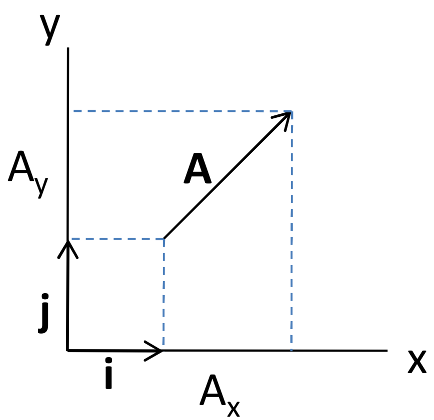
Bahan Ajar

Matematika Fisika II

1. Vektor dan Analisis Vektor
2. Deret Takhingga dan Deret Pangkat
3. Persamaan Diferensial Biasa

VEKTOR DAN ANALISIS VEKTOR

1. Vektor



Notasi

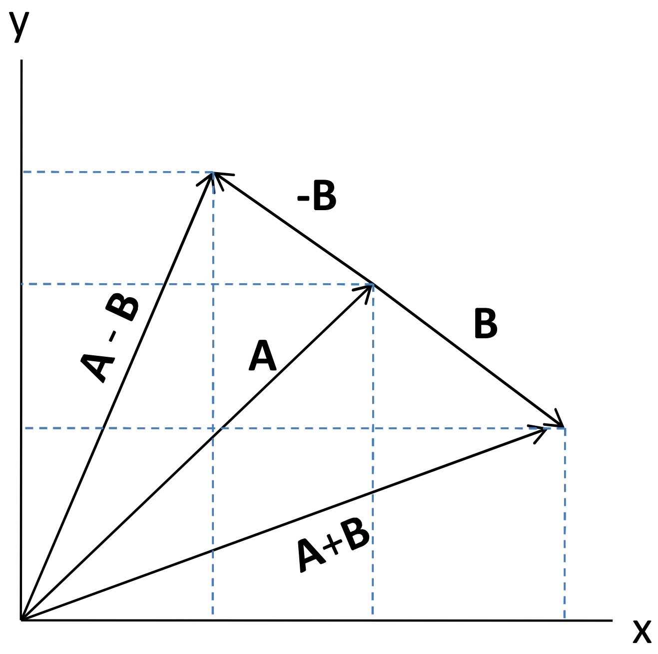
$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j}$ dalam dua dimensi

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

$\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}$ dalam tiga dimensi

$$|\boldsymbol{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Penjumlahan Vektor



Jika Vektor $\mathbf{A} = A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j}$

$\mathbf{B} = B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j}$

Maka ,

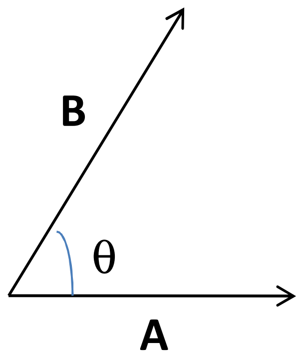
$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j}$

$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x)\mathbf{i} + (A_y - B_y)\mathbf{j}$

Perkalian Vektor

Terdapat dua jenis perkalian dua vektor yaitu, yang pertama disebut *dot product* yang akan menghasilkan skalar, yang kedua disebut *cross product yang akan menghasilkan vektor*

Dot Product merupakan perkalian titik antara vektor **A** *dan* **B** (ditulis **A.B**) yang akan sama dengan besar vektor **A** dikali besar vektor **B** dikali kosinus dari sudut yang dibentuk oleh vektor **A** dan vektor **B**.



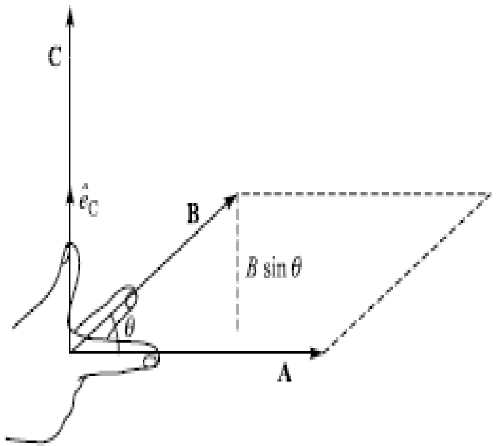
$$\mathbf{A.B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \cos\theta$$

$$\mathbf{A.B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\mathbf{A.B} = \mathbf{B.A}$$

Cross product merupakan perkalian silang (cross) antara vektor **A** *dan* **B** *yang akan menghasilkan vektor baru* **C** yang besarnya sama dengan besar vektor **A** *dikali besar vektor* ***B*** *dikali Sinus dari sudut yang dibentuk vektor* **A** *dan* **B**

C = A X B



A X B = **C**

$|\mathbf{C}| = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\text{Sin }\theta$

$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_x\,\mathbf{i} + A_y\,\mathbf{j} + A_z\,\mathbf{k}) \times (B_x\,\mathbf{i} + B_y\,\mathbf{j} + B_z\,\mathbf{k})$

$= \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x)$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

A X B = **- B X A**

Triple Scalar Product merupakan perkalian tiga buah vektor yang akan menghasilkan prodak skalar yang dirumuskan sbb:

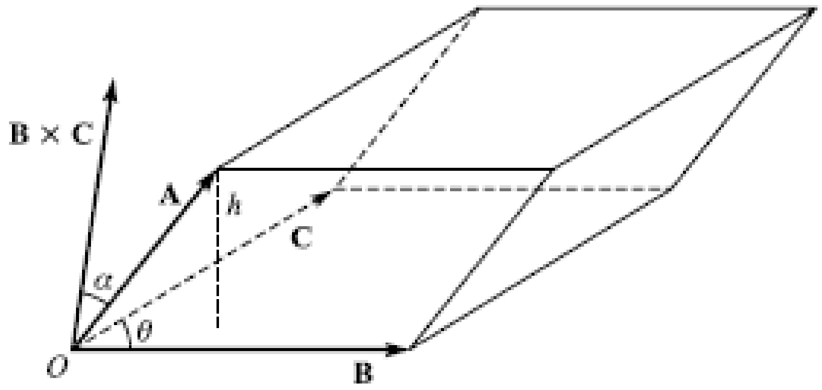
$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (A_1\hat{e}_1 + A_2\hat{e}_2 + A_3\hat{e}_3)\cdot\begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1)$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$$

Dengan menggunakan interpretasi geometri ternyata perkalian *triple scalar product* tersebut akan sama dengan volume bangun gambar berikut :



$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = ABC \sin\theta \cos\alpha = hS = \text{volume},$$

Sedangkan perkalian *triple vector product* akan menghasilkan vektor

A X (B X C) = (A . C)B – (A . B)C

2. Analisis Vektor

Diferensiasi Vektor

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} = \boldsymbol{i}\frac{dAx}{dt} + \boldsymbol{j}\frac{dAy}{dt} + \boldsymbol{k}\frac{dAz}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(A.B) = \boldsymbol{A}.\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}.\boldsymbol{B}$$

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{A}\ X\ \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\ X\frac{d\boldsymbol{B}}{dt} + \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}X\ \boldsymbol{B}$$

Operator Vektor

Simbol dari operator vektor adalah ∇ (baca “nabla”) yang dirumuskan :

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial x}$$

bila diketahui vektor **A** = A_x **i** + A_y **j** + A_z **k** **,** maka perkalian titik operator nabla dengan vektor **A** **d**inamakan divergensi A:

$$\text{divergensi A} = \nabla.\boldsymbol{A} = \frac{\partial Ax}{\partial x} + \frac{\partial Ay}{\partial x} + \frac{\partial Az}{\partial x}$$

Perkalian silang (X) antara operator nabla dengan vektor A dinamakan Curl A

$$\nabla X \boldsymbol{A} = \boldsymbol{Curl\ A}$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial Az}{\partial y} - \frac{\partial Ay}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial Ax}{\partial z} - \frac{\partial Az}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial Ay}{\partial x} - \frac{\partial Ax}{\partial y}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ Ax & Ay & Az \end{vmatrix}$$

Teorema Green's

$$\iint_A \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial x}\right) dxdy = \oint_{\partial A} Pdx + Qdy$$

Teorema Divergensi

$$\iiint div\, \boldsymbol{A}\, d\tau = \iint \boldsymbol{A}.\boldsymbol{n} d\sigma$$

Teorema Stokes

$$\iint (Curl\, \boldsymbol{A}).\boldsymbol{n} d\sigma = \int \boldsymbol{A}.d\boldsymbol{r}$$

DERET TAKHINGGA DAN DERET PANGKAT

Deret Takhingga

$$\lim_{n \to \infty} S_n = S$$

Jika jumlah parsial Sn dari deret takhingga mengarah ke harga limit S maka deret tersebut disebut deret konvergen, sedangkan selain itu deret tersebut adalah deret divergen

Uji konvergensi

1. Uji awal ; Jika $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ maka deret adalh divergen,

   tetapi jika $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ maka harus diuji dengan uji lain

2. Uji perbandingan

a. Jika $m1+m2+m3+m4+\dots$ Adalah deret konvergen ,
Maka deret $a1+a2+a3+a4+\dots$ Konvergen jika $|a_n| \leq m_n$

b. Jika $m1+m2+m3+m4+\dots$ adalah deret divergen,
maka deret $a1+a2+a3+a4+\dots$ Divergen jika $|a_n| \geq m_n$

3. Uji Integral

Kita dapat menggunakan uji integral jika bentuk deret adalah positif dan tidak membesar artinya $a_{n+1} \leq a_n$

Jika $0 < a_{n+1} < a_n$ dan jika $\int a_n \, dn$ sama dengan berhingga maka deret adalah konvergen, dan jika tak berhingga maka deret adalah divergen

4. Uji Nisbah

$$\rho_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \rho_n$$

$$Jika \begin{cases} \rho < 1, Deret\ konvergen \\ \rho = 1, uji\ deret\ gagal \\ \rho > 1, Deret\ divergen \end{cases}$$

5. Uji Perbandingan khusus

a. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ adalah deret konvergen bentuk positif, jika $a_n \geq 0$ dan

an/bn berhingga maka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ akan konvergen

b. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ adalah deret divergen bentuk positif , jika $b_n \geq 0$ dan

bn/an berharga lebih besar dari nol atau mengarah pada takhingga maka deret bn adalah divergen

6. Deret selang-seling

Sebuah deret selang-seling dikatakan konvergen jika

$|a_{n+1}| \leq |a_n|$ dan $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$