk suatu sistem termodinamika jumlahnya tidak terlalu banyak.

Berbeda dengan termodinamika, dalam fisika statistik kita tidak memperlihatkan sistem sebagai suatu keseluruhan, melainkan memandang partikel-partikelnya secara individual. Oleh karena itu, besaran-besaran fisik yang dibicarakan pada fisika statistik disebut *koordinat mikroskopik*. Supaya terbentuk jembatan antara dunia *makroskopik* dan dunia *mikroskopik*, maka diadakan beberapa pemisalan tentang partikel itu, sehingga secara teoritik dapat diturunkan hubungan-hubungan yang mengkaitkan besaran makroskopik dengan sifat partikel. Dengan demikian jumlah koordinat mikroskopik untuk suatu sistem adalah *sejumlah partikel* yang ada dalam sistem tersebut (yaitu *se-orde dengan bilangan Avogadro*).

Suatu sistem berupa gas, padatan, atau cairan misalnya, terdiri atas sejumlah atom atau molekul . Oleh karena itu sangat berguna untuk mendefinisikan suatu makroskopik yang mencakup sejumlah partikel (atom, ion dan molekul). Satuan tersebut sering disebut *mol*. Dan sejumlah partikel yang terdapat dalam 1 mol gas misalnya, disebut bilangan avogadro (N). Bilangan N didefinisikan sebagai jumlah atom yang terdapat dalam tepat 12,00 gram isotop C-12, yakni 6,02 x 10^{23}. Oleh karena itu jika kita memiliki sejumlah mol gas, maka kita akan memiliki sejumlah partikel (berupa atom, molekul, atau ion) se-orde bilangan avogadro. Jadi istilah mol, kalau disederhanakan sama dengan istilah kodi atau lusin dalam kehidupan sehari-hari, yaitu suatu istilah untuk menyebut sejumlah atom, ion, atau molkeul pada suatu sistem. Dengan demikian jumlah koordinat mikroskopik yang terlibat dalam suatu sistem, se-orde dengan Bilangan Avogadro.

Untuk lebih mempertegas perbedaan antara termodinamika dan fisika statistik, perhatikan contoh berikut ini : *Misalkan kita memiliki suatu sistem berupa gas yang terdiri dari N buah molekul, yang dibatasi oleh suatu dinding pembatas dalam ruang tertutup*. Besaran makroskopik yang menggambarkan sistem gas ini adalah : Tekanan (P), Volume (V) dan Suhu (T). Dari eksperimen diketahui bahwa antara P, V, dan T terdapat kaitan tertentu. Artinya bahwa sistem gas tersebut dapat kita beri volume tertentu, suhu tertentu, ternyata tekanannya dengan sendirinya mempunyai nilai tertentu pula. Hubungan fungsional ini secara matematis ditulis f(P,V,T) = 0 dimana besaran P,V dan T mudah diukur.

Sistem gas di atas, dapat pula dipandang sebagai suatu kumpulan N molekul/partikel yang masing-masing bermassa m dan berkecepatan v. Untuk menjelaskan konsep tekanan (P), harus dibuat beberapa asumsi. Misalnya gas tersebut dianggap sebagai gas ideal (mengenai gas ideal akan dibicarakan dalam satu bab khusus). Untuk sementara, yang disebut gas ideal atau gas sempurna adalah gas yang dengan tepat memenuhi hukum Boyle dan hukum Gay-Lussac, yaitu : P V = n R T. Disini P = Tekanan, V = Volume ruang untuk gas bergerak secara bebas, n = jumlah mol gas, T = temperatur absolut (mutlak), dan R = konstanta universal gas.

Telah kita ketahui pula bahwa sebenarnya tidak ada gas nyata yang tepat memenuhi hukum Boyle dan Gay-Lussac. Tetapi bila tekanannya tidak terlalu besar dan temperaturnya tidak terlalu rendah, gas nyata akan mirip dengan gas ideal, dan sifatnya dapat dilukiskan oleh persamaan : P V = n R T.

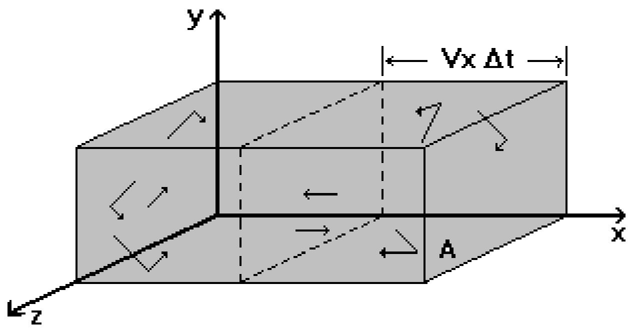
Dalam sudut pandang *mikroskopik*, yang dinamakan *teori kinetik gas, tekanan gas adalah hasil tumbukan antara molekul gas dan dinding-dinding bejana dimana gas berada*. Kita dapat menghitung tekanan ini dengan menghitung laju perubahan momentum molekul gas karena tumbukan dengan dinding bejana. Berdasarkan hukum kedua Newton, laju perubahan momentum sama dengan gaya yang diberikan oleh dinding pada molekul-molekul gas :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \qquad (1\text{-}1)$$

Berdasarkan hukum ketiga Newton , gaya ini sama dengan gaya yang diberikan oleh molekul-molekul pada dinding. Gaya persatuan luas sama dengan tekanan.

Kita akan mulai dengan membuat asumsi-asumsi *model teori kinetik* berikut ini : *(1) Gas ideal terdiri atas partikel (atom atau molekul) dalam jumlah yang sangat banyak, (2)Partikel itu tersebar merata dan bergerak secara acak (sembarang), (3) Jarak antar partikel jauh lebih besar dibandingkan dengan* *ukuran partikelnya itu sendiri, sehingga ukuran partikel diabaikan (dalam hal ini gerak partikel benar-benar hanya translasi saja, gerak rotasi dan vibrasi diabaikan), (4) Tidak ada gaya interaksi antar partikel satu dengan yang lainnya, kecuali bila kedua partikel itu bertumbukan, (5) Semua tumbukan yang terjadi, baik antara partikel-partikel penyusun gas maupun antara partikel dengan dinding bejana, berlangsung elastis sempurna dan terjadi dalam selang waktu yang sangat singkat, (6) Hukum-hukum Newton tentang gerak berlaku,(7) tanpa adanya gaya eksternal (pertikel-partikel bergerak cukup cepat sehingga kita dapat mengabaikan gravitasi), tidak ada posisi yang dicenderungi oleh molekul dalam bejana, dan tidak ada kecenderungan arah vektor kecepatan.*

Asumsi ketiga menyatakan bahwa molekul-moekul atau partikel-partikel gas secara rata-rata jauh terpisah. Pengertian ini ekivalen dengan mengasumsikan kerapatan gas yang sangat rendah. Karena momentum konstan, maka tumbukan yang dilakukan oleh molekul-molekul satu sama lain tidak berpengaruh pada momentum total dalam arah manapun, sehingga kita dapat mengabaikan tumbukan-tumbukan ini.



Marilah kita asumsikan bahwa kita mempunyai bejana kotak dengan volume V . Gas yang terdiri dari N molekul tersebut kita masukkan kedalam bejana (Gambar 1.1). Gas yang terdiri dari N molekul tersebut masing-masing dengan massam dan bergerak dengan kecepatan v. Kita ingin menghitung gaya yang diberikan oleh molekul-molekul ini pada didnding kanan, yang tegak lurus sumbu –x. Komponen x momentum sebelum menumbuk dinding adalah $+mv_x$, dan setelah melakukan tumbukan elastik dengan dinding, komponen x momentum adalah $-mv_x$. Jadi besarnya perubahan momentum selama tumbukan satu molekul dengan dinding adalah $2mv_x$. Perubahan momentum total semua molekul selama suatu selang waktu tertentu t adalah $2mv_x$ kali jumlah molekul yang menumbuk dinding selama selang waktu tersebut.

Perhatikan kembali gambar 1.1, Jumlah molekul yang menumbuk dinding kanan dengan luas A adalah jumlah molekul yang ada dalam jarak $v_x\, t$ dan sedang bergerak ke kanan. Jumlah ini adalah jumlah molekul per satuan volume N/V kali volume $v_x\, t$ kali $\frac{1}{2}$, karena secara rata-rata, separuh dari molekul-molekul akan bergerak ke kanan dan separuh ke kiri. Perubahan total momentum ΔP molekul-molekul gas dalam selang waktu t adalah bilangan ini kali $2mv_x$, perubahan momentum per molekul:

$$\Delta P = \frac{1}{2}\frac{N}{V}(v_x \Delta t A)2mv_x = \frac{N}{V}mv_x^{\ 2} A\Delta t \qquad (1\text{-}2)$$

Gaya yang diberikan oleh dinding pada molekul-molekul dan oleh molekuk-molekul pada dinding adalah perubahan momentum ini dibagi dengan selang waktu t. Tekanan adalah gaya ini dibagi dengan luas :

$$P = \frac{F}{A} = \frac{1}{A}\frac{\Delta P}{\Delta t} \qquad (1\text{-}3)$$

Dengan membagi perubahan momentum dengan waktu Δt dan dengan luas t , kita akan mendapatkan :

$$P = \frac{N}{V}mv_x^{\ 2} \qquad (1\text{-}4)$$

Dengan memperhitungkan kenyataan bahwa semua molekul dalam bejana tidak mempunyai kelajuan yang sama, maka kita cukup mengganti $v_x^{\ 2}$ dengan nilai rata-rata $(v_x^{\ 2})_{rata-rata}$. Selanjutnya kita tulis persamaan (1-4) dalam energi kinetik $\frac{1}{2}mv_x^{\ 2}$ yang berkaitan dengan gerakan sepanjang sumbu x, maka kita akan mendapatkan :

$$PV = 2N(\frac{1}{2}mv_x^{\ 2})_{rata-rata} \qquad (1\text{-}5)$$

Persamaan (1-5) menyatakan hubungan antara besasan makroskopik (P) dengan besaran-besaran mikroskopik m dan v).

Jumlah koordinat makroskopik berbagai sistem termodinamika bervariasi, bergantung sistemnya, tetapi tidak akan sebanyak koordinat mikroskopiknya. Misalnya, jika sistem termodinamika kita berupa sistem hidrostatik atau sistem kimiawi, maka sistem ini dalam keadaan setimbang, paling tidak memiliki 8 buah koordinat sistem atau variabel keadaan sistem, yaitu besaran-besaran makroskopik yang dapat melukiskan keadaan keseimbangan sistem.Untuk sistem dielektrik atau sistem paramagnetik, misalnya, terdapat koordinat-koordinat termodinamika yang lain. Untuk sistem berupa gas, variabel keadaaan sistem itu adalah sebagai berikut:

Tabel 1.1

Tabel variabel keadaan sistem

No	Nama variabel Keadaan sistem	Lambang	Satuan (SI)
1	Tekanan	P	Pa =N/m^2
2	Suhu	T	K
3	Volume	V	m^3
4	Entropi	S	JK^{-1}
5	Energi Dalam	U	J
6	Entalpi	H	J
7	Energi bebas Helmholtz	F	J
8	Energi bebas Gibbs	G	J

Dari eksperimen-eksperimen yang telah dilakukan,yang melibatkan 8 buah variabel keadaan sistem diatas, banyak sekali dihasilkan hubungan, kaitan dan rumusan yang menggambarkan hubungan fungsional antar berbagai besaran-besaran tersebut.

Khusus untuk sistem tertutup, yaitu untuk sistem gas yang jumlah partikelnya tidak berubah, diperoleh 3 kesimpulan penting sebagai berikut :

1. *Semua eksperimen menunjukkan bahwa apabila sistem berada dalam keadaan setimbang maka setiap koordinat dinyatakan sebaga fungsi dari dua koordinat lain.*
2. *Hanya dua diantara 8 koordinat itu yang merupakan variabel bebas sistem*
3. *Dalam keadaan setimbang termodinamika (setimbang mekanik, kimia, termal dan fase) berlaku hubungan : $f(x,y,z) = 0$*

Misalkan kita tinjau sistem gas dalam suatu berjana tertutup (sistem tertutup) yang komposisinya tidak berubah, artinya tidak terjadi reaksi-reaksi kimiawi yang dapat mengubah jumlah partikel dalam sistem, dan tidak terjadi difusi, sistem gas tersebut pada volume tertentu (V), dapat diberi sushu (T) berapa saja atau pada suhu tertentu, dapat diberi volume (V) berapa saja; Hal ini sangat memungkinkan karena ternyata terdapat koordinat termodinamika ke-3 yang menyesuaikan diri, misalnya tekanan (P), sehingga sistem gas ini dapat dilukiskan oleh sepasang koordinat bebas (P), yang secara matematis dapat ditulis :

$f(P,V,T) = 0$

Atau secara umum dinyatakan dengan hubungan fungsional :

$f(x,y,z) = 0$

Sehingga kita harus membicarakan fungsi dengan dua variabel.

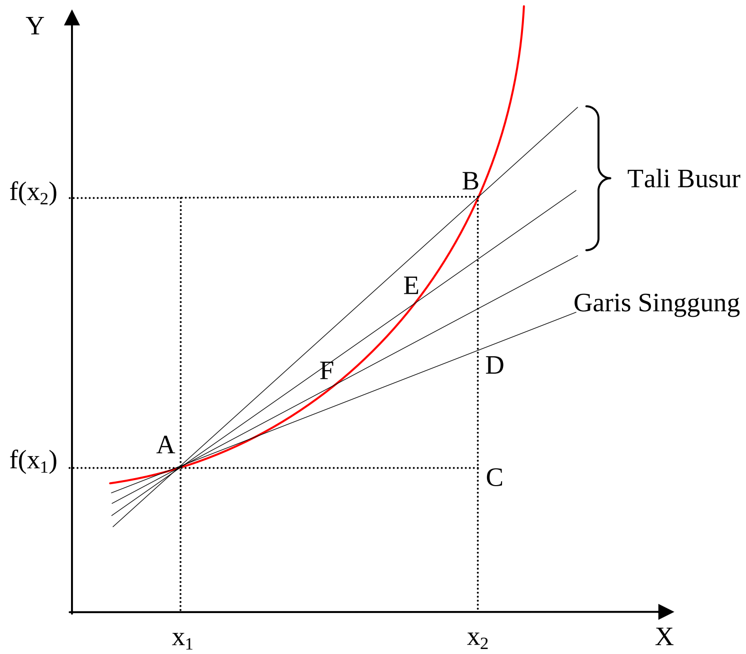
1.2 Diferensial Fungsi Variabel Tunggal

Keperluan kita saat ini adalah membicarakan fungsi dengan dua variabel, tetapi sebelum itu marilah kita ulang sedikit fungsi variabel tunggal, agar anda lebih mudah memahami fungsi dengan dua variabel. $f(x,y) = 0$ menyatakan hubungan implisit fungsi variabel x dan y. bentuk $f(x,y) = 0$ disebut bentuk implisit. Bentuk eksplisitnya adalah $x = x(y)$ dan $y = y(x)$. Bentuk $x = x(y)$ artinya y sebagai variabel bebas, dan x sebagai variabel terikat . Sedangkan bentuk $y = y(x)$ artinya x sebagai variabel bebas dan y sebagai variabel tak bebas.

Dalam termodinamika, kita akan banyak berbicara mengenai *proses*. Proses yang dimaksud adalah *perubahan dari koordinat-koordinat termodinamika*. Perubahan suatu koordinat termodinamika tertentu dalam suatu sistem, akan berpengaruh terhadap koordinat termodinamika yang alin. Misalnya untuk hubungan $f(x,y) = 0$, jika koordinat termodinamika x berubah sebesar ‘dx’, bagaimana cara menyatakan perubahan koordinat termodinamika y ?

Perhatikan penjelasan berikut :

Misalkan kita memilih suatu fungsi y = y(x), yang sketsa grafiknya sebagai berikut :



Gambar 1.2

Grafik fungsi y = f(x)

Pada saat $x = x_1$ maka nilai fungsi $f_1 = f(x_1)$

Pada saat $x = x_2$ maka nilai fungsi $f_2 = f(x_2)$

$AC = \Delta x = x_2 - x_1$ dan $BC = \Delta f = f_2 - f_1$

Tan ($\angle BAC$) = kemiringan tali busur AB

Jika x_2 mendekati x_1, maka titik B akan mendekati titik A .Pada gambar 1.2 ditunjukkan oleh titik E dan F yang makin mendekati titik A. Akibatnya tali busur AB akan menjadi garis singgung di titik A. Konsekuensi lain dari mendekatnya titik B ke titik A adalah Δx dan Δf mendekati nol. Walaupun Δx dan Δf mendekati nol, tetapi $\angle ABC$ tidak mendekati nol, melainkan menjadi $\angle DAC$ (mempunyai nilai tertentu), yaitu sudut miring garis singgung AD di titik A.. Jelaslah bahwa, bila $x_2 \to x_1$, walaupun $\Delta x \to 0$ dan $\Delta f \to 0$, tetapi ;

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \neq 0$ dan $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \neq \infty$ melainkan memiliki harga yang berhingga (tertentu).

(catatan : tanda $\to$ artinya mendekati)

pada mata kuliah kalkulus, kita telah mengetahui bahwa :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(X + \Delta X)}{\Delta x} \quad = \text{turunan pertama f(x) terhadap x}$$

$$= \frac{d}{dx} f(x)$$

$$= f'(x)$$

Dari gambar 1.2 anda dapat melihat bahawa $\mathrm{Tan}\ \angle DAC = \frac{CD}{AC} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Sehingga $\Delta y = \tan(\angle DAC).\ \Delta x$ atau $\Delta y = df/dx.\ \Delta x$, jika perubahannya sangat kecil (Infinitesimal), maka penulisan persamaan $\Delta y = \frac{df}{dx}.dx$ menjadi : $dy = \frac{df}{dx}.dx$. Jadi kesimpulannya, jika kita memiliki hubungan fungsional : $y = f(x)$ atau $f(x,y)= 0$, dengan x berubah secara infinit sebesar dx, maka y akan berubah secara infinit sebesar dy. Hubungan dy dan dx dapat dinyatakan dengan :

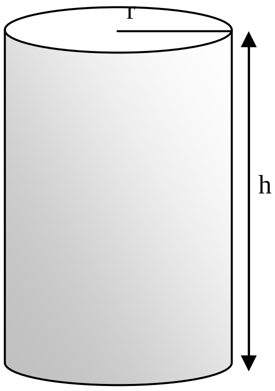
$$dy = \frac{df}{dx}.dx \qquad (1\text{-}6)$$

Contoh (1-1) : jika $y = 4x^2$, maka $dy/dx = 8x$, sehingga $dy = 8dx$

1.2 Diferensial Fungsi Dua Variabel

Perhatikan contoh berikut ini :

Misalkan kita memiliki suatu bejana berbentuk silinder dengan jejari r dan ketinggian h seperti tampak pada gambar berikut :



Gambar 1.3

Silinder dengan jejari r dan ketinggian h

Volume silinder tersebut adalah $V = \pi r^2 h$. Jadi dalam hal ini volume silinder (V) bergantung pada dua variabel, yakni r dan h. Sekarang, bejana silinder tersebut kita isi dengan suatu fluida. Pada saat kita isi dengan fluida, maka jejari r kita jaga tetap dan ketinggian 'h' kita tambah, maka volume V akan bertambah. Dalam hal ini kita dapat mencari koefesien diferensial V terhadap h, hanya jika r dijaga tetap, yaitu $\left[\frac{dV}{dh}\right]_{r\ \mathrm{konstan}}$ dan ditulis sebagai $\frac{\partial V}{\partial h}$.

(Catatan : Perhatikan simbol "Delta" yang baru.)

Untuk memperoleh $\frac{\partial V}{\partial h}$, kita akan mendefinisikan persamaan yang diberikan terhadap h dengan menganggap semua simbol, selain 'V' dan 'h' konstan.

Maka, $\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_r = \pi r^2 1 = \pi r^2$

Tentu saja kita dapat meninjau persoalan dengan h dijaga konstan, perubahan 'r' akan menyebabkan perubahan V juga. Disini kita mempunyai $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_h$ yang berarti bahwa sekarang kita mendiferensialkan $V = \pi r^2 h$ terhadap r dengan menganggap semua simbol, selain V dan r, konstan.

Maka, $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_h = \pi 2rh = 2\pi rh$

Oleh karena itu persamaan $V = \pi r^2 h$ dinyatakan sebagai fungsi dari dua variabel r dan h, sehingga memiliki dua koefesien diferensial parsial, yaitu :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_r \text{ dan } \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_h$$

Tentu saja kita tidak harus terbatas hanya pada variabel-variabel yang membangun volume silinder. Hal yang sama berlaku juga untuk sembarang fungsi dengan dua variabel bebas.

Misalkan, kita memiliki sebuah contoh fungsi $z = x^2y^3$;

Dalam hal ini z fungsi dari x dan y, karena itu kita dapat mencari $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ dan $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$

i) Untuk mencari $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$, kita mendiferensialkan z terhadap x dengan menjaga y konstan, maka

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 2xy^3$$

ii) Untuk mencari $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$, kita mendiferensialkan z terhadap x dengan menjaga y konstan, maka

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 3(xy)^2$$

Pernyataan $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ dan $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ konstan disebut *diferensial parsial*, dan untuk mencarinya tidaklah sukar bukan ?

Sebagai latihan, cobalah anda lakukan sendiri bentuk fungsi-fungsi berikut :

1) $U = x^2+xy+y^2$; $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y$ = ………… $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x$ = …………

2) $Z = x3+y^3-2x^2y$; $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y$ =………… $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x$ =…………

3) $Z = (2x-y)(x+3y)$; $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y$ = ………… $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x$ =…………

4) $Z = \frac{2x-y}{x+y}$; $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y$ =………… $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x$ =…………

5) $Z = \text{Sin}(3x+2y)$; $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y$ =………… $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x$ =…………

Jika anda sudah mencoba soal no.1 sampai no.5 diatas, Cobalah anda periksa hasil pekerjaan anda dengan mencocokkan hasil pekerjaan anda dengan kunci jawaban sebagai berikut :

1) $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_y = 2x+y$; $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_x = x+2y$

2) $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y = 3x^2-4xy$; $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x = 3y^2 - 2x^2$

3) $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y = 4x+5y$; $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x = 5x-6y$

4) $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y = \frac{3y}{(x+y)^2}$; $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x = \frac{-(1+2x)}{(x+y)^2}$

5) $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)_y = 3\cos(3x+2y)$; $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)_x = 2\cos(3x+2y)$

Bagaimana hasilnya ? benarkah semua jawaban anda ? saya harap anda mau mengulangi mengerjakan kembali soal-soal yang masih salah. Bersabarlah ! Jika sudah mahir, lanjutkan pada materi berikutnya.

Baik, sekarang kita maju satu langkah lagi. Cobalah anda tinjau hubungan :

$Z = 3x^2 + 4xy - 5y^2$; Jelas bahwa fungsi tersebut adalah fungsi dengan dua variabel. Dari fungsi tersebut, kita akan mendapatkan dua diferensial parsial berikut ini :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 6x + 4y \text{ dan } \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 4x - 10y;$$

Pernyataan $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ dan $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ sendiri masih merupakan fungsi x dan y, oleh karena itu kita dapat mencari koefesien diferensial parsialnya terhadap x maupun y :

(i) Jika kita mendiferensialkan secara parsial terhadap x, kita peroleh : $\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}$. Dan bentuk ini sering dituliskan : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, maka : $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(6x+4y) = 6$. Bentuk ini dikenal sebagai koefesien diferensial parsial kedua z terhadap x.

(ii) Jika kita mendiferensialkan secara parsial terhadap y, kita peroleh : $\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial z}{\partial x}\right\}$. Dan bentuk ini sering dituliskan : $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, maka : $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(6x+4y) = 4$

Bagaimana bila anda bertemu dengan fungsi jenis lain, misalnya $V = f(x^2 + y^2)$. Cobalah anda perhatikan bahwa bentuk fungsi tersebut tidak sama dengan bentuk $V = x^2 + y^2$. Disini V adalah fungsi dari (x^2+y^2), dan bentuk fungsinya secara tepat tidak diberikan. Meskipun demikian kita dapat memperlakukan $V = f(x^2+ y^2)$ sebagai fungsi dari fungsi dan koefesien diferensialnya terhadap variabel gabungan (x^2+y^2).

Kita nyatakan dengan : $f'(x^2+y^2)$, jadi :

$$\frac{\partial V}{\partial x}=f'(x^2+y^2).\frac{\partial}{\partial x}\,(x^2+y^2)=2x.f'\left(x^2+y^2\right)=2x.\frac{\partial f\left(x^2+y^2\right)}{\partial x}$$

Begitupun untuk $\frac{\partial V}{\partial y}$, dapat pula kita tulis sebagai :

$$\frac{\partial V}{\partial y}=f'(x^2+y^2).\frac{\partial}{\partial y}\,(x^2+y^2)=2y.f'\left(x^2+y^2\right)=2y.\frac{\partial f\left(x^2+y^2\right)}{\partial y}.$$

Saya kira uraian diatas sudah cukup jelas, oleh karena itu kini saatnya berlatih, dengan mengerjakan soal-soal berikut ini :

1) $Z = 5x^3+3x^2+4y^2$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=$ ………… $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$ …………

2) $Z=x\cos(y)-y\cos(x)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=$ ………… $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$ …………

3) $V=\ln(x^2+y^2)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ ………… $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$ …………

4) Jika ; $z=f\left(\frac{y}{x}\right)$; Buktikan bahwa : $x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y+y\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x=0$

5) Jika : V = f(ax+by) ; Buktikan bahwa : $b\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_y-a\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_x=0$

Jika anda sudah mengerjkaan semua soal diatas, cobalah anda cocokkan jawaban anda dengan kunci jawaban berikut ini. Jika ada kesalahan, cobalah anda telusuri dimana letak kesalahan anda . Bersabarlah, karena ketika anda dapat menelusuri kesalahan anda sendiri, disitulah anda belajar yang sebenarnya !

1) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=0\,;\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=0$

2) $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=-\sin y+\sin x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-\sin y+\sin x$

3) $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x^2-2y^2}{\left(x^2+y^2\right)}\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

4) $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial yx}=x\left(-\frac{y}{x^2}\right)f'\left(\frac{y}{x}\right)+y.\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{yy}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)=0$

5) $b\frac{\partial V}{\partial x}-b\frac{\partial V}{\partial y}=ab.f'\left(ax+by\right)-ab.f'\left(ax+by\right)=0$

Bagaimana hasilnya? Apakah jawaban anda benar semua? Saya harap anda tetap bersemangat! Jika anda telah merasa mahir dengan soal-soal tersebut, barulah anda lanjutkan pada materi berikut ini.

Pada sub pokok bahasan (1.1), anda sudah mengenal bentuk f(x,y,z) = 0. Ini adalah bentuk implisit dari fungsi dengan variabel x, y dan z . Pada fungsi f(x,y,z) = 0 terdapat hubungan tertentu antara variabel x, y, dan z. F ngsi f(x,y,z) = 0 memiliki arti bahwa hanya terdapat 2 variabel diantara 3 variabel itu yang bersifat bebas, sedangkan yang ke-tiganya merupakan variabel tak bebas. Sedangkan bentuk implisit dari fungsi tersebut adalah :

x = x (y,z) ; dimana y dan z merupakan variabel bebas

y = y (x,z) ; dimana x dan z merupakan variabel bebas

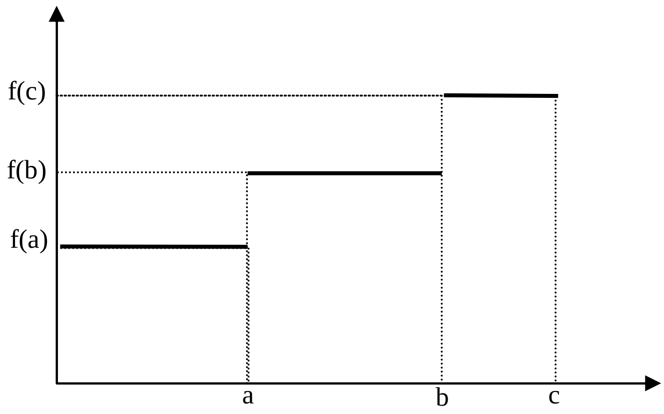
z = z (x,y) ; dimana x dan y merupakan variabel bebas

Grafik fungsi f(x,y,z) = 0 dalam koordinat x-y-z pada umumnya berupa permukaan (bukan kurva). Permukaan yang dimaksud adalah bisa permukaan tertutup seperti bola atau elipsoida, bisa juga berupa permukaan terbuka seperti hiperbola atau paraboloida.

Perhatikan bentuk eksplisit yang ketiga dari bentuk implisit fungsi f(x,y,z) = 0, yaitu z = z(x,y). Kita misalkan bahwa fungsi ini adalah fungsi yang memang ***ada*** dan ***berkelakuan baik***. (kontinu dan diferensiabel). Untuk memahami pengertian kontinu dan diferensiabel, anda perhatikan penjelasan berikut:

1. Pengertian Fungsi Kontinu

Misal kita memiliki fungsi y = f(x) yang sketsa grafiknya sebagai berikut :



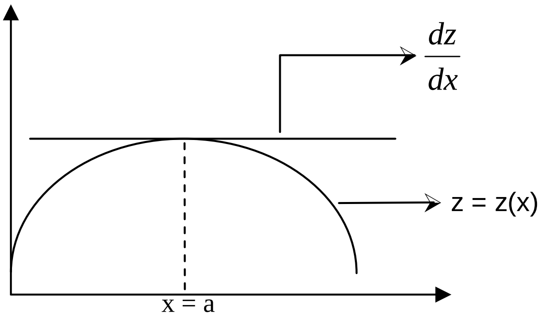
Gambar 1.3.2
Fungsi tangga

Fungsi Y = f(x) pada titik x = a tidak kontinu, karena bila didekati dari arah kiri berharga f(a), tetapi bila didekati dari arah kanan berharga f(b). Begitu pula pada x = b dan x = c

Jadi suatu fungsi dikatakan kontinu pada suatu titik, jika nilai fungsi di titik tersebut, baik didekati dari sebelah kiri maupun dari sebelah kanan berharga sama. Sebaliknya jika nilai fungsi di titik tersebut, baik didekati dari sebelah kiri maupun dari sebelah kanan harganya berbeda, maka fungsi tersebut dikatakan tidak kontinu.

2. Pengertian Fungsi Diferensiabel

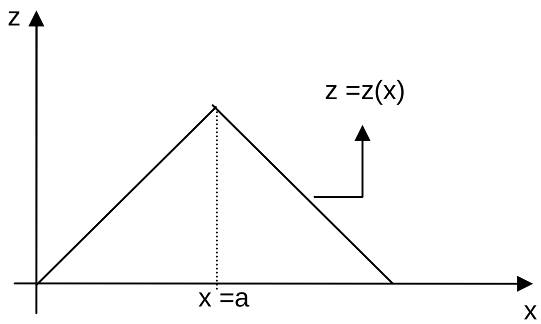
Misalkan kita memiliki fungsi y = f(x) yang sketsa grafiknya sebagai berikut :



Gambar 1.3
Fungsi parabola

Fungsi z = z(x) pada x = a adalah *diferensiabel* ; karena harga Harga $\frac{dz}{dx}$ di titik x = a, jika didekati dari sebelah kiri maupun dari sebelah kanan harganya sama yaitu $\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=a} = 0$; Pada gambar 1.3 ditunjukkan oleh gradien garis singgung yang menyinggung kurva di titik x=a.

Sekarang coba anda perhatikan gambar 1.4 berikut ini :



Gambar 1.4
Contoh fungsi yang tidak diferensialbel di titk tertentu

Pada gambar 1.4 disamping, nilai dari $\frac{dz}{dx}$ di x = a jika didekati dari kiri berbeda nilainya dengan jika didekati dari arah kanan. Ini artinya bahwa fungsi z = z(x) di x = a ***tidak diferensiabel***. Jadi kesimpulannya jika nilai turunan pertama dari suatu fungsi didekati dari sebelah kiri dan didekati dari sebelah kanan pada suatu nilai tertentu sama harganya, maka fungsi tersebut dikatakan diferensiabel di titik yang bersangkutan. Sebaliknya, jika nilai turunan pertama dari suatu fungsi didekati dari sebelah kiri dan didekati dari sebelah kanan pada suatu nilai tertentu berbeda harganya, maka fungsi tersebut dikatakan tidak diferensiabel di titik yang bersangkutan.

Kembali lagi pada Gambar 1.4 sebelumnya. Fungsi z=z(x) di x =a mempunyai *nilai fungsi* dan mempunyai *nilai turunan pertama* yang sama baik didekati dari sebelah kiri maupun didekati dari sebelah kanan. Maka Fungsi yang seperti ini dikatakan sebagai *fungsi yang kontinu dan diferensiabel.* Fungsi z=z(x) yang memiliki sifat seperti ini dikatakan fungsi yang *ada dan berkelakuan baik* .

Sebagai bahan kajian lebih lanjut, berikut ini saya paparkan sedikit teorema yang berasal dari kalkulus. Dalam kalkulus terdapat suatu teorema yang menyatakan

Jika f'(a) ada, maka f kontinu di x =a ; hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut :

$$f(x)=f(a)+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$ $\rightarrow$ dimana x $\neq$ a

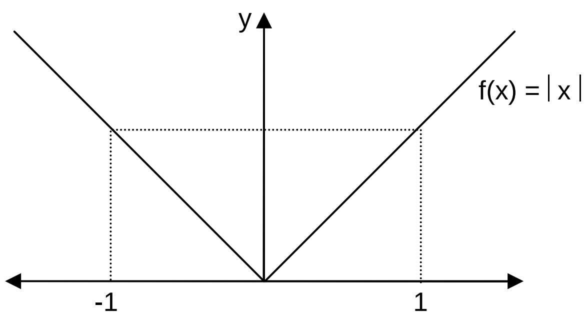
karenanya :

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\left[f(a)+\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right]=\lim_{x\to a} f(a)+\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a)$$

= f(a) + f'(a).0 = f(a)

Kebalikan teorema diatas adalah tidak benar. Jika fungsi f kontinu di x = a, maka tidak berarti bahwa f mempunyai turunan di x =a. ini dengan mudah dapat dilihat dengan memandang f(x) = $|a|$ di titik asal.

Fungsi f(x) = $|a|$ pasti kontinu di titik asal x = 0, tetapi tidak mempunyai turunan di x = 0, hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut :



Gambar 1.5
Fungsi mutlak

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$, tidak ada harganya , karena

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$$ (didekati dari kanan)

$$\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x}=-1$$ (didekati dari kiri)

Argumentasi yang baru saja disajikan, memperlihatkan bahwa disembarang titik dimana fungsi mempunyai sebuah sudut tajam, maka fungsi tersebut ***kontinu***, tetapi ***tidak diferensiabel***.

Sampai disini anda sudah memahami pengertian fungsi yang *kontinu dan diferensiabel*. Fungsi yang kontinu dan diferensiabel disebut fungsi yang berkelakuan baik. Diferensial dari suatu fungsi yang memang ada dan berkelakuan baik disebut *diferensial eksak.*

Kembali lagi pada persoalan fungsi dengan satu variabel . Jika kita memiliki hubungan fungsional : y = f(x) atau f(x,y)= 0, dengan x berubah secara infinit sebesar dx, maka y akan berubah secara infinit sebesar dy. Hubungan dy dan dx dapat dinyatakan dengan : $\mathrm{dy}=\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dx}}.\mathrm{dx}$. Untuk fungsi dengan dua variabel, yaitu fungsi f(x,y,z) = 0 atau z = z(y,x) ; maka dalam hal ini variabel bebas z ditentukan oleh variabel terikat y dan x. Sekarang bagaimana cara menyatakan perubahan total variabel z pada fungsi z = z(y,x), jika variaebl x berubah sebesar dx dan variabel y berubah sebesar dy ? Untuk menjawab persoalan ini kita dapat menggunakan hasil sebelumnya untuk fungsi dengan variabel tunggal. Jadi Untuk kasus umum, perubahan z yaitu dz karena x berubah sebesar dx dan y berubah sebesar dy dapat dinyatakan : dz = (perubahan z karena perubahan x dengan menjaga y konstan) + (perubahan z karena perubahan y dengan menjaga x konstan). Dengan menggunakan cara berfikir seperti persamaan (1-6) , maka kita dapatkan: untuk dapat persamaan (1) kita peroleh :

- Perubahan z karena x berubah adalah $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx$; dan
- Perubahan z karena y berubah adalah $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy$

Sehingga perubahan totalnya dalah :

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \qquad (1\text{-}7)$$

Dalam hal ini :

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_Y$, disebut diferensial parsial z terhadap x, dan kita sebut M(x,y), Sedangkan $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$, disebut diferensial parsial z terhadap y, dan disebut N(x,y). Diberi nama fungsi M(x,y) dan N(x,y), karena hasilnya masih merupakan suatu fungsi y dan x. Yang perlu anda ingat adalah bahwa, karena dz merupakan perubahan infinit dari suatu fungsi yang memang ***ada*** dan berkelakuan ***baik***, maka dz disebut ***diferensial eksak (ingat kembali pengertian diferensial eksak)***.

Contoh (1-2) : Misalkan : $z = 3x^2 + 4xy - 5y^2$

$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_Y$ =(6x + 4y) ≅ M(x,y)

$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ = (4x-10y) ≅ N(x,y)

Dan pada umumnya $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_Y$ dan $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ adalah dua fungsi x dan y yang berbeda, sehingga :

dz = (6x + 4y) dx + (4x – 10y) dy atau

$dz = d(3x^2 + 4xy - 5y^2)$

Penulisan $dz = d(3x^2 + 4xy - 5y^2)$, disebut ***diferensial implisit***

Contoh (1-3) : Ada berapa buah deferensial parsial pada fungsi f(x,y,z) = 0 ?

Tentunya ada 6 buah, yaitu dari fungsi f(x,y,z) = 0 bila ditulis z = z(x,y) ada dua buah, dari fungsi f(x,y,z) = 0 bila ditulis x = x(y,z) ada dua buah, dan dari fungsi f(x,y,z) = 0 bila ditulis y = y(x,z) ada dua buah. Jadi totalnya ada enam buah diferensial parsial.

Dari dari fungsi f(x,y,z) = 0 bila ditulis z = z(x,y), diperoleh : $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ dan $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$

Dari dari fungsi f(x,y,z) = 0 bila ditulis x = x(y,z), diperoleh : $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ dan $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y$

Dari dari fungsi f(x,y,z) = 0 bila ditulis y = y(x,z), diperoleh : $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ dan $\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)_x$

Dari keenam diferensial parsial tersebut pada umumnya tidak sama satu dengan yang lainnya, namun ada hubungan tertentu diantara diferensial parsial-diferensial parsial tersebut, karena sebenarnya diferensial parsialnya mempunyai arti geometrik, bila mereka berasal dari suatu fungsi yang ada dan berkelakuan baik.

1.4 Diferensial Eksak dan Tak Eksak

Jika z = z(x,y) adalah suatu fungsi yang ada dan berkelakuan baik (kontinu dan diferensiabel), maka urutan mendiferensialkan fungsi tersebut terhadap variabel manapun tidak menjadi persoalan, artinya bagaimanapun urutan mendiferensialkannya maka hasilnya akan sama. Ini berarti, jika z = z(x,y) maka :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} \tag{1-8}$$

Karena $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \cong M(x,y)$ dan $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \cong N(x,y)$, maka persamaan (1-8) dapat ditulis menjadi :

$$\left(\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\right)_x=\left(\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right)_y \tag{1-9}$$

Persamaan (1-9) ini adalah syarat yang perlu dan cukup agar z=z(x,y) merupakan fungsi yang ada dan berkelakuan baik. Diferensial total dari suatu fungsi yang ada dan berkelakuan baik, serta memenuhi syarat persamaan (1-9) disebut diferensial eksak. Dan syarat persamaan (1-9) disebut syarat Euler.

Contoh (1-4) : Misalkan bahwa z = x^2 +xy^2 adalah funsi yang ada dan baik, maka :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = M(x,y) = 2x + y^2$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = N(x,y) = 2y\,\mathrm{x}$$

dz = (2x + y^2)dx + (2xy)dy disebut diferensial eksak, karena jika dicari, maka :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right)_x = 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right)_y = 2y$$

Jelas terbukti bahwa : $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$, Jadi fungsi z = $x^2 + xy^2$ memenuhi syarat Euler.

Untuk memantapkan pemahaman anda, cobalah soal-soal berikut ini :

1) $z = 5x^3 + 3x^2y + 4y^3$
2) z = x cos y – y cos x
3) $z = e^{2x-3y}$
4) z = x Sin y
5) z = (x+y) ln (xy)

Apakah semua fungsi diatas merupkan fungsi yang ada dan baik ? Cobalah anda uji dengan menggunakan syarat Euler. Lalu anda tuliskan bentuk diferensial eksaknya. Saya sarankan agar anda tidak melihat dulu solusi dari soal-soal di atas . Kecuali bila anda sudah menyelesaikan semua soal diatas, kemudian anda ingin mengecek benar tidaknya pekerjaan anda, maka anda baru diperbolehkan melihat solusinya.
Jika semua sudah anda kerjkan, cobalah cocokkan jawaban anda dengan kunci jawaban berikut ini :

1) $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ = 6x ; $dz = (15x^2 + 6xy)dx + (3x^2 + 12y^3)dy$

2) $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ = -Sin y+Sinx ; dz = (cos y + y Sin x)dx + (-xsin y – Cos x) dy

3) $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ = -6^{e2x-3y} ; $dz = (2e^{2x-3y})dx + (-3e^{2x-3y})dy$

4) $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ = cos y ; dz = (Sin y) dx + (x cos y) dy

5) $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = \frac{x+y}{xy}$; $dz = \left[\frac{(x+y)}{x} + \ln(xy)\right]dx + \left[\frac{(x+y)}{y} + \ln(xy)\right]dy$

Benarkah semua jawaban anda ? Kalau benar, saya ucapkan selamat, berarti anda benar-benar sudah mahir. Jika belum, tetap bersemangat untuk mengulang dan mengulang. Saya percaya, bahwa anda mampu menguasainya. Jika masih ada kegagalan, percayalah bahwa itu sebenarnya hanya keberhasilan yang tertunda, asalkan anda sabar.

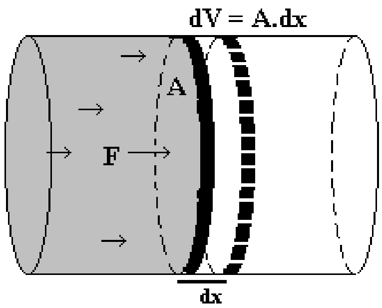
Selanjutnya kita akan berbicara mengenai *diferensial tak eksak*. Cobalah kita bayangkan suatu besaran tertentu katakanlah A yang bukan merupakan fungsi dari variabel x dan y. jadi fungsi A = A(x,y) memang merupakan fungsi yang tidak ada. Tetapi walaupun demikian, kita dapat membayangkan suatu perubahan variabel A, katakanlah sebesar dA. Mengapa hal ini penting untuk dipelajari ? Hal ini penting, karena banyak sekali dalam fisika besaran-besaran fisika yang cara berhubungan dengan besaran fisika yang lainnya dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan , tetapi dia bukan merupakan sebuah fungsi.
Misalkan, katakanlah besaran A itu mempunyai diferensial total :

$$dA = \left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x dy \qquad (1\text{-}10)$$

Jika $\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)_y = P(x,y)$ dan $\left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)_x = Q(x,y)$, maka untuk semua fungsi yang seperti A (sebenarnya bukan fungsi) akan selalu berlaku :

$$\frac{\partial A}{\partial y \partial x} \neq \frac{\partial A}{\partial x \partial y} \text{ atau } \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad (1\text{-}10)$$

Hal ini disebabkan karena P(x,y) dan Q(x,y) bukan merupakan diferensial dari A; karena fungsi A(x,y) memang tidak ada. Dalam hal demikian dA dikatakan diferensial tak eksak, dan diberi lambang dA.
Cobalah anda bedakan pengertian fisis dz (diferensial eksak) dengan dA (diferensial tak eksak). dz menyatakan perubahan variabel z yang amat kecil, sedangkan dA menyatakan besaran A dalam kuantitas yang sangat kecil.
Dalam ilmu fisika anda akan banyak menemukan besaran-besaran fisis yang seperti besaran A diatas, sebagai contoh misalnya adalah usaha yang dilakukan oleh gas yang mengembang sambil mendorong piston yang dinyatakan sebagai W=W (P,V)
Apakan W=W(P,V) merupakan fungsi ? untuk menjawab hal ini perhatikan uraian berikut ini :
Tinjau suatu sistem gas dalam bejana tertutup yang diatasi oleh piston yang luas penampangnya adalah A Lihat Gambar 1.6 :



Gambar 1.6

Gas dalam bejana yang dibatasi piston yang dapat bebas bergerak

Usaha mekanik gaya $\vec{F}$ sepanjang $d\vec{x}$ yang dilakukan oleh gas yang mengembang dalam bejana tersebut adalah :

$$dW = \vec{F}.d\vec{x} \qquad (1\text{-}11)$$

Hubungan yang dinyatakan oleh persamaan (1-11) diatas adalah rumus empiris yang kebenarannya sudah tidak dapat disangkal lagi. Menurut definisi, tekanan gas; P = $\frac{F}{A}$; sedangkan $\left|\vec{F}.d\vec{x}\right| = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{x}\right| Cos\, 0 = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{x}\right|$; Karena pada Gambar 1.6 $\vec{F}$ dan $d\vec{x}$ searah.

jika $\left|\vec{F}\right| = F$ dan $\left|d\vec{x}\right| = dx$, maka dW = Fdx; karena $P = \frac{F}{A}$ maka :

$$dW = PA.dx \tag{1-12}$$

Sedangkan Adx adalah perubahan volume yang kecil, dan kita sebut saja dV = Adx. Maka akhirnya persamaan (1-12) dapat ditulis menjadi :

$$dW = PdV \tag{113}$$

Persamaan (1-13) dapat kita tulis ;

$$dW = P\ dV + 0\ dP$$

Dari sini kita tahu bahwa :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial V}\right)_P = P \quad \text{dan} \quad \left(\frac{\partial W}{\partial P}\right)_V = 0$$

Oleh karena itu :

$$\frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{\partial W}{\partial V}\right)_P = \frac{\partial^2 W}{\partial P \partial V} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial W}{\partial P}\right)_V = \frac{\partial^2 W}{\partial V \partial P} = 0$$

Jadi : $\frac{\partial W}{\partial P \partial V} \neq \frac{\partial^2 W}{\partial V \partial P}$ ini artinya bahwa W = W(P,V) bukan merupakan suatu fungsi .

Dari penjelasan diatas, terbuktilah bahwa fungsi W=W(P,V) sebenarnya tidak ada, hingga dW = PdV adalah diferensial tak eksak dan diberi lambang dW. Jadi secara fisis dW bukanlah perubahan infinisimal dari suatu fungsi, melainkan perubahan usaha dalam jumlah yang sangat kecil (Infinitesimal).

Sampai disini saya harap anda sudah mampu membedakan *diferensial eksak dan diferensial tak eksak*, baik dari aspek matematis maupun dari aspek fisis. Kini akan saya pertajam lagi pemahaman anda. Oleh karena itu lanjutkanlah pada bahasan berikut ini :

Perbedaan antara diferensial eksak dan takeksak dapat pula dilihat dari hasil integrasinya :

(i) Jika dz adalah diferensial eksak, maka :

- Integrasi tak tentu suatu diferensial eksak akan menghasilkan fungsi aslinya ditambah konstanta :

$$\int dz(x,y) = z(x,y) + C \tag{1-14}$$

- Integrasi dalam suatu batas tertentu (misalnya dari i ke f) suatu diferensial eksak akan menghasilkan suatu bilangan atau nilai tertentu yang mengandung arti sebagai perubahan nilai fungsi asli pada batas integrasi tertentu :

$$\int_i^f dz(x,y) = z(x,y)\big| = z(x_f, y_f) - z(x_i, y_i) \qquad (1\text{-}15)$$

- Secara grafis, interpretasi integrasi dz diantara dua batas (i dan f), tidak bergantung pada jalan yang diambil , tetapi hanya bergantung pada titik awal (i) dan titik akhir (f) dari jalan itu.

(ii) Jika dA adalah diferensial tak eksak, maka :

- Integrasi tak tentu suatu diferensial tak eksak tidak mungkin menghasilkan suatu fungsi, karena besaran A sebagai fungsi dari variabel x dan y memang tidak ada. Oleh karena itu diferensial tak eksak $\require{cancel}\cancel{d}A$ tidak dapat diintegrasikan dalam pengertian ini.
- Jika diintegrasi dalam suatu batas (misalnya dari i ke f), suatu diferensial tak eksak akan menghasilkan suatu bilangan atau nilai tertentu yang mengandung arti sebagai hasil penjumlahan kuantititas-kuantitas $\cancel{d}A$ yang kecil, hingga akhirnya menjadi besar, katakanlah menjadi $A_{if.}$ Berbeda dengan diferensial eksak, hasil integrasi pada batas tertentu diferensial tak eksak tidak dapat diartikan sebagai selisih antara dua nilai fungsi, karena memang fungsinya tidak ada.

$$\int_i^f dA = A_{if} \neq A_f - A_i \neq \Delta A_{if} \qquad (1\text{-}16)$$

1.5 Hubungan Penting Antara Diferensial Parsial

Jika z=z(x,y) adalah fungsi yang *ada dan baik*, maka perubahan z akibat adanya perubahan kecil variabel x dan y dapat dinyatakan dengan :

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \qquad (1\text{-}17)$$

Sebenarnya fungsi z=z(x,y) dapat ditulis secara eksplisit x=x(y,z). Untuk fungsi yang terakhir ini, perubahan x akibat adanya perubahan kecil variabel y dan z dapat dinyatakan dengan :

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dy + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz \qquad (1\text{-}18)$$

Jika persamaan (1-18) disubstitusikan ke persamaan (1-17), maka:

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left[\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z dz + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz\right] + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy$$

$$dz = \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x\right] dy + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y dz$$

Yang berlaku untuk setiap dy dan dz. Persamaan yang terakhir ini akan terpenuji jika :

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y = 1 \text{ atau } \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y} \tag{1-19}$$

dan

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = 0$$

atau

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -1 \tag{1-20}$$

Rumus yang dinyatakan sebagai persamaan (1-20) ini sering dinamakan sebagai “Rumus –1”. Rumus ini dapat pula diubah menjadi :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y} \tag{1-21}$$

Dengan menggunakan persamaan (1-19), maka persamaan (1-21) dapat diubah lagi menjadi :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y} \tag{1-22}$$

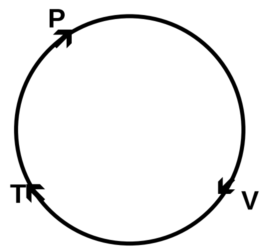
Persamaan (1-19) sampai dengan (1-22) dapat diterapkan pada sistem gas yang persamaan keadaannya dinyatakan dalam hubungan fungsional f(P,V,T) = 0, misalnya persamaan keadaan gas ideal atau persamaan keadaan gas van der walls, sebagai berikut :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} \tag{1-23}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -1 \tag{1-24}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P}{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V} \tag{1-25}$$

Persamaan (1-23) mudah diingat bila dianalogikan misalnya dengan bilangan 2/3 yang sama dengan $\frac{1}{3/2}$. Sementara itu persamaan (1-24) tampaknya lebih sulit untuk diingat. Namun dengan membayangkan bahwa ketiga variabel P, V dan T sebagai titik yang terletak pada sebuah lingkaran dengan jarak yang sama :



Gambar 1.7

Model siklus variabel P, V, T

Maka persamaan (1-24) itu mudah dituliskan, jika faktor pertama dalam kurung diruas kiri adalah $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$ (lihat gambar lingkaran diatas, setelah P, kemudian V, kemudian T). Untuk memperoleh faktor kedua, letakkan T diatas, setelah T kemudian P, kemudian V; $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$. Untuk memperoleh faktor ketiga, letakkan V diatas, ikuti dengan dengan T kemudian P; $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$, maka lengkaplah menjadi ;

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -1.$$

Untuk menuliskan persamaan (1-24), perlu diingat bahwa turunan parsial itu dipecah menjadi dua buah turunan parsial, yang pertama sebagai pembilang (numerator) dan yang kedua sebagai penyebut (denominator). Yang diturunkan baik pada pembilang maupun penyebut adalah variabel diluar kurung atau yang dianggap sebagai tetapan pada ruas kiri. Dalam persamaan (1-24) variabel yang dikurung adalah T. kemudian didiferensialkan T terhadap dua variabel lain diruas kiri secara bersilang. Jadi untuk pembilang T didiferensialkan terhadap V dan untuk penyebut T didiferensialkan terhadap P.

Dengan mengingat cara-cara seperti tersebut diatas itu, maka dari persamaan (1-23), (1-24) dan (1-25) mudah dibuat. Misalnya ;

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_v} \tag{1-26}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -1 \tag{1-27}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} \qquad (1\text{-}28)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{1}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T} \qquad (1\text{-}29)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -1 \qquad (1\text{-}30)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V}{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P} \qquad (1\text{-}31)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \frac{1}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P} \qquad (1\text{-}32)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -1 \qquad (1\text{-}33)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V} \qquad (1\text{-}34)$$

Dalam termodinamika, ketergantungan suatu variabel terntu pada variabel-variabel yang lain seringkali tak dapat dinyatakan secara eksplisit. Contoh yang jelas adalah variabel v pada persamaan keadaan Van Der Walls : $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$; dimana $v = \frac{V}{n}$ (volume per mol = volume jenis). Untuk menghitung turunan parsial dari variabel v ini harus digunakan persamaan (1-23) dan (1-24). Namun timbul pertanyaan bagaimana jika secara umum ketiga variabel itu tak dapat dibuat secara eksplisit. Persamaan (1-23) dan (1-24) jelas tak dapat digunakan . Memang sebenarnya ada cara untuk menyelesaikan persoalan seperti ini, bahkan untuk variabel yang lebih dari tiga. Akan tetapi dalam hal ini pembahasan akan dibatasi sampai dengan tiga variabel saja. Misalkan secara umum f(x,y,z) = 0. Bila didiferensialkan :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y} dz = 0$$

Jika z tidak berubah atau dz = 0, maka :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z} dx = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z} dy$$

Atau

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{z} = \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z}} \tag{1-35}$$

Dengan cara berfikir yang sama. Diperoleh :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_{y} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{y,z}}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{z,x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}}$$

Dan jika diterapkan pada sistem f(P,V,T) = 0, maka akan diperoleh :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{t} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{t,p}}{\left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_{V,T}} \tag{1-36}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{t} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)_{t,p}}{\left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_{V,T}} \tag{1-37}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{t} = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial P}\right)_{V,T}}{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{P,V}} \tag{1-38}$$

1.6 Penerapan Diferensial Parsial Pada Sistem Termodinamika

Rumus-rumus yang dibahas pada sub pokok bahasan sebelumnya dapat diterapkan pada sistem termodinamika, dan sementara itu kitapun akan berkesempatan untuk menguji kebenaran rumus-rumus tersebut.

Yang pertama kita coba terapkan pada 1 mol gas ideal yang persamaan keadaannya PV = nRT ; maka kita peroleh :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{V^2} = -\frac{P}{V} \tag{1-40}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{RT}{V^3} = -\frac{P}{V} \tag{1-41}$$

Tampak bahwa persamaan (1-40) adalah kebalikan dari persamaan (1-41). Selanjutnya kita akan mendapatkan pula bahwa :

$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{P}{V};\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \frac{V}{R}$; Sehingga : v

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \left(\frac{R}{P}\right)\left(-\frac{P}{V}\right)\left(\frac{V}{R}\right) = -1$$

Persamaan (1-23) dan (1-24) sangat berfaedah untuk menghitung turunan parsial suatu variabel yang dari persamaannya tak dapat dibuat eksplisit. Sebagai contoh kita lihat pada persamaan keadaan Van Der Walls : $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT$; dimana $v = \frac{V}{n}$; dan a, b dan R konstan. Untuk menghitung $\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$ kita perlu menhitung $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ dan $\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T$, maka persamaan keadaannya dapat diubah menjadi :

$P = \left(\frac{RT}{v-b}\right) - \frac{a}{v^2}$; maka : $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{v-b}$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3}$$

Jadi

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = -\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T} = \frac{R(v-b)}{Rv^3 - 2a(v-b)^2}$$

Akan tetapi soal ini dapat pula anda kerjakan dengan menggunakan persamaan (1-38) yang lebih umum, sebab disini variabelnya boleh eksplisit dan boleh tidak. Secara umum persamaan gas Van Der Walls dapat ditulis sebagai :

f(PV,T) = 0

Atau : $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT$

Dengan menggunakan persamaan (1-38) kita peroleh :

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{P,V}}{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_{P,TP}} = \frac{-R}{\left(P+\frac{A}{v^2}\right)+(v-b)\left(-\frac{2a}{v^3}\right)}$$

Dan disederhanakan menjadi :

$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \frac{R(v-b)v^3}{RTv^3 - 2a(v-b)^2}$ dan hasilnya sama dengan yang diperoleh dengan persamaan (1-23) dan (1-24).

1.7 Koefesien Muai Kubik Dan Kompresibilitas Isotermal

1.7.1 Koefesien Muai Kubik

Kita kembali kepada pembicaraan kita semula, bahwa termodinamika itu adalah cabang dari termofisika, yaitu ilmu yang mempelajari perilaku zat atau bahan dibawah kontrol suhu. Kita sudah mengetahui bahwa umumnya jika suatu bahan dipanaskan, maka bahan tersebut akan memuai . Sudah merupakan suatu keperluan , bahwa dalam fisika kita sering mewakilkan sifat suatu bahan dengan suatu koefisien tertentu. Untuk menyatakan mudah tidaknya suatu bahan untuk memuai, digunakan suatu koefisien yang disebut *koefisien muai kubik* , yang dilambangkan dengan huruf β . Jika kita hanya berbicara pemuaian pada tekanan konstan, maka koefisien muainya disebut *koefisien muai kubik isobarik* suatu zat, yang didefinisikan sebagai :

$$\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \qquad (1\text{-}42)$$

Untuk gas ideal : $\beta = \frac{1}{V} . \frac{R}{V} = \frac{1}{T}$

Untuk gas Van Der Walls : $\beta = \frac{1}{v}\left[\frac{Rv^3(v-b)}{RTv^3 - 2a(v-b)^3}\right] = \frac{Rv^2(v-b)}{RTv^3 - 2a(v-b)^3}$

Dari definisi diatas, jelaslah bahwa satuan β adalah K^{-1}. Bila suatu zat memiliki koefesien muai kubik 2,0x 10^{-3} K^{-1}, maka secara fisis dapat dijelaskan sebagai berikut :

Jika kita memiliki 1 m^3 zat tersebut, kemudian suhunya dinaikkan 1 K, maka volumenya akan bertambah sebesar 2,0 x 10^{-3} m^3, bila tekanan konstan.

Sekarang kita tinjau suatu sistem yang menjalani proses isobarik yang kecil, artinya bahwa keadaan akhir sistem hanya berbeda sedikit dari keadaan awalnya. Misalkan keadaan awalnya ditentukan oleh suhu T dan volume V dan keadaan akhirnya ditentukan oleh suhu T+dT dan volume V+dV, dan keduanya berlangsung pada tekanan yang sama. Maka koefesien muai kubik dapat ditulis sebagai :

$$\beta = \frac{1}{V}\frac{dV_P}{dT_P} = \frac{\frac{dV_P}{V}}{dT_P} \qquad (1\text{-}43)$$

Ini berarti bahwa koefesien muai kubik dapat dinyatakan sebagai nilai limit dari perubahan volume fraksional $\frac{dV_P}{V}$ persatuan perubahan suhu pada tekanan tetap. Koefesien muai kubik rata-rata $\ddot{\beta}$ dalam selang suhu antara T_1 dan T_2 didefinisikan sebagai :

$$\ddot{\beta} = \frac{\frac{V_2 - V_1}{V_1}}{T_2 - T_1} = \frac{1}{V_1}\frac{\Delta V_P}{\Delta T_P} \tag{1-44}$$

Pada umumnya koefisien muai kubik adalah fungsi dari *suhu dan tekanan*. Ternyata koefisien ini mendekati nol ketika suhunya mendekati 0 K. Hal ini telah diperlihatkan oleh beberapa logam; seperti tembaga dan lain-lain. Juga telah diketahui bahwa koefesien muai kubik untuk raksa berubah terhadap tekanan pada suhu tetap 0^0 C. namun perubahan ini kecil sekali, walaupun tekanan diperbesar hingga 7000 atm.

Pada umumnya semua bahan akan memuai jika suhunya naik, kecuali air murni. Pada suhu 4^0 C, air murni mempunyai massa jenis maksimum atau volumenya minimum. Dalam selang suhu 0^0 C sampai 4^0C volumenya menurun dengan kenaikan suhu, sehingga koefisien muai kubiknya negatif . Inilah keanehan air murni, yang sering disebut sebagai *anomali air.* Jika kita renungkan lebih dalam, anomali air merupakan anugerah Allah Yang Maha Besar yang sangat luar biasa. Coba anda perhatikan sebuah danau yang di dalamnya begitu banyak macam satwa air yang hidup. Misalkan tiba-tiba pada tekanan 1 atm, terjadi penurunan suhu di atas permukaan danau. Maka air yang ada di atas permukaan danau membeku menjadi es . Mengapa pembekuan itu hanya terjadi di permukaan danau saja ? Inilah anomali air. Pada waktu suhu permukaan air menurun dari 4^0C sampao 0^0C, maka suhu air yang ada di atas permukaan danau akan menurun pula. Penurunan suhu air ini akan diikuti oleh peningkatan volume air yang ada di atas permukaan danau. Peningkatan volume air berarti penurunan massa jenis air. Sehingga air yang ada di atas permukaan danau akan membeku menjadi es ,disertai dengan penurunan massa jenisnya. Dengan demikian bongkahan es itu akan memiliki massa jenis yang lebih kecil dibandingkan dengan massa jenis air yang ada dibawahnya. Sehingga es akan tetap mengapung di permukaan. Bayangkan oleh anda jika massa jenis es lebih besar daripada massa jenis air yang ada dibawahnya (dalam arti tidak ada yang namanya anomali air), maka es akan tenggelam, dan mendesak air yang ada dibawahnya ke atas. Air yang ada diatas permukaan danau akan membeku dan tenggelam lagi, begitu seterusnya, maka seluruh danau akan menjadi es, sehingga semua satwa air akan mati. Dengan anomali air, seluruh satwa air di dalam danau tetap hidup. *Subhanallah, Allahu Akbar, Maha Suci Allah dan Maha Besar*. Sungguh Allah menciptakan sesuatu itu tidak ada yang sia-sia.

1.7.2 Kompresibilitas Isotermal

Jika koefisien muai kubik isobarik itu adalah suatu bilangan yang menyatakan mudah tidaknya volume suatu bahan untuk berubah terhadap suhu, maka untuk menyatakan mudah tidaknya perubahan volume suatu bahan terhadap tekanan pada suhu tetap digunakan istilah *kompresibilitas isotermal*. Komprebilitas isotermal suatu zat (k) didefinisikan sebagai :

$$k = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \tag{1-45}$$

Tanda negatif pada persamaan (1-45) dimaksudkan agar k bernilai positif, karena harga $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)$ selalu berharga negatif. Jika ΔP bernilai positif, maka ΔV akan bernilai negatif , dan sebaliknya. Satuan k dalam SI adalah Pa^{-1}.

Sekarang kita terapkan persamaan (1-45) pada 1 mol gas ideal. PV = nRT atau $V = \frac{RT}{P}$ maka : $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -\frac{RT}{P^2}$ atau $k = -\frac{1}{V}\left(-\frac{RT}{P^2}\right) = \frac{1}{P}$ (Komprebilitas isotermal gas ideal)

Komprebilitas rata-rata didefinisikan sebagai :

$$\bar{k} = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V_T}{\Delta P_T} \tag{1-46}$$

Kita juga dapat menentukan komprebilitas untuk persamaan keadaan gas Van Der Walls :

$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$; disini v tak dapat dieksplisitkan; oleh karena itu untuk mencari $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ kita gunakan persamaan (1-23) dan (1-24) dan hasilnya adalah :

$$k = \frac{v^2(v-b)^2}{RTv^3 - 2a(v-b)^2} \tag{1-47}$$

Untuk zat cair dan zat padat, koefesien muai kubik (β) dan komprebilitas (k) tidak dapat ditentukan dari persamaan keadaannya, tetapi harus dicari melalui eksperimen. Dari eksperimen ditemukan bahwa komprebilitas dan koefesien muai kubik untuk zat cair dan zat padat keduanya adalah fungsi dari *tekanan* dan *suhu*. Hal ini dapat dinyatakan sebagai : $\beta = \beta(P,T)$ dan k = k(P,T).

Perubahan volume zat cair dan zat padat sangat kecil bila suhu dan tekanan berubah, oleh karena itu secara pendekatan V dapat dianggap konstan.

Sekarang cobalah tinjau suatu sistem f(P,V,T) = 0; dan secara eksplisit dapat ditulis V = V(P,T) dan diferensial totalnya adalah :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T dP \tag{1-48}$$

Menurut definisi $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ dan $k = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$, atau

$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \beta V$ dan $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -kV$; Jika kedua persamaan terakhir ini disubstitusikan ke persamaan (1-48) maka diperoleh :

$dV = \beta\, V\, dT - kVdP$

Jika diintegralkan dari suatu keadaan (P_0,V_0,T_0) ke keadaan lain (P,V,T) maka diperoleh :

$$\int_{V_0}^{V} dV = V - V_0 = \int_{T_0}^{T} \beta V\, dT - \int_{P_0}^{P} kV\, dP \qquad (1\text{-}49)$$

Dengan mengukur β dan k dari eksperimen, maka kita akan dapat menentukan persamaan keadaan zat cair dan zat padat secara pendekatan.

Sebelum anda mengakhiri sub pokok bahasan (1.7.2), cobalah anda tafsirkan makna dari k berikut ini. Misalkan suatu zat memiliki komprebilitas (k = 3,0 x 10^{-6} Pa^{-1}). Apa arti fisis dari zat tersebut ? Misalkan anda mempunyai dua zat, sebut saja zat 1 dan zat 2. Jika zat 1 mempunyai kompresibilitas isotermal k_1 = 3,5 x 10^{-6} Pa^{-1} dan zat 2 mempunyai kompresibilitas isotermal k_2=4,5x10^{-6} Pa^{-1}. Menurut anda zat mana yang mudah untuk dikompressi? Jelaskan!

Diakhir bab I ini anda diminta untuk menyelesaikan beberapa soal latihan, tetapi sebelum itu anda coba contoh-contoh soal berikut ini :

Contoh (1-5) : Diketahui sebuah fungsi $(x+y)^2 - az = 0$; dimana a adalah tetapan.

a) Ada berapa buah diferensial parsial yang mungkin pada fungsi tersebut?
b) Ada berapa buah diferensial total yang mungkin dari fungsi tersebut ?
c) Apakah $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$?
d) Apakah $\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial y}$?

Pembahasan : a). Secara umum fungsi $(x+y)^2 - az = 0$; dapat ditulis sebagai f(x,y,z) = 0 ; fungsi tersebut dapat ditulis secara eksplisit dalam bentuk : z = z(x,y) atau x = x(y,z) atau y = y(x,z); Sehingga :

Dari z=z(x,y) akan diperoleh 2 diferensial parsial, yaitu : $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ dan $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$

Dari x=x(y,z) akan diperoleh 2 diferensial parsial, yaitu : $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ dan $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y$

Dari y = y(x,z) akan diperoleh 2 diferensial parsial, yaitu : $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ dan $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$

Jadi semuanya terdapat 6 buah diferensial parsial, yaitu : $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$; $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$; $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$; $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y$; $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$; dan $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$

b). Dari fungsi $(x+y)^2 - az = 0$; atau secara umum f(x,y,z) = 0; jika fungsi f(x,y,z) = 0 ditulis menjadi z = z(x,y) atau x = x(y,z) atau y = y(x,z); akan diperoleh 3 diferensial total, yaitu :

Dari z = z(x,y) akan diperoleh dz = $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$ dx + $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ dy ;

Dari x = x(y,z) akan diperoleh dx = $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ dy + $\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y$ dz ;

Dari y = y(x,z) akan diperoleh dy = $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z$ dx + $\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x$ dz ;

c). Untuk membuktikan bahwa : $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; dapat ditempuh dengan tiga cara :

Pertama, bisa dikerjakan secara implisit sebagai berikut :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_x \left[(x+y)^2 - az\right] = 0 \rightarrow 2(x+y) - a\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = 0$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = \frac{2(x+y)}{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2(x+y)}{a}\right) = \frac{2}{a}$$

Jadi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2}{a}$$

Cara kedua adalah sebagai berikut :

$$(x+y)^2 - az = 0$$

$$x^2 + 2xy + y^2 - az = 0$$

$$2xdx + 2x\,dy + 2y\,dx + 2y\,dy - adz = 0$$

Untuk x konstan $\rightarrow$ dx = 0 $\rightarrow$ $2(x+y)dy = a\,dz$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = \frac{2(x+y)}{a}$$

anggap : $\dfrac{2(x+y)}{a} = f \;\; \rightarrow \left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \ldots ?$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2(x+y)}{a}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{2}{a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_y \left[(x+y)^2 - az\right] = 0 \rightarrow 2(x+y) - a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = 0$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{2(x+y)}{a} \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2}{a}$$

Cara ketiga adalah sebagai berikut :

$$2x\,dx + 2x\,dy + 2y\,dx + 2y\,dy - a\,dz = 0$$

Untuk y konstan $\rightarrow$ dy = 0 :

$$(2x + 2y)dx = a\,dz$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{2(x+y)}{a}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{2}{a}$$

Jadi : $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{2}{a}$

Untuk mengakhiri Bab I ini, kerjakan semua soal berikut ini :

1. Untuk zat Paramagnetik berlaku persamaan M = C(B/T) ;
   dimana,
   M = Magnetisasi Sistem
   B = Induksi Magnetik
   T = Suhu sistem paramagnetik
   C = Tetapan

   a. Rumuskan ungkapan yang menggambarkan perubahan kemagnetan sistem apabila suhu dan induksi magnetik berubah !
   b. Tuliskan satuan M,B dan C dalam SI !

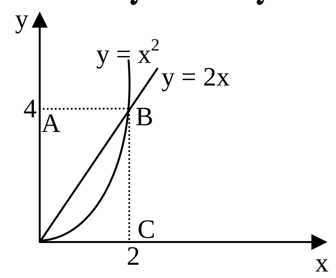
2. Untuk sistem berupa kristal dielektrik (zat isolator) berlaku persamaan P = (a+b/T)E ;
   dimana
   P = Polarisasi listrik sistem
   E = Kuat medan listrik
   a dan b = konstan

   a. Rumuskan ungkapan yang menggambarkan perubahan polarisasi listrik sistem jika suhu dan kuat medan listrik kembali !
   b. Tuliskan satuan P, E dan a dalam SI !

3. Ujilah semua diferensial total dibawah ini, apakah eksak atau tak eksak. Jika eksak tentukanlah fungsi-fungsinya dengan menggunakan teknik integrasi
   a. dz = ydx + xdy
   b. dz = ydx - xdy
   c. dx = ydy + zdz
   d. dx = ydy - zdz
   e. dy = z dx
   f. dy = 2(x+z)dx + 2 (x+z)dz
   g. dz = ydx + (x+2y)dy
   h. dz = xdx + (x+2y)dy

4. Diketahui bahwa dA = y dx - x dy , dB = xdx - y dy.

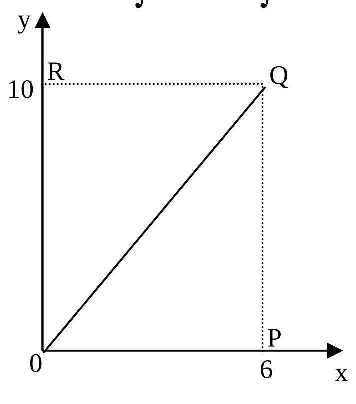
   Hitunglah $\int dA$ dan $\int dB$ melalui jalan integrasi sebagai berikut :



   a. Jalan OAB
   b. Jalan OCB
   c. Jalan OB melalui y = x^2
   d. Jalan OB melalui y = 2x

5. Diketahui bahwa dz = 2xydx + xdy ; xy (dx + 2dy).

   Hitunglah $\int dZ$ dan $\int dA$ melalui jalan integrasi sebagai berikut :



   a. Jalan OPQ
   b. Jalan ORQ
   c. Jalan OQ melalui garis lurus OQ

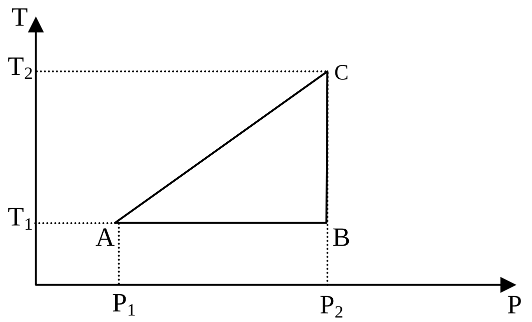
6. Besaran fisis yang penting untuk sautu gas adalah koefesien muai kubiknya $\beta = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$.

   Tentukanlah β untuk gas dengan persamaan :
   a. P(V-b) = RT
   b. $\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$

7. a. Buktikan bahwa : $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\beta}{k}$

   b. Tunjukkan bahwa untuk persamaan keadaan gas Van der Walls : $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{\beta}{k} = \frac{R}{(v-b)}$

8. Bila volume V adalah salah satu variabel di dalam sistem P-V-T gas ideal, buktikanlah bahwa integral dV dari keadaan A ke keadaan B melalui dua ajalan yang berbeda, yaitu jalan AB dan jalan ACB memberikan hasil yang sama :



9. Buktikan bahwa koefesien muai kubik β suatu zat pada tisotrop sama dengan tiga kali koefesien muai liniernya.
10. Persamaan suatu gas dinyatakan : P(V-b) = RT. Buktikan bahwa :

   a. $\beta = \frac{V-b}{VT}$

   b. $k = \frac{(V-b)^2}{RTV}$

11. Buktikan bahwa : $\left(\frac{\partial \beta}{\partial P}\right)_P = -\left(\frac{\partial k}{\partial T}\right)_P$

12. Persamaan keadaan dielektrik dinyatakan : $P(v-b)e^{\frac{a}{VRT}} = RT$ dimana a dan b adalah konstanta
    a. Tentukan koefesien muai kubik β untuk zat yang memenuhi persamaan tersebut diatas !
    b. Tunjukkanlah bahwa untuk temperatur dan volume yang besar, koefesien muai kubik ini sama dengan untuk gas ideal

13. Sama dengan soal no. 12), jika pada titik kritis berlaku :

    $$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{Tc} = \left(\frac{\partial P}{\partial V^2}\right)_{Tc} = 0$$

    Buktikan bahwa konstanta kritis dan zat yang memenuhi persamaan keadaan Dietevici diatas adalah :

    $$Pc \ \frac{a}{4e^2b^2}$$

    $$Vc = 2b$$

    $$Tc = \frac{a}{4Rb}$$