Talk less......
do more................!!!!!

CALCULUS VEKTOR

Diferensiasi fungsi VEKTOR
Integrasi fungsi Vektor

Diferensiasi fungsi VEKTOR

Diferensiasi Biasa dari fungsi vektor

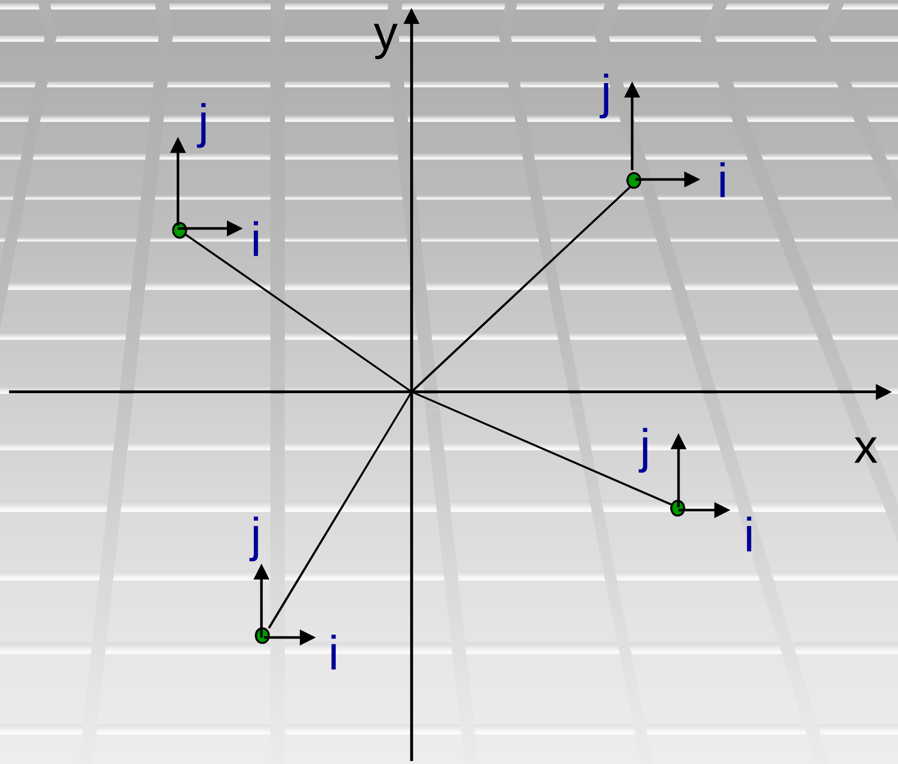
Jika $\vec{r} = xi + yj + zk$

Dan $x = x(u);\ \ y = y(u);\ \ dan\ \ z = z(u)$

Dimana u adalah suatu skalar, maka diferensiasi **r** terhadap u :

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{dx}{du}i + x\frac{di}{du} + \frac{dy}{du}j + y\frac{dj}{du} + \frac{dz}{du}k + z\frac{dk}{du}$$

Sistem koordinat Kartesian (x,y)



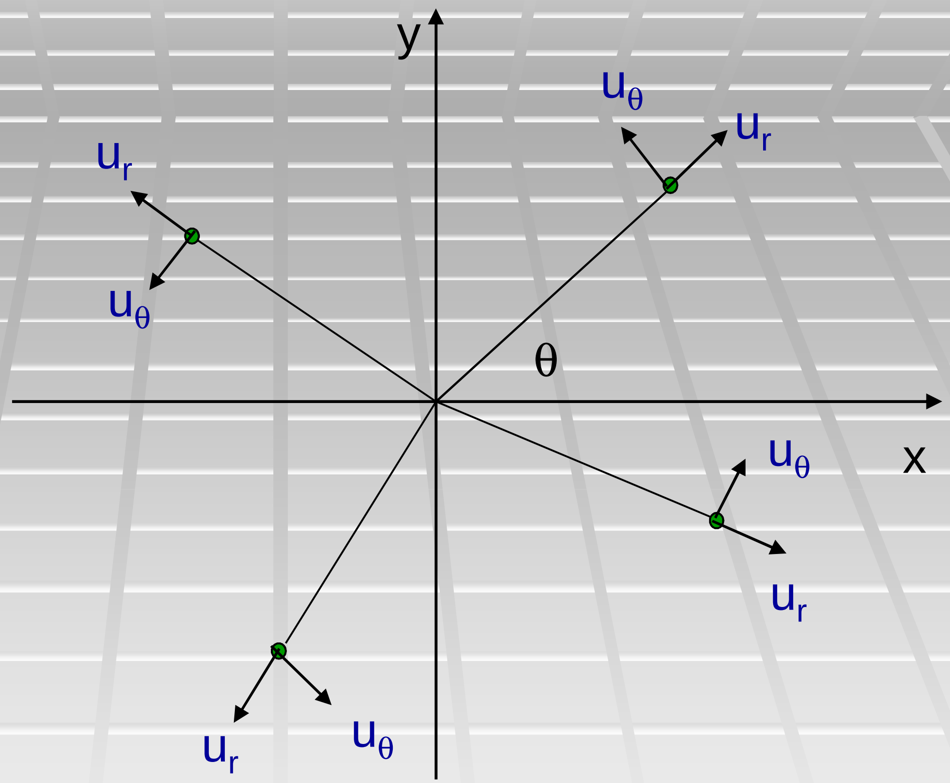
Vektor satuan arah sumbu x dan arah sumbu y selalu tetap kapan pun dimana pun, tidak bergantung posisi dan waktu

Tapi karena i, j, dan k dalam sistem koordinat kartesian adalah konstan tidak bergantung posisi dan waktu, maka diferensiasi dari r terhadap u (biasanya variabel ruang) menjadi :

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{dx}{du} i + x \cancelto{0}{\frac{di}{du}} + \frac{dy}{du} j + y \cancelto{0}{\frac{dj}{du}} + \frac{dz}{du} k + z \cancelto{0}{\frac{dk}{du}}$$

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \frac{dx}{du} i + \frac{dy}{du} j + \frac{dz}{du} k$$

Sistem koordinat Polar (r,θ)



Vektor satuan arah r dan arah θ tidak tetap bergantung posisi

Rumus-rumus diferensiasi fungsi vektor yang lain :

Jika A, B, dan C adalah fungsi-fungsi vektor dari sebuah skalar u yang diferensiabel, maka :

$$1.\ \frac{d}{du}\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{du}+\frac{d\vec{B}}{du}$$

$$2.\ \frac{d}{du}\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)=\vec{A}\bullet\frac{d\vec{B}}{du}+\frac{d\vec{A}}{du}\bullet B$$

$$3.\ \frac{d}{du}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du}+\frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}$$

$$4.\ \frac{d}{du}\left(\phi\vec{A}\right)=\phi\frac{d\vec{A}}{du}+\frac{d\phi}{du}\vec{A}$$

$$5.\ \frac{d}{du}\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{A}\bullet\left(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{du}\right)+\vec{A}\bullet\left(\frac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C}\right)+\frac{d\vec{A}}{du}\bullet\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$$

$$6.\ \frac{d}{du}\left(\vec{A}\times\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{A}\times(\vec{B}\times\frac{d\vec{C}}{du})+\vec{A}\times(\frac{d\vec{B}}{du}\times\vec{C})+\frac{d\vec{A}}{du}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$$

Diferensial Parsial dari fungsi vektor

Jika **A** adalah sebuah vektor yang bergantung pada lebih dari satu variabel skalar, misalkan x, y, z, maka kita tuliskan **A** = **A**(x,y,z).

Maka A dapat diturunkan secara parsial terhadap x, terhadap y, atau terhadap z, dengan menganggap veriabel bebas lainnya konstan.

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \left.\frac{\partial A}{\partial x}\right|_{y,z=konstan} \qquad \frac{\partial A}{\partial y} = \left.\frac{\partial A}{\partial y}\right|_{x,z=konstan}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \left.\frac{\partial A}{\partial z}\right|_{x,y=konstan}$$

Diferensiasi-diferensiasi yang lebih tinggi dapat didefinisikan seperti dalam kalkulus, sbb :

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\right) \qquad \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^3 \vec{A}}{\partial x \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\right)\right]$$

Apakah $\boxed{\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y \partial x}}$???

Jika A memiliki sekurang-kurangnya diferensiasi-diferensiasi parsial orde kedua yang kontinyu (fungsi vektor berkelakuan baik), maka

$$\boxed{\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y \partial x}}$$

Aturan-aturan untuk diferensiasi parsial dari fungsi-fungsi vektor mirip dengan yang dipergunakan dalam kalkulus dasar dari fungsi-fungsi skalar. Jadi jika A dan B adalah fungsi-fungsi dari x, y, z, maka :

$$1.\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)=\vec{A}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\bullet\vec{B}$$

$$2.\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{A}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial x}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial x}\times\vec{B}$$

$$3.\ \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\vec{A}\bullet\vec{B}\right)\right\}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\vec{A}\bullet\frac{\partial\vec{B}}{\partial y}+\frac{\partial\vec{A}}{\partial y}\bullet\vec{B}\right\}$$

Diferensial dari vektor-vektor

Mengikuti aturan-aturan yang mirip dengan yang dari kalkulus dasar, seperti :

$$1.\ Jika\ \vec{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k, \quad maka \quad d\vec{A} = dA_1 i + dA_2 j + dA_3 k$$

$$2.\ d\left(\vec{A} \bullet \vec{B}\right) = \vec{A} \bullet d\vec{B} + d\vec{A} \bullet \vec{B}$$

$$3.\ d\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \vec{A} \times d\vec{B} + d\vec{A} \times \vec{B}$$

$$4.\ Jika\ \vec{A} = \vec{A}(x, y, z),$$

$$maka \quad d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} dz$$

Contoh soal

Sebuah partikel bergerak sepanjang kurva : $x=2t^2,\ y=t^2-4t,\ z=3t-5$

dimana t adalah variabel waktu. Tentukan komponen kecepatan dan percepatan pada saat t=1 dalam arah vektor A = i – 3j + 2k

Jawab

Kecepatan didefinisikan sebagai laju perubahan posisi terhadap waktu, ditulis :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Dari soal diketahui : $\vec{r} = 2t^2 i + \left(t^2 - 4t\right) j + \left(3t - 5\right) k$

Maka : $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\{2t^2 i + \left(t^2 - 4t\right) j + \left(3t - 5\right) k\}$

Contoh soal

$$\vec{v} = 4t\,i + (2t-4)\,j + 3k$$

Pada t = 1,

$$\vec{v} = 4i - 2j + 3k$$

Komponen kecepatan dalam arah vektor **A** adalah proyeksi dari **v** terhadap **u** dimana **u** adalah vektor satuan arah **A**

$$Komponen = \vec{v} \bullet \hat{u}$$

$$\hat{u} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{i-3j+2k}{\sqrt{1+9+4}} = \frac{i-3j+2k}{\sqrt{14}}$$

Contoh soal

Komponen kecepatan dalam arah vekor **A** adalah

$$\vec{v} \bullet u = (4i - 2j + 3k) \bullet \left(\frac{i - 3j + 2k}{\sqrt{14}} \right) = \frac{16}{\sqrt{14}}$$

Percepatan didefinisikan sebagai laju perubahan kecepatan terhadap waktu, ditulis :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Sebelumnya didapat $\vec{v} = 4t\,i + (2t - 4)\,j + 3k$

maka $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\{4t\,i + (2t - 4)\,j + 3k\}$

Contoh soal

$$\vec{a} = 4i + 2j$$

Pada t = 1,

$$\vec{a} = 4i + 2j$$

Komponen percepatan dalam arah vektor **A** adalah proyeksi dari **a** terhadap **u** dimana **u** adalah vektor satuan arah **A**

$$Komponen = \vec{a} \bullet \hat{u}$$

Komponen percepatan dalam arah vekor **A** adalah

$$\vec{a} \bullet \hat{u} = (4i + 2j) \bullet \left(\frac{i - 3j + 2k}{\sqrt{14}} \right) = \frac{-2}{\sqrt{14}}$$

Soal Latihan

Jika $\vec{A} = \left(2x^2 y - x^4\right)i + \left(e^{xy} - y \sin x\right)j + \left(x^2 \cos y\right)k,$

Tentukan : $\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial x}, \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y \partial x}$

Apakah **A** berkelakuan baik ?

Tugas PR

Vektor kedudukan dari sebuah partikel yang bergerak diberikan oleh:

$$\vec{r} = \cos \omega t\, i + \sin \omega t\ j$$

dimana ω konstan. Buktikan bahwa :

a. Kecepatan **v** dari partikel tegak lurus **r**

b. Percepatan **a** arahnya menuju titik asal dan besarnya sebanding dengan jarak ke titik asal

c. **r** x **v** = vektor konstan

Operator Diferensial Vektor

Lambang : ∇

Baca : “del” atau Nabla

Definisi :

$$\nabla \equiv i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

Operator vektor ini memiliki sifat-sifat yang analog dengan vektor-vektor biasa, bermanfaat untuk mendefinisikan tiga buah besaran berikut yang sering muncul dalam pemakaian praktis termasuk dalam Fisika yang dikenal sebagai **Gradien**, **Divergensi**, dan **Curl.**

Gradien

Misalkan ϕ (x,y,z) adalah suatu fungsi skalar yang terdefinisikan dan diferensiabel pada titik-titik (x,y,z) dalam suatu daerah tertentu dalam ruang, maka :

Gradien ϕ atau Grad ϕ atau ditulis $\nabla\phi$ didefinisikan sebagai :

$$\nabla\phi = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right)\phi = i\frac{\partial\phi}{\partial x} + j\frac{\partial\phi}{\partial y} + k\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Perhatikan bahwa $\nabla\phi$ merupakan suatu fungsi vektor

Komponen dari $\nabla\phi$ dalam arah sebuah vektor satuan **a**, diberikan oleh :

$$\nabla\phi \bullet \hat{a}$$

Disebut " Directional derivative" atau "Turunan Berarah" dari ϕ dalam arah **a.** Secara fisis memiliki pengertian laju perubahan kuantitas fisika ϕ pada (x,y,z) dalam arah **a,** dan ditulis :

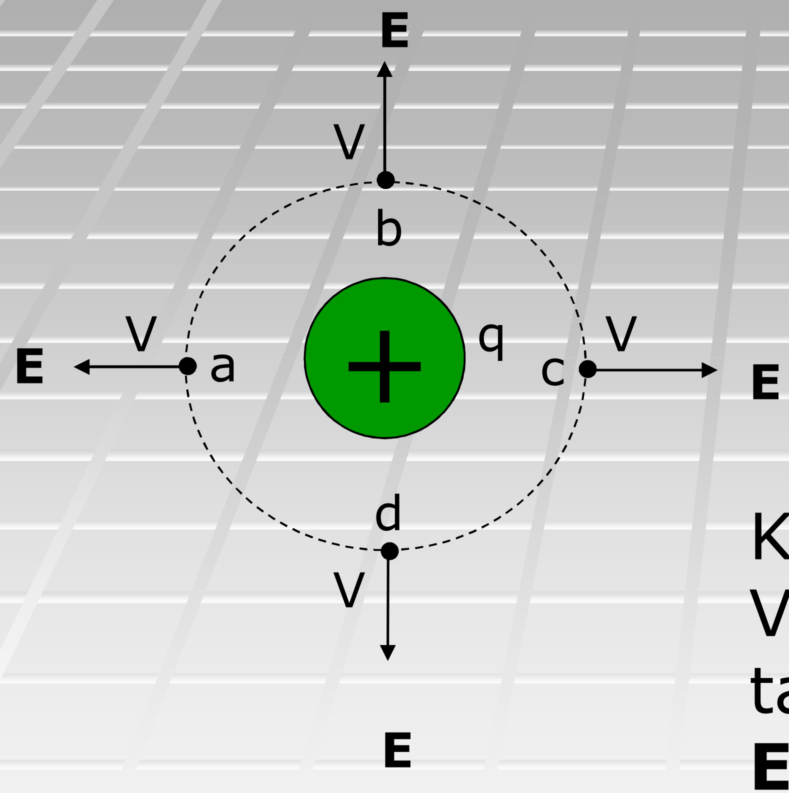
$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi \bullet \hat{a}$$

Turunan Berarah

Contoh kuantitas fisis yang tergolong medan skalar (ϕ) adalah potensial listrik (V), temperatur (T) dan potensial gravitasi (Ep)

$$\frac{dT}{ds} = \nabla T \bullet \hat{a}$$

Medan Listrik dan Potensial listrik



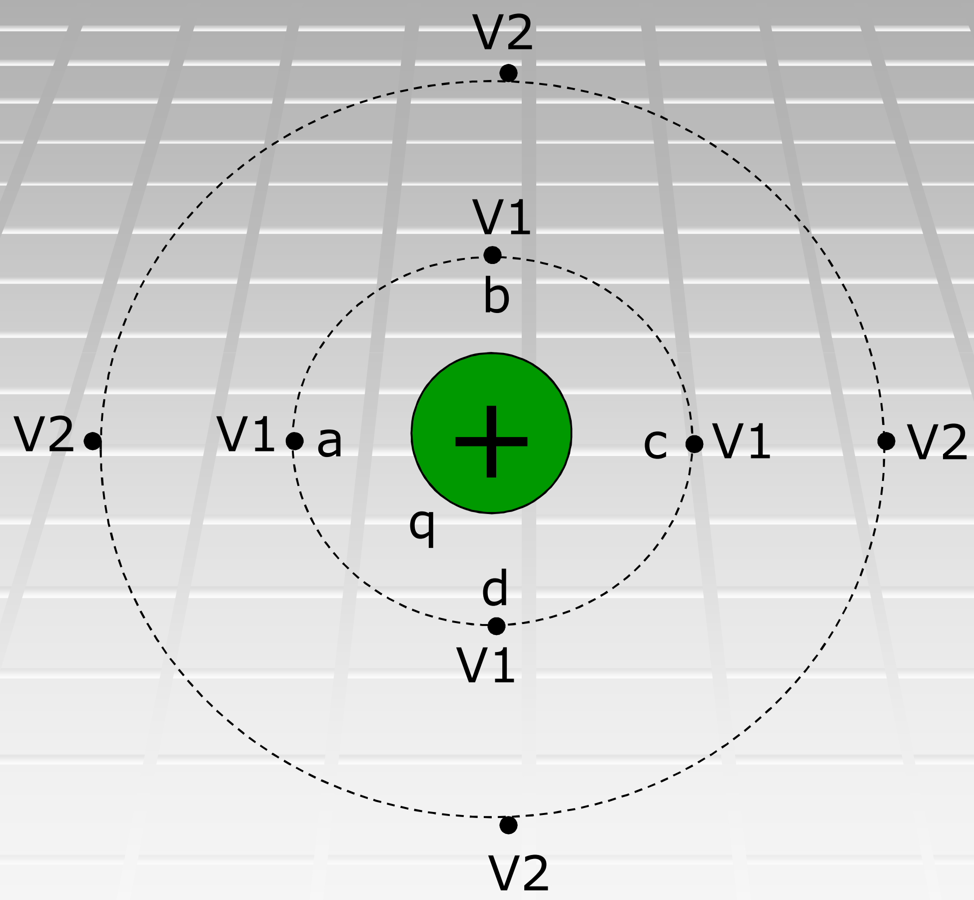
$$\mathbf{E} = \frac{kq}{r^2}\hat{r}$$

$$V = \frac{kq}{r}$$

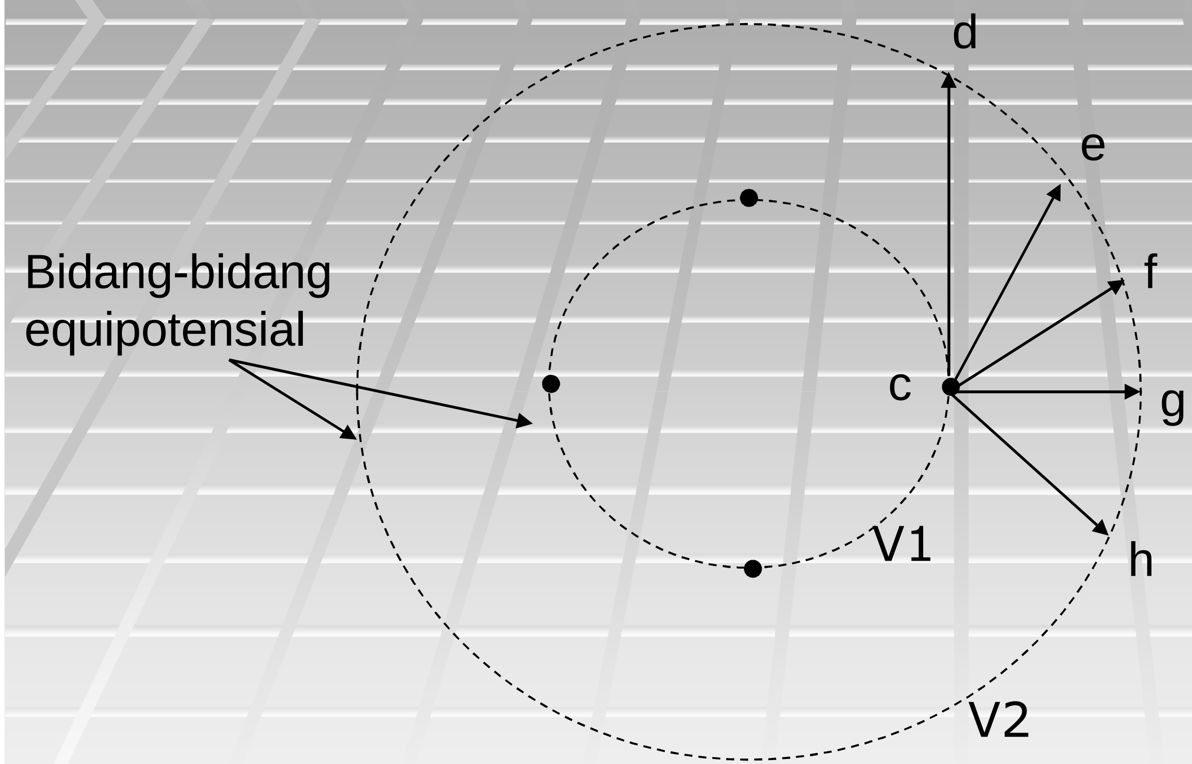
Karena r yang sama, maka
Va = Vb = Vc = Vd
tapi
Ea ≠ **E**b ≠ **E**c ≠ **E**d

$$|\mathbf{E}_a| = |\mathbf{E}_b| = |\mathbf{E}_c| = |\mathbf{E}_d|$$

Medan Listrik dan Potensial listrik



Medan Listrik dan Potensial listrik

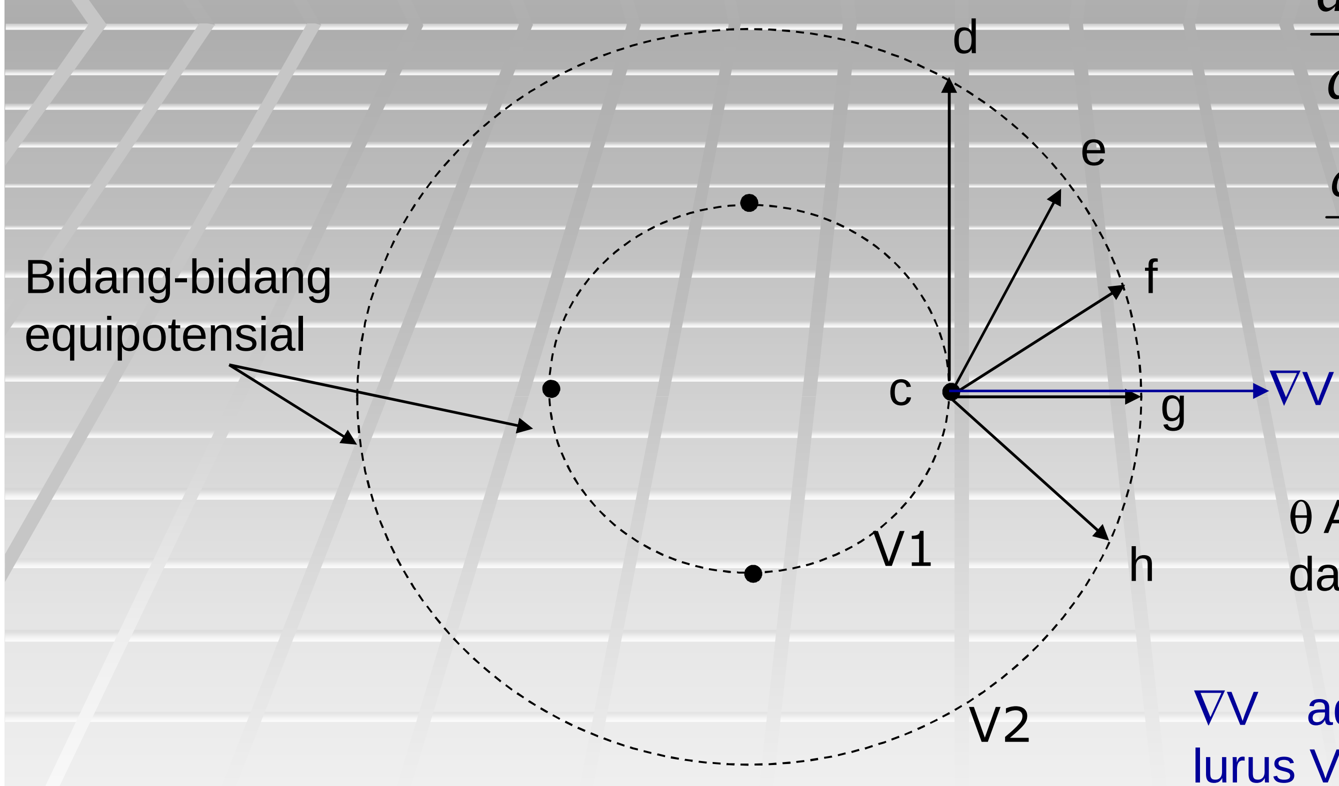


Ketika bergerak dari c ke d atau ke e, atau ke f, atau ke g, atau ke h, menempuh selisih potensial listriknya yang sama, yaitu V1-V2 = ΔV

Yang berbeda adalah panjang lintasan yang ditempuh. Hal ini menunjukkan laju perubahan potensial berbeda, semakin panjang lintasan berarti laju perubahannya kecil dan sebaliknya

Hal ini menunjukkan laju perubahan potensial bergantung arah = turunan berarah

Medan Listrik dan Potensial listrik



$$\frac{dV}{ds} = \nabla V \bullet \hat{a}$$

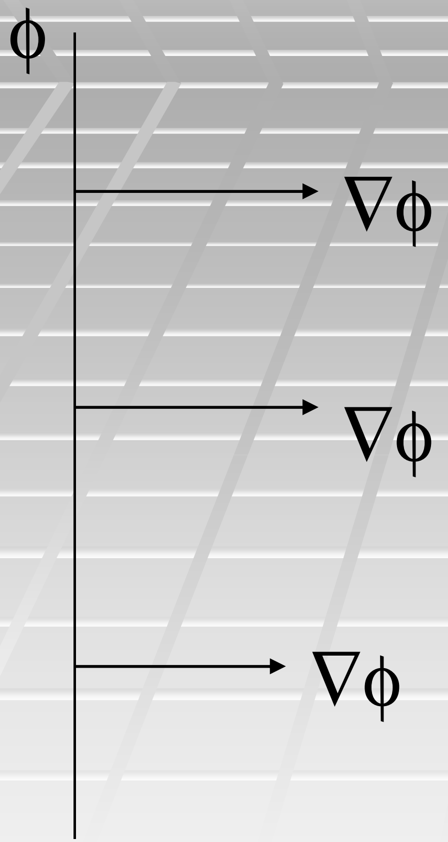
$$\frac{dV}{ds} = |\nabla V||\hat{a}|\cos\theta$$

θ Adalah sudut antara ∇V dan **a**

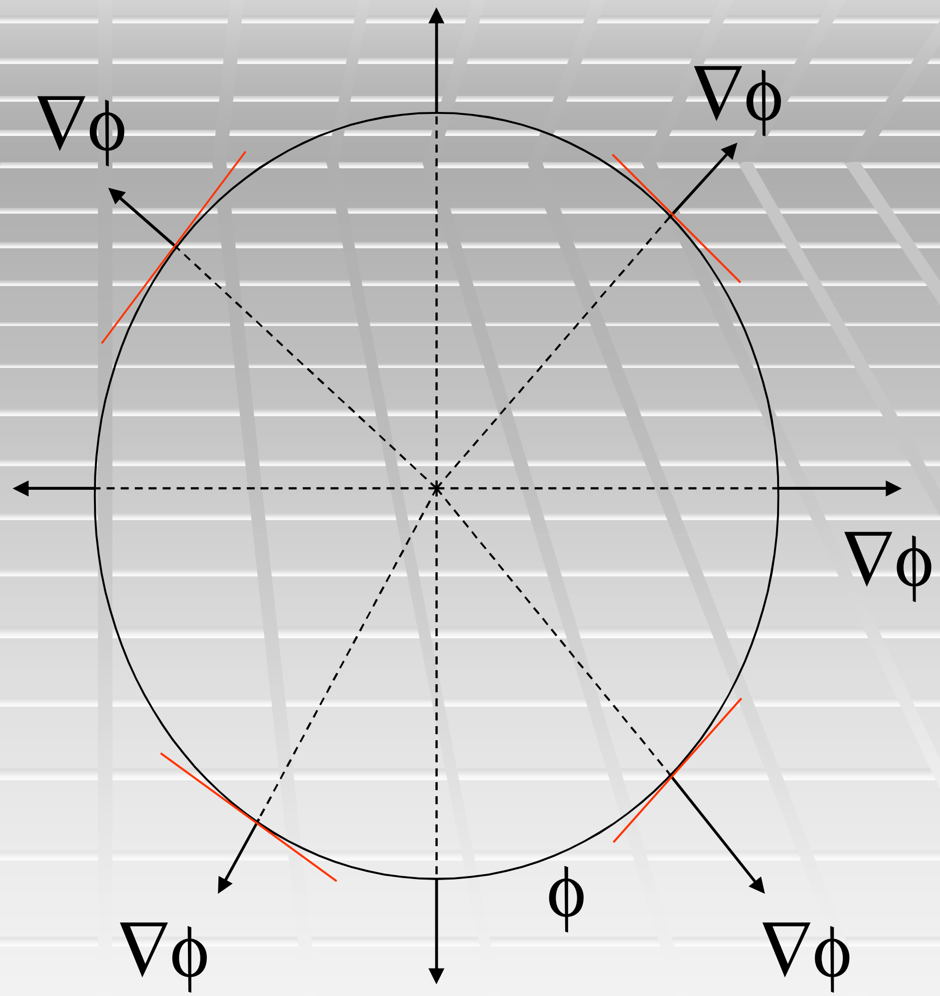
∇V adalah vektor tegak lurus V di suatu titik.

Pada perpindahan dari c ke g, vektor a(arah perpindahan) searah dengan ∇V, sehingga θ adalah 0 (nol)

$$\boxed{\frac{dV}{ds} = |\nabla V|\cos 0 = |\nabla V| = maksimum}$$

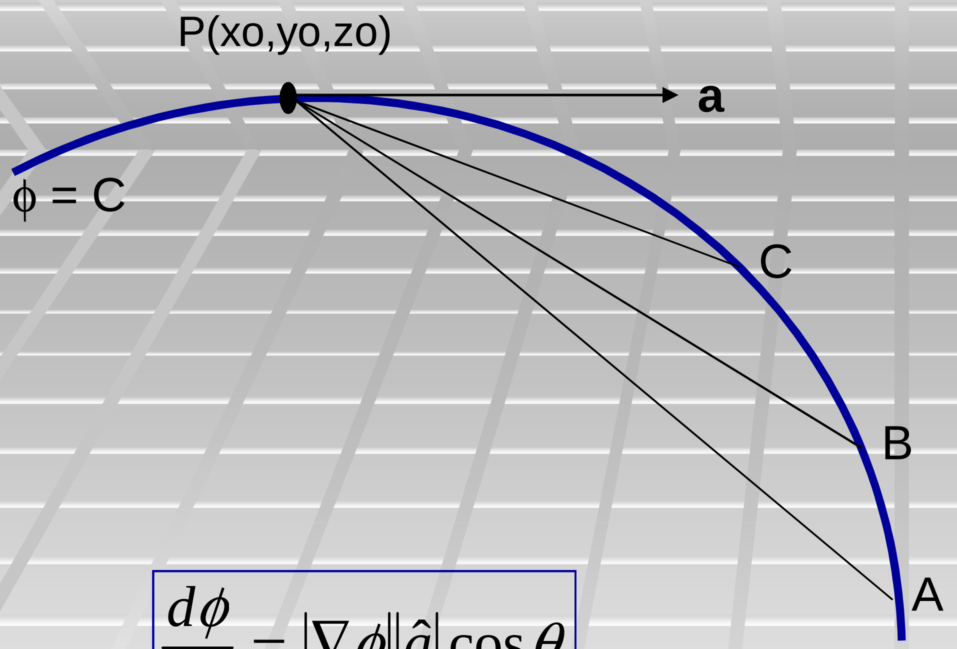


ϕ
$\nabla\phi$
$\nabla\phi$
$\nabla\phi$



$\nabla\phi$
$\nabla\phi$
$\nabla\phi$
$\nabla\phi$
ϕ
$\nabla\phi$

Bukti



$$\boxed{\frac{d\phi}{ds} = |\nabla\phi||\hat{a}|\cos\theta}$$

Titik P, C, B, A terletak pada satu bidang ϕ, sehingga ketika bergerak dari P ke C atau ke B atau ke A tidak terjadi perubahan nilai ϕ, sehingga $\Delta\phi = 0$. dengan demikian :

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = 0$$

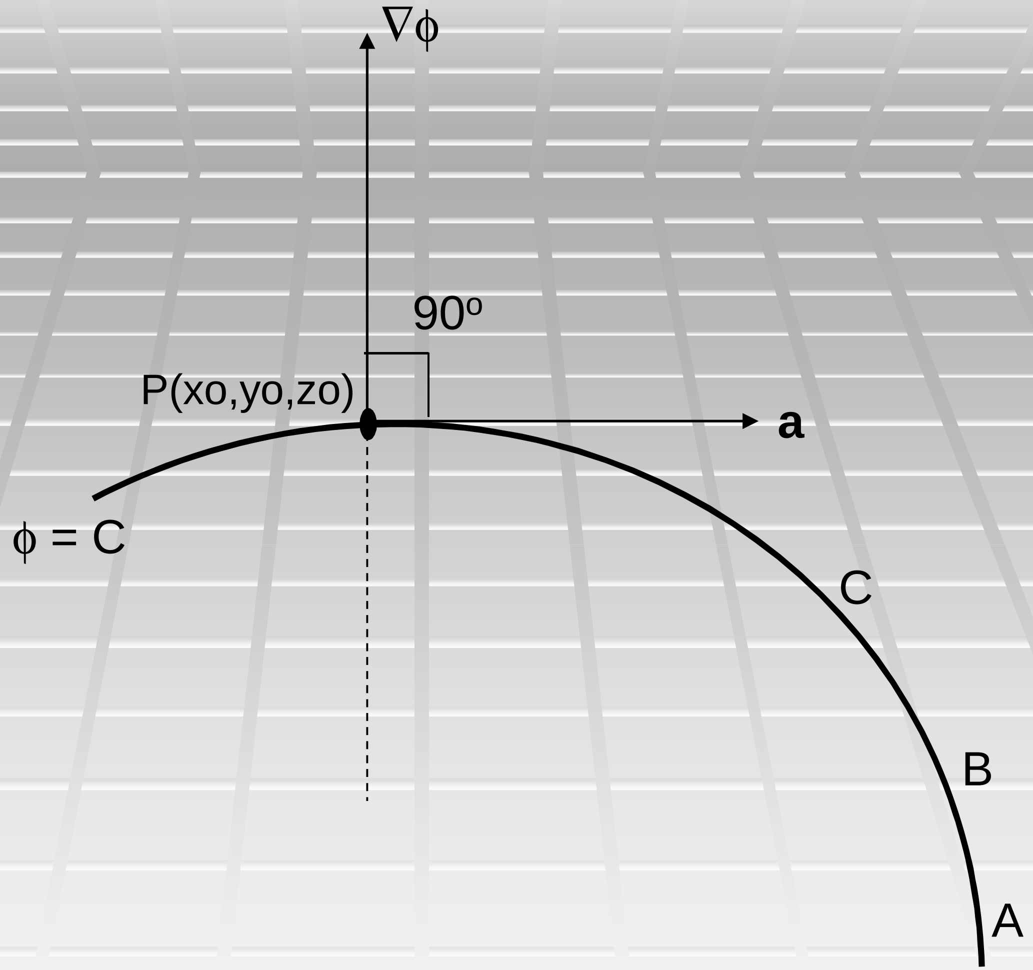
Dari kalkulus

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{d\phi}{ds} = 0$$

$$\frac{d\phi}{ds} = 0$$

Berarti antara ∇ϕ dan **a** di titik p membentuk sudut 90^o**.** Dengan demikian ∇ϕ tegak lurus **a.**

Bukti



Contoh Soal

Diberikan fungsi potensial listrik dalam ruang :

$$V = xy^2 + yz + z\sin x$$

Tentukan :

a. ∇V di titik (0,1,2)

b. Directional derivative dari V di (0,1,2) dalam arah $\vec{A} = 2i + 2j - k$

Jawab :

a. $\nabla V = i\frac{\partial V}{\partial x} + j\frac{\partial V}{\partial y} + k\frac{\partial V}{\partial z}$

$$\nabla V = i\left(y^2 + z\cos x\right) + j\left(2xy + z\right) + k\left(y + \sin x\right)$$

Di titik (0,1,2)

$$\nabla V = 3i + 2j + k$$

Contoh Soal

b. $$\frac{dV}{ds} = \nabla V \bullet \hat{u}$$ Di titik (0,1,2)

u adalah satuan vektor dalam arah **A,** sehingga :

$$\hat{u} = \frac{\vec{A}}{\left|\vec{A}\right|} = \frac{2i + 2j - k}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{2i + 2j - k}{3}$$

sehingga

$$\frac{dV}{ds} = (3i + 2j + k) \bullet \left(\frac{2i + 2j - k}{3} \right)$$

$$\frac{dV}{ds} = 3 \ \ volt / m$$

Soal latihan

Diberikan fungsi temperatur dalam ruang dan titik P(3,4,1) :

$$T = x^2 - yz$$

Tentukan :

a. ∇T di titik P
b. Suatu vektor satuan normal permukaan T=5 di P
c. Suatu vektor dalam arah peningkatan dari T paling cepat di P
d. Besar vektor pada soal c
e. Turunan dari T di P dalam arah sejajar garis :

$$\vec{r} = i - j + 2k + (6i - j - 4k)t$$

Divergensi

Misalkan $\vec{V}(x,y,z) = V_1 i + V_2 j + V_3 k$

Adalah suatu fungsi vektor yang terdefinisikan dan diferensiabel dalam suatu daerah tertentu dari ruang maka :

Divergensi V atau Div V atau ditulis ∇.V, didefinisikan sebagai :

$$\nabla \bullet V = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \left(V_1 i + V_2 j + V_3 k \right)$$

$$\nabla \bullet V = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$$

Curl

Misalkan $\vec{A}(x,y,z) = A_1 i + A_2 j + A_3 k$

Adalah suatu fungsi vektor yang terdefinisikan dan diferensiabel dalam suatu daerah tertentu dari ruang maka :

Curl A atau Rot A atau ditulis ∇xA, didefinisikan sebagai :

$$\nabla \times \vec{A} = \left(i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(A_1 i + A_2 j + A_3 k \right)$$

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_1 & A_2 & A_2 \end{vmatrix}$$

Contoh soal

Hitung divergensi dan Curl dari medan vektor berikut :

$$\vec{A} = zi + yj + xk$$

Jawab :

Divergensi V atau Div V atau ditulis ∇.V, didefinisikan sebagai :

$$\nabla \bullet \vec{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$\nabla \bullet \vec{A} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial z}$$

$$\nabla \bullet \vec{A} = 0 + 1 + 0 = 1$$

Curl A atau ditulis ∇xA, didefinisikan sebagai :

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\vec{A}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z & y & x \end{vmatrix}$$

$$\nabla\times\vec{A}=0$$

Variasi Formula Mengandung ∇

$$\nabla(U+V) = \nabla U + \nabla V$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\cdot\mathbf{A} + \nabla\cdot\mathbf{B}$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \nabla\times\mathbf{A} + \nabla\times\mathbf{B}$$

$$\nabla\cdot(U\mathbf{A}) = (\nabla U)\cdot\mathbf{A} + U(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

$$\nabla\times(U\mathbf{A}) = (\nabla U)\times\mathbf{A} + U(\nabla\times\mathbf{A})$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})$$

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A}) - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})$$

$\nabla\times(\nabla U) = \mathbf{0},$ i.e. the curl of the gradient of U is zero.

$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0,$ i.e. the divergence of the curl of $\mathbf{A}$ is zero.

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$$

Laplacian

Misalkan U (x,y,z) adalah suatu fungsi skalar yang terdefinisikan dan diferensiabel pada titik-titik (x,y,z) dalam suatu daerah tertentu dalam ruang, maka :

Laplacian U atau ditulis $\nabla^2 U$ didefinisikan sebagai :

$$\nabla \bullet \nabla U = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \left(i \frac{\partial U}{\partial x} + j \frac{\partial U}{\partial y} + k \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Contoh soal

Hitung Laplacian dari fungsi skalar berikut :

$$U = x^3 - 3xy^2 + y^3$$

Laplacian U atau ditulis $\nabla^2 U$ didefinisikan sebagai :

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 U = 6x + (-6x + 6y) + 0$$

$$\nabla^2 U = 6y$$

Soal latihan

1. Hitung Laplacian dari fungsi skalar berikut :

$$U = \ln\left(x^2 + y^2\right)$$

2. Hitunglah : $\nabla \bullet \left(\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right)$

jika $\vec{r} = x\,i + y\,j + z\,k$

INTEGRASI FUNGSI VEKTOR

Integral Biasa

$$\vec{R}(u) = R_1(u)\hat{i} + R_2(u)\hat{j} + R_3(u)\hat{k}$$

merupakan sebuah vektor yang bergantung pada variabel skalar tunggal u, dimana $R_1(u)$, $R_2(u)$, $R_3(u)$ kontinu dalam suatu selang yang ditentukan.

Maka:

$$\int \vec{R}(u)\,du = \hat{i}\int R_1(u)\,du + \hat{j}\int R_2(u)\,du + \hat{k}\int R_3(u)\,du$$

Disebut integral tak tentu dari **R**(u)

Jika terdapat suatu vektor

$\vec{S}(u)$ sehingga $\vec{R}(u) = \frac{d}{du}\left\{\vec{S}(u)\right\}$

Maka:

$$\int \vec{R}(u)\,du = \int \frac{d}{du}\left\{\vec{S}(u)\right\}du$$

$$\int \vec{R}(u)\,du = \int d\vec{S}(u) = \vec{S}(u) + C$$

C adalah vektor konstanta

Integral tentu antara limit-limit u = a dan u = b, ditulis sbb :

$$\int_{u=a}^{u=b} \vec{R}(u)du = \int_{u=a}^{u=b} \frac{d}{du}\left\{\vec{S}(u)\right\}du$$

$$\int_{u=a}^{u=b} \vec{R}(u)du = \int_{u=a}^{u=b} d\vec{S}(u)du$$

$$\int_{u=a}^{u=b} \vec{R}(u)du = \vec{S}(u)\Big|_{u=a}^{u=b} = \vec{S}(b) - \vec{S}(a)$$

Contoh Soal

Percepatan suatu partikel pada setiap saat t $\geq$ 0 diberikan oleh:

$$\vec{a} = (12\cos 2t)\hat{i} - (8\sin 2t)\hat{j} + (16t)\hat{k}$$

Jika, kecepatan dan posisi awal adalah nol, Tentukan kecepatan dan posisi partikel setiap saat!

$$\vec{v} = \int \vec{a}\, dt \qquad t = 0 \rightarrow \vec{v}(t=0) = v_0 = 0$$

$$\vec{r} = \int \vec{v}\, dt \qquad \vec{r}(t=0) = r_0 = 0$$

Solusi

$$\vec{v} = \hat{i}\int 12\cos 2t.dt - \hat{j}\int 8\sin 2t.dt + \hat{k}\int 16t.dt$$

$$\vec{v} = \hat{i}\left(12\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 2t\right) - \hat{j}\left((-8)\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 2t\right) + \hat{k}\left(8t^2\right) + C_1$$

$$\vec{v} = 6\sin 2t\,\hat{i} + 4\cos 2t\,\hat{j} + 8t^2\,\hat{k} + C_1$$

dengan mengambil v = 0 pada saat t = 0, diperoleh :

$$0 = 6\sin 0\,\hat{i} + 4\cos 0\,\hat{j} + 8(0)^2\,\hat{k} + C_1\,; \qquad \boxed{C_1 = -4j}$$

Sehingga :

$$\vec{v} = 6\sin 2t\,\hat{i} + 4\cos 2t\,\hat{j} + 8t^2\,\hat{k} - 4j \quad \text{atau}$$

$$\vec{v} = 6\sin 2t\,\hat{i} + (4\cos 2t - 4)\,\hat{j} + 8t^2\,\hat{k}$$

Solusi

$$\vec{r} = \int \vec{v}\, dt = \int \left(6\sin 2t\, i + 4\cos 2t\; j - 4\, j + 8t^2\, k\right) dt$$

$$\vec{r} = -3\cos 2t\, i + \left(2\sin 2t - 4t\right) j + \frac{8}{3} t^3\; k + C_2$$

dengan mengambil r = 0 pada saat t = 0, diperoleh :

$$0 = -3\cos 0\, i + \left(2\sin 0 - 0\right) j + \frac{8}{3}(0)^3\; k + C_2\;; \qquad \boxed{C_2 = 3i}$$

sehingga

$$\vec{r} = -3\cos 2t\, i + \left(2\sin 2t - 4t\right) j + \frac{8}{3} t^3\; k + 3i$$ atau

$$\vec{r} = (3 - 3\cos 2t)\, i + \left(2\sin 2t - 4t\right) j + \frac{8}{3} t^3\; k$$

Soal latihan

Percepatan suatu partikel pada setiap saat t $\geq$ 0 diberikan oleh:

$$\vec{a} = e^{-t}\hat{i} - 6(t+1)\hat{j} + 3\sin t\,\hat{k}$$

Jika, kecepatan dan posisi awal adalah nol, Tentukan kecepatan dan posisi partikel setiap saat!

Integral Garis

Misalkan

$$\vec{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

dan r(u) adalah vektor posisi dari (x,y,z) mendefinisikan kurva C yang menghubungkan titik-titik P dan Q, dimana u = u_1 dan u = u_2 untuk masing-masingnya

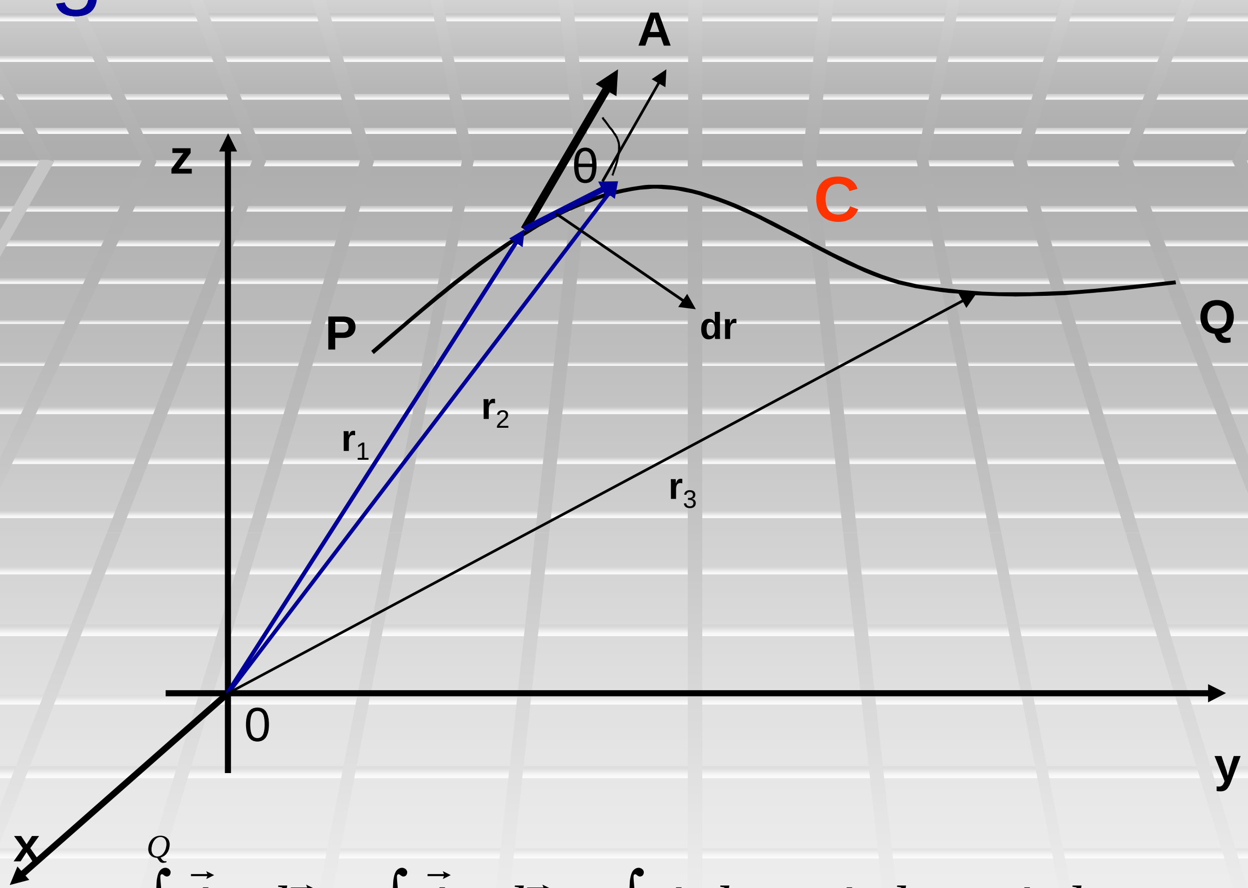
C dianggap tersusun dari sejumlah berhingga kurva-kurva dimana untuk masing-masingnya r(u) memiliki turunan yang kontinu. Misalkan :

$$\vec{r}(u) = x(u)i + y(u)j + z(u)k$$

Sebuah fungsi vektor dari posisi yang didefinisikan dan kontinu sepanjang C, maka integral dari komponen tangensial **A** sepanjang C dari P ke Q ditulis sebagai :

$$\int_P^Q \vec{A} \bullet d\vec{r} = \int_C \vec{A} \bullet d\vec{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

Integral Garis



$$\int_P^Q \vec{A} \bullet d\vec{r} = \int_C \vec{A} \bullet d\vec{r} = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

Adalah contoh integral garis. Jika **A** adalah sebuah gaya **F** yang bekerja pada suatu partikel yang bergerak sepanjang C, maka integral garis in i menyatakan usaha (W) yang dilakukan gaya **F**.

Integral Garis

Jika C adalah kurva tertutup sederhana (kurva yang tidak memotong dirinya sendiri), maka integral mengelilingi C sering dituliskan :

$$\oint_C \vec{A} \bullet d\vec{r} = \oint_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

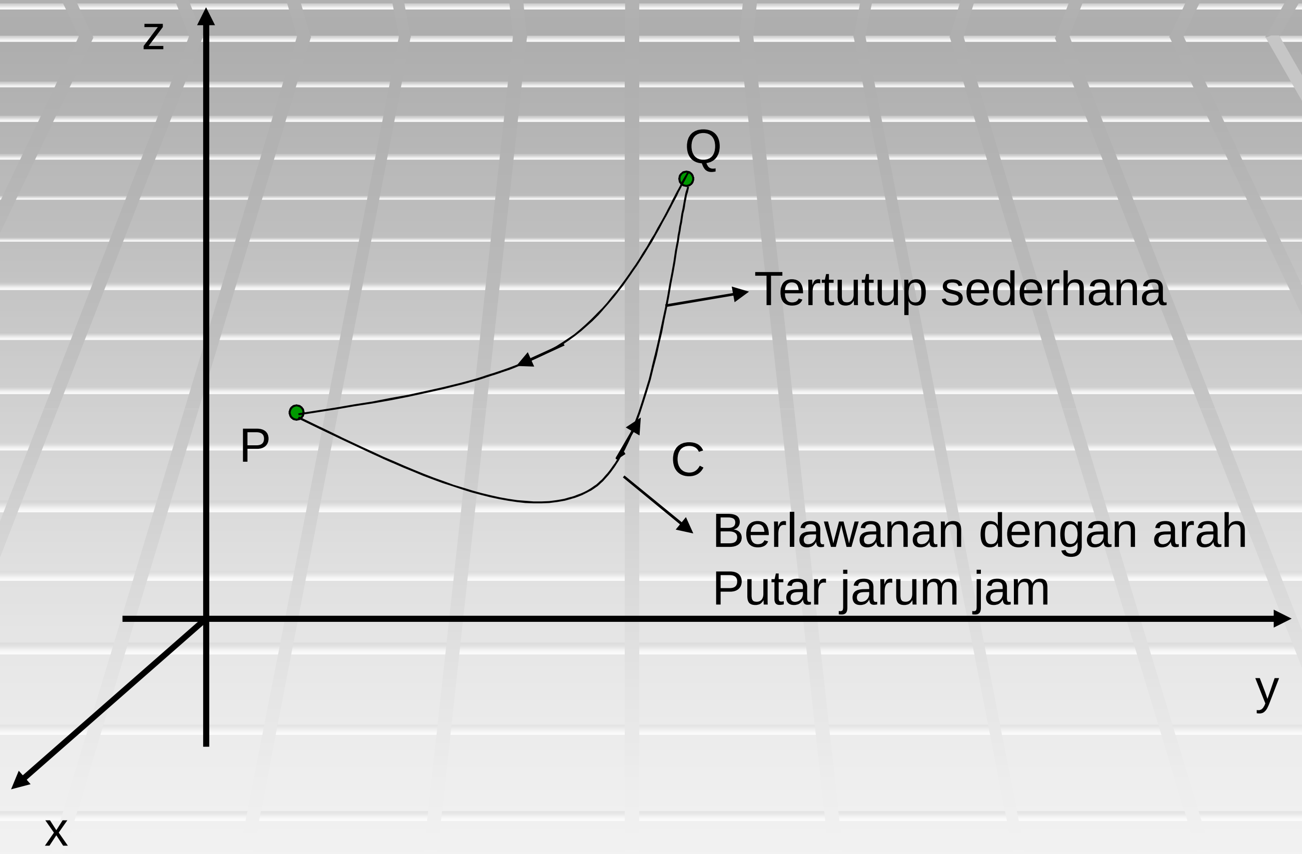
Teorema

Jika A = $-\nabla\phi$ pada semua titik dalam suatu daerah R dalam ruang, yang didefinisikan oleh $a_1 \leq x \leq a_2$, $b_1 \leq y \leq b_2$, $c_1 \leq z \leq c_2$, dimana $\phi(x,y,z)$ berharga tunggal dan memiliki turunan-turunan yang kontinu dalam R, maka

1. $\int_P^Q \vec{A} \bullet d\vec{r}$ Tidak bergantung pada lintasan C dalam R yang menghubungkan P dan Q

2. $\oint_C \vec{A} \bullet d\vec{r} = 0$ Mengelilingi setiap kurva tertutup C dalam R

Kurva tertutup sederhana



Integral Garis

Dalam hal demikian, A disebut sebuah medan vektor konservatif dan ϕ adalah potensial skalarnya.

Sebuah medan vektor A adalah konservatif jika dan hanya jika :

$$\nabla \times \vec{A} = 0$$

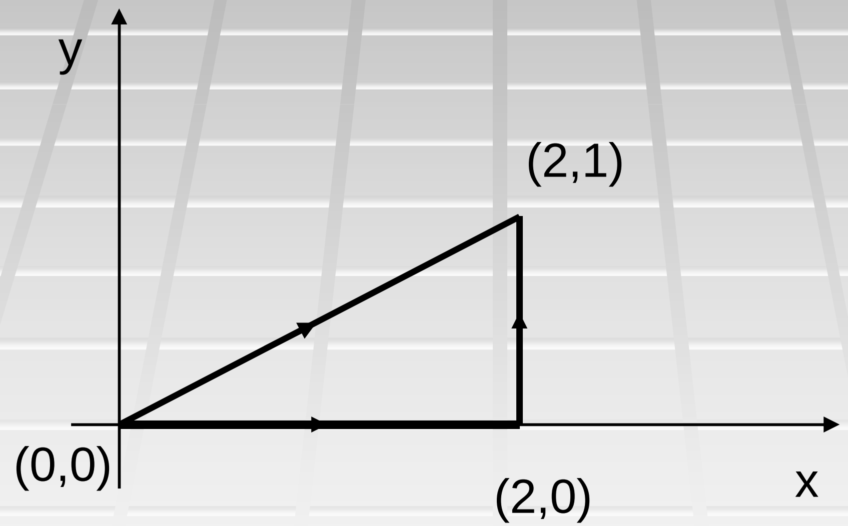
Atau ekivalen juga dengan A = -$\nabla\phi$. Dalam hal demikian :

$$\vec{A} \bullet d\vec{r} = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = -\nabla \phi$$

Contoh Soal

Jika $\vec{F} = \left(2x + y^2\right)i + \left(3y - 4x\right)j$

Hitunglah usaha untuk memindahkan partikel dari titik (0,0) ke (2,1) melalui lintasan seperti gambar di bawah ini :



Apakah F merupakan medan vektor konservatif ?

Soal Latihan

Diberikan $\vec{F}_1 = 2xz\,i + y\,j + x^2\,k$ dan $\vec{F}_2 = y\,i - x\,j$

a. Yang manakah dari kedua gaya tersebut yang konservatif ?

b. Untuk gaya yang konservatif, cari fungsi skalar ϕ sehingga F = - $\nabla\phi$!

c. Untuk gaya yang tidak konservatif, hitunglah usaha untuk memindahkan partikel sepanjang garis lurus dari titik (0,1) ke (1,0)

Tugas PR

a. Buktikan bahwa medan gaya berikut bersifat konservatif

$$\vec{F} = \left(y^2 \cos x + z^3\right)i + \left(2y \sin x - 4\right) j + \left(3xz^2 + 2\right)k$$

b. Carilah potensial skalar (ϕ) untuk **F**

c. Carilah usaha yang dilakukan **F** dalam menggerakan sebuah partikel dari (0,1,-1) ke (π/2, -1,2)

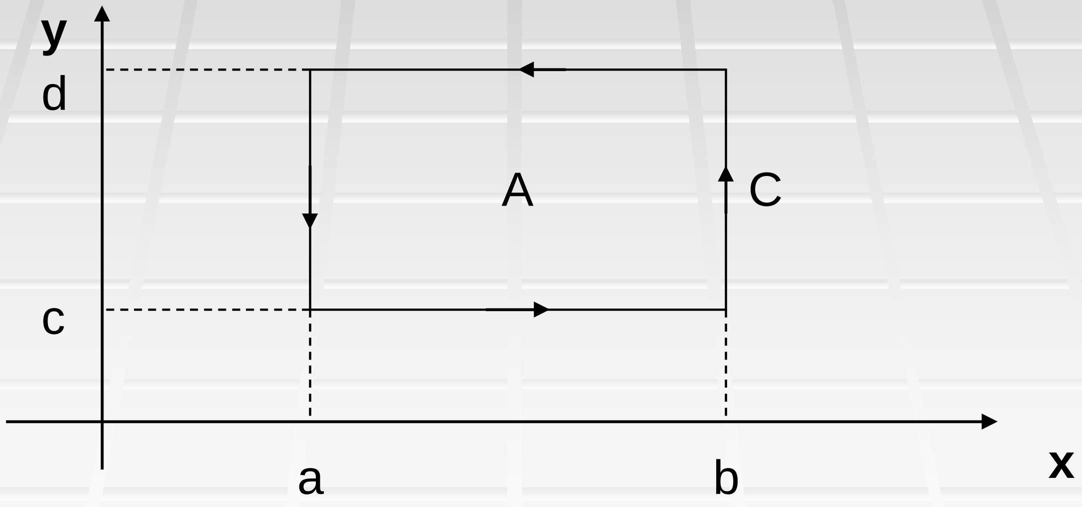
Teorema Green dalam Bidang

Jika R adalah suatu daerah tertutup dalam bidang xy yang dibatasi oleh sebuah kurva tertutup sederhana C dan jika P dan Q adalah fungsi-fungsi kontinu dari x dan y yang memiliki turunan-turunan kontinu dalam R, maka :

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

dimana C dilintasi dalam arah positif (berlawanan arah putar jarum jam)

Bukti



Teorema Green dalam Bidang

Lakukan integral rangkap 2 terhadap luas bidang A

$$\iint_A \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d [Q(b,y) - Q(a,y)]\,dy$$

Lakukan integral garis sepanjang kurva C mengelilingi bidang A berlawanan arah putar jarum jam

$$\oint_C Q(x,y)\,dy = \cancel{\int_a^b Q(x,c)\,dy} + \int_c^d Q(b,y)\,dy + \cancel{\int_b^a Q(x,d)\,dy} + \int_d^c Q(a,y)\,dy$$

$$\oint_C Q(x,y)\,dy = \int_c^d Q(b,y)\,dy + \int_d^c Q(a,y)\,dy = \int_c^d [Q(b,y) - Q(a,y)]\,dy$$

$$\boxed{\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_C Q(x,y)\,dy}$$

Teorema Green dalam Bidang

Lakukan pula integral rangkap 2 terhadap luas bidang A

$$\boxed{\iint_A \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dx\,dy} = \int_a^b \int_c^d \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\,dy\,dx = \boxed{\int_a^b [P(x,d) - P(x,c)]\,dx}$$

Lakukan integral garis sepanjang kurva C mengelilingi bidang A berlawanan arah putar jarum jam

$$\oint_C P(x,y)\,dx = \int_a^b P(x,c)\,dx + \cancel{\int_c^d P(b,y)\,dx} + \int_b^a P(x,d)\,dx + \cancel{\int_d^c P(a,y)\,dx}$$

$$\boxed{\oint_C P(x,y)\,dx} = \int_a^b P(x,c)\,dx + \int_b^a P(x,d)\,dx = \boxed{\int_a^b [P(x,c) - P(x,d)]\,dx}$$

$$\boxed{-\iint_A \frac{\partial P}{\partial x}\,dy\,dx = \oint_C P(x,y)\,dx}$$

Teorema Green dalam Bidang

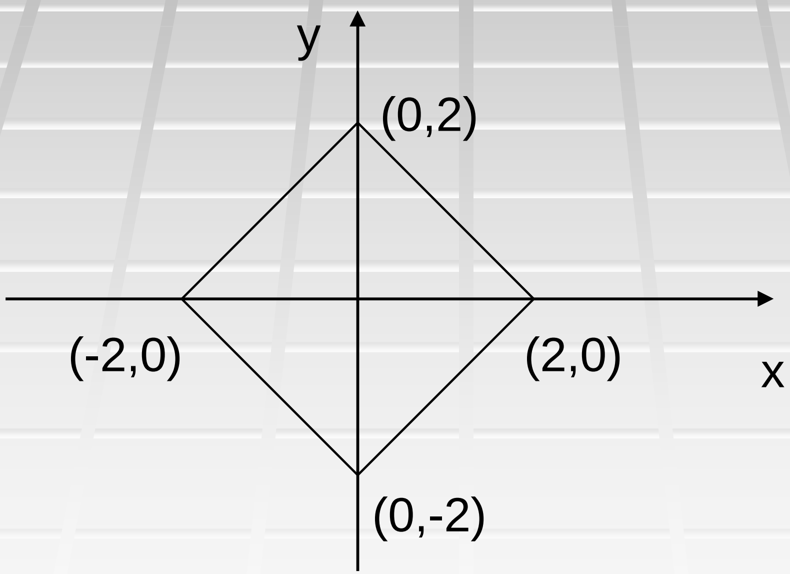
$$\boxed{\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy}$$

Contoh Soal

Gunakan teorema Green untuk menghitung integral berikut :

$$\oint_C 2x\,dy - 3y\,dx$$

Dimana C adalah kurva segiempat seperti gambar di bawah :

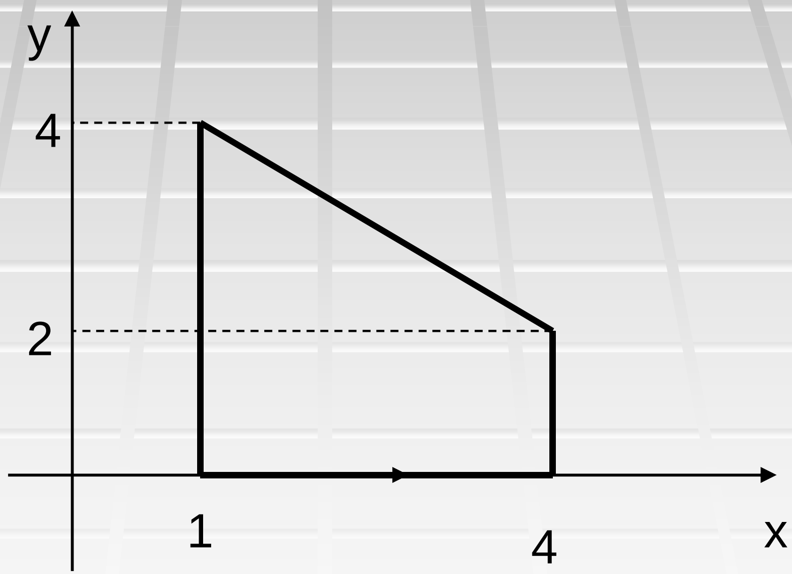


Soal Latihan

Gunakan teorema Green untuk menghitung integral berikut :

$$\oint_C xy\,dx + x^2\,dy$$

Dimana C adalah kurva tertutup seperti gambar di bawah :



Tugas PR

a. Untuk kurva tertutup sederhana C dalam bidang, Tunjukkan dengan teorema Green bahwa luas area yang dilingkupinya adalah :

$$A = \frac{1}{2}\oint_C \left(x\,dy - y\,dx\right)$$

b. Dengan menggunakan formula pada soal a), tunjukkan bahwa area yang dibatasi elips x = a cos θ, y = b sin θ, 0 ≤ θ ≤ 2π memiliki luas :

$$A = \pi ab$$

Teorema Divergensi (Teorema Gauss)

Menyatakan bahwa jika V adalah volum yang dibatasi oleh suatu permukaan tertutup S dan A sebuah vektor yang adalah fungsi dari kedudukan dengan turunan-turunan yang kontinu, maka :

$$\iiint_V \nabla \bullet \vec{A}\, dV = \iint_S \vec{A} \bullet \hat{n}\, dS$$

dimana n adalah normal positif dari permukaan S

Contoh Soal

Gunakan teorema Divergensi untuk menghitung integral berikut :

$$\iint_S \vec{F} \bullet \hat{n}\, dS$$

dimana $\vec{F} = 4xz\, i - y^2\, j + yz\, k$

dan S adalah permukaan kubus yang dibatasi oleh : x = 0, x = 1, y = 0, y = 1, z = 0, z = 1

Soal Latihan

Periksa kebenaran teorema Divergensi untuk :

$$\vec{A} = 4x\,i - 2y^2\,j + z^2\,k$$

Yang diintegrasi melalui ruang yang dibatasi oleh $x^2 + y^2 = 3$, $z = 0$ dan $z = 3$

Hukum Gauss

Dalam bidang kelistrikan, salah satu materi yang dibahas adalah menentukan medan listrik disekitar benda bermuatan listrik. Salah satu teknik yang digunakan adalah hukum Gauss. Hukum ini sebetulnya adalah teorema Divergensi yang diterapkan dalam materi bahasan kelistrikan.

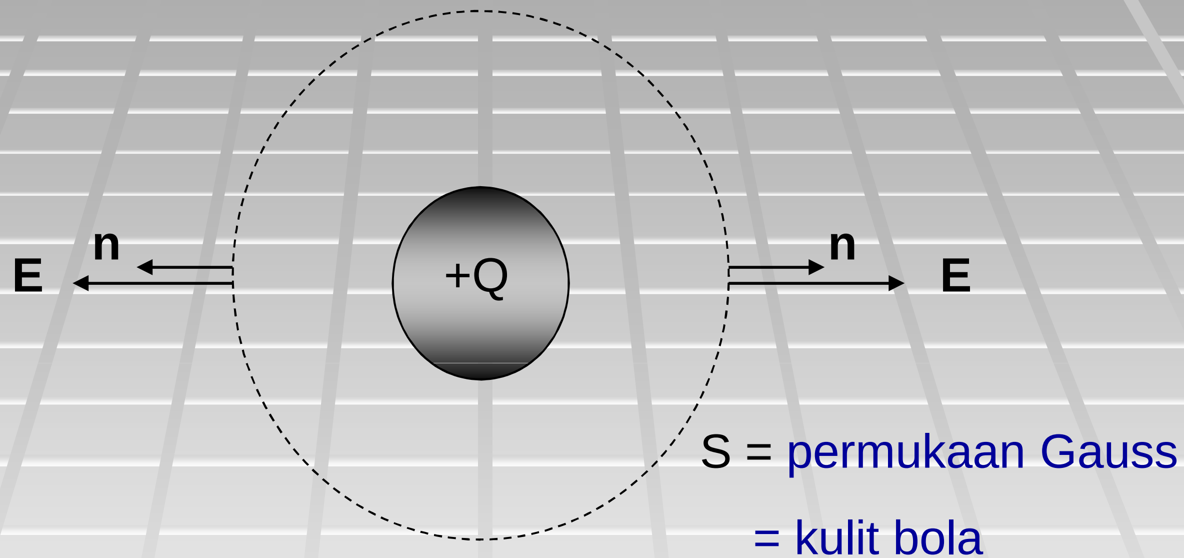
$$\iiint_V \nabla \bullet \vec{A}\, dV = \iint_S \vec{A} \bullet \hat{n}\, dS$$

$$\varepsilon_o \iint_S \vec{E} \bullet \hat{n}\, dS = \iiint_V \rho(V)\, dV$$

dimana **E** adalah medan listrik, **n** adalah vektor normal bidang, S adalah permukaan Gauss, ρ adalah rapat muatan pada benda dan V adalah volume benda.

Hukum Gauss

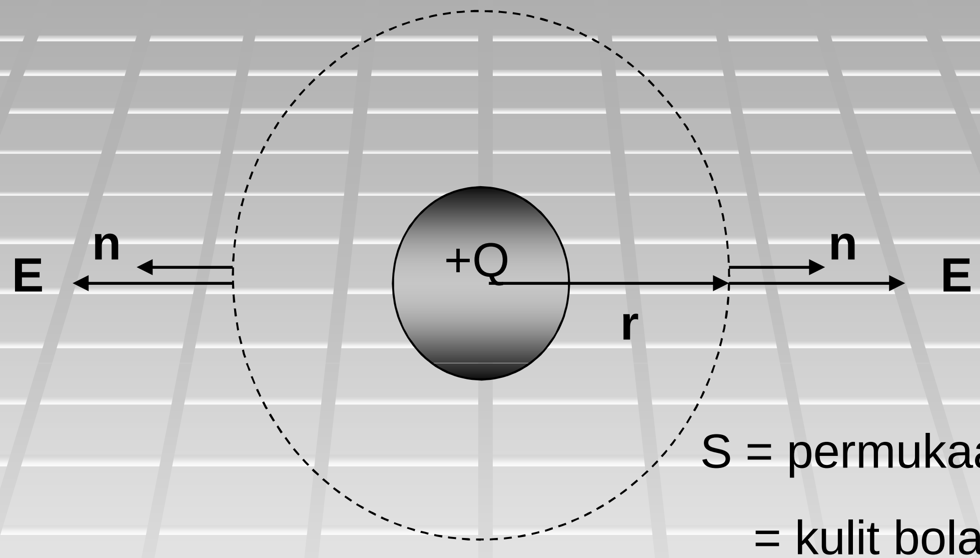
Kasus distribusi muatan +Q pada bola dengan rapat muatan konstan.



Permukaan Gauss S harus dipilih sedemikian rupa sehingga arah E dengan n sejajar (membentuk sudut 0) di setiap titik pada permukaan Gauss. Jadi pemilihan permukaan Gauss harus mempertimbangkan bentuk geometri benda bermuatan. Dalam kasus kita benda bermuatan +Q bergeometri bola, sehingga permukaan Gauss yang paling tepat adalah permukaan bola (kulit bola)

Hukum Gauss

Kasus distribusi muatan +Q pada bola dengan rapat muatan konstan.



S = permukaan Gauss

= kulit bola

$$\varepsilon_0 E \iint_S dS = +Q$$

$$\varepsilon_0 E\left(4\pi r^2\right) = +Q$$

$$\boxed{E = \frac{+Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = k\frac{+Q}{r^2}}$$

Teorema Stokes

Menyatakan bahwa jika S adalah suatu permukaan terbuka bersisi dua yang dibatasi oleh sebuah kurva tertutup sederhana C maka jika A memiliki turunan-turunan yang kontinu :

$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \bullet \hat{n}\, dS = \oint_C \vec{A} \bullet d\vec{r}$$

dimana C dilintasi dengan arah positif. Arah dari C disebut positif jika seorang pengamat berjalan pada daerah batas dari S dalam arah ini dengan kepalanya menunjuk pada arah normal positif terhadap S, maka ia mendapatkan permukaan ini di sebelah kirinya

Contoh Soal

Periksa kebenaran teorema Stokes untuk :

$$\vec{A} = (2x - y)i - yz^2\, j - y^2 z\, k$$

Dimana S adalah separuh dari permukaan bola bagian atas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ dan C batasnya.

Soal Latihan

Periksa kebenaran teorema Stokes untuk :

$$\vec{A} = (y - z + 2)i - (yz + 4)\,j - xz\,k$$

Dimana S adalah permukaan kubus x=0, y=0, z=0, x=2, y=2, z=2 di atas bidang xy.

Hukum Ampere

Dalam bidang kemagnetan, salah satu materi yang dibahas adalah menentukan medan magnet disekitar penghantar berarus listrik (i). Salah satu teknik yang digunakan adalah hukum Ampere. Hukum ini sebetulnya adalah teorema Stokes yang diterapkan dalam materi bahasan kemagnetan.

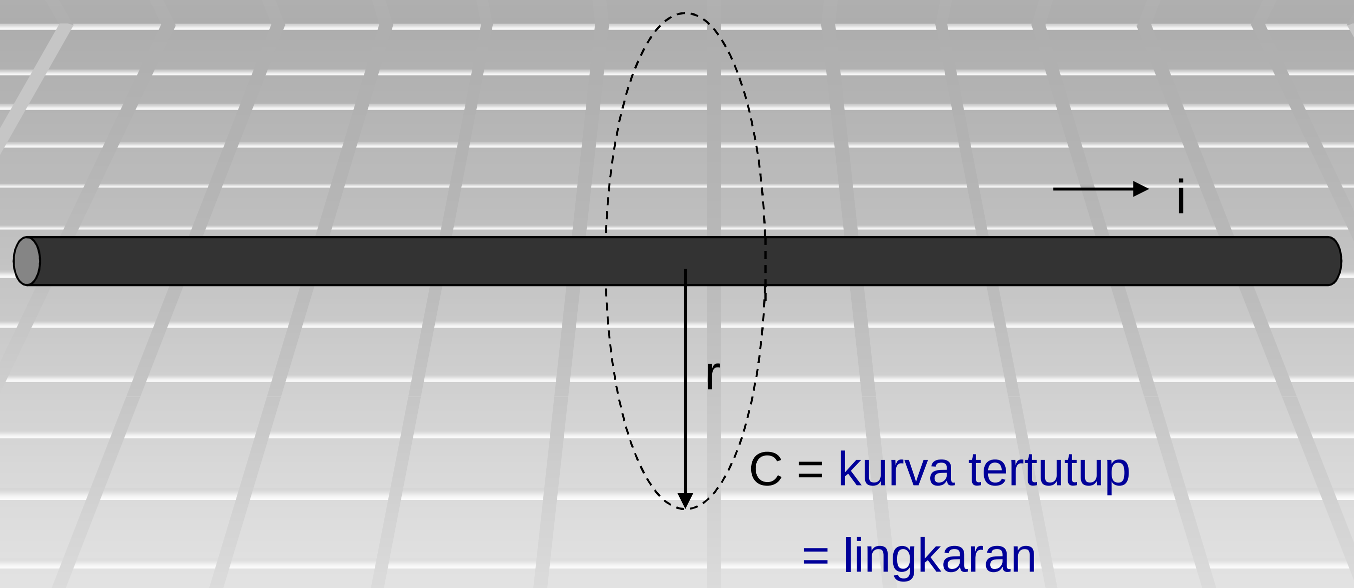
$$\iint_S \left(\nabla \times \vec{A}\right) \bullet \hat{n}\, dS = \oint_C \vec{A} \bullet d\vec{r}$$

$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{r} = \iint_S \left(\nabla \times \vec{H}\right) \bullet \hat{n}\, dS$$

dimana **H** adalah medan magnet, C adalah kurva tertutup yang melingkupi penghantar berarus listrik, **n** adalah vektor normal geometri benda berarus listrik.

Hukum Ampere

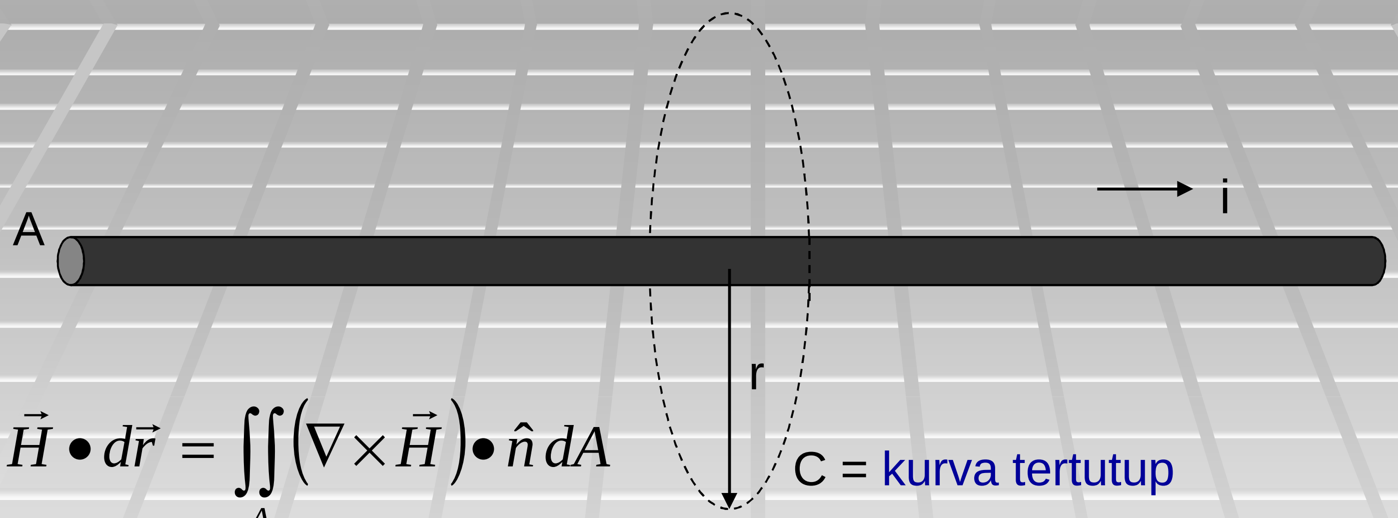
Kasus penghantar lurus bergeometri silinder mengangkut arus listrik i



Kurva tertutup C harus dipilih sedemikian rupa sehingga arah B dengan arah vektor yang menyinggung kurva sejajar (membentuk sudut 0) di setiap titik pada kurva C. Jadi pemilihan kurva C harus mempertimbangkan bentuk geometri penghantar. Dalam kasus kita penghantar berarus listrik i bergeometri silinder, sehingga kurva C yang paling tepat adalah kurva lingkaran.

Hukum Ampere

Kasus penghantar lurus bergeometri silinder mengangkut arus listrik i



$$\oint_C \vec{H} \bullet d\vec{r} = \iint_A \left(\nabla \times \vec{H}\right) \bullet \hat{n}\, dA$$

C = kurva tertutup

= lingkaran

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_C \vec{B} \bullet d\vec{r} = \iint_S \left(\vec{J}\right) \bullet \hat{n}\, dA$$

J adalah rapat arus, A adalah luas permukaan silinder

$$B \oint_C dr = \mu_0 \iint_S \left(\vec{J}\right) \bullet \hat{n}\, dA = \mu_0\, i$$

$$B\left(2\pi r\right) = \mu_0\, i$$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}}$$