DERET PANGKAT TAK HINGGA

DERET PANGKAT

Definisi deret pangkat :

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = c_o + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots$$

dimana x adalah variabel c_n dan a adalah konstanta

Perhatikan bahwa dalam notasi deret pangkat telah sengaja memilih indeks nol untuk menyatakan suku pertama deret, c_0, yang selanjutnya disebut suku ke-nol. Hal ini dilakukan untuk memudahkan penulisan, terutama ketika membahas pernyataan suatu fungsi dalam deret pangkat

Beberapa contoh deret pangkat

(a) $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots + \frac{(-x)^n}{2^n} + \cdots,$

(b) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \cdots,$

(c) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,$

(d) $1 + \frac{(x+2)}{\sqrt{2}} + \frac{(x+2)^2}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}} + \cdots.$

Selang konvergensi deret pangkat

Deret pada contoh (a)

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots + \frac{(-x)^n}{2^n} + \cdots,$$

Selang konvergensi deret pangkat dapat ditentukan dengan menggunakan konsep uji rasio (uji nisbah), sbb :

$$\rho_n = \left| \frac{(-x)^{n+1}}{2^{n+1}} \div \frac{(-x)^n}{2^n} \right| = \left| \frac{x}{2} \right|,$$

$$\rho = \left| \frac{x}{2} \right|.$$

Menurut syarat uji nisbah suatu deret akan konvergen jika :

$$\rho < 1$$

Sehingga :

$$\rho = \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

atau :

$$|x| < 2$$

atau :

$$-2 < x < 2$$

Jadi selang konvergensinya adalah untuk nilai x antara - 2 dan 2

Pertanyaannya sekarang adalah apakah untuk titik-titik ujung selang yaitu pada nilai x=-2 dan x=2 deret konvergen atau divergen ???

Untuk x = -2, deret menjadi :

$$1+1+1+1+1+....+....$$

Deret ini akan tak hingga jumlahnya, maka untuk x = 2 deret menjadi divergen. Dengan demikian 2 tidak termasuk dalam selang konvergensi deret (a)

Untuk x = 2, deret menjadi :

$$1-1+1-1+1-....+....$$

Merupakan deret bolak-balik dengan $|a_n| = 1$. karena $|a_{n+1}| = |a_n|$ maka deret ini juga divergen. Dengan demikian 2 juga tidak termasuk dalam selang konvergensi deret (a)

Sehingga selang konvergensi deret pangkat (a) adalah

$$-2 < x < 2$$

TUGAS

Tentukan selang konvergensi deret pangkat pada contoh (b), (c), dan (d)

TEOREMA-TEOREMA PENTING TERKAIT DERET PANGKAT

TEOREMA-TEOREMA PENTING

1. Integrasi dan diferensiasi deret pangkat dapat dilakukan per suku, yaitu:

$$\int_p^q \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_p^q C_n (x-a)^n \, dx, \quad p,\, q \in |x-a| \le r$$

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} C_n (x-a)^n \, dx$$

   Selang konvergensi seragam deret pangkat yang dihasilkan, sama seperti yang semula. Untuk kedua titik ujungnya, perlu diselidiki.

2. Dua deret pangkat dapat di-jumlah/kurang-kan, dan diperkalikan; deret yang dihasilkan memiliki selang konvergensi masing-masing deret. Jadi, misalkan I_1 dan I_2 selang konvergensi masing-masing deret, maka selang konvergensi deret yang dihasilkan adalah $I_1 \cap I_2$ ($\cap$ lambang teori himpunan bagi irisan).

3. Dua deret pangkat dapat pula dibagi asalkan penyebutnya tak-nol di x = a, atau nol di x = a, tetapi tercoretkan (seperti $\frac{\ln(1+x)}{x}$). Selang konvergensinya harus dicari kembali.
4. Suatu deret pangkat dapat disisipkan ke dalam deret pangkat lainnya, asalkan selang konvergensi deret yang disisipkan terkandung dalam deret lainnya. Jadi, misalkan I_1 selang konvergensinya I_2, maka $I_1 \subseteq I_2$ ($\subseteq$ lambang teori himpunan bagi himpunan bagian).

5. Pernyataan suatu fungsi f(x) dalam deret pangkat konvergen, adalah *tunggal.* Artinya ada satu pernyataan deret pangkat untuk satu fungsi, sejauh variabel x berada dalam selang konvergensi deret.

URAIAN TAYLOR SEBUAH FUNGSI

- Seperti telah diungkapkan di atas, bahwa suatu fungsi f(x) yang dapat dinyatakan dalam deret pangkat. Kenyataan ini menguntungkan, karena deret pangkat sangat mudah ditangani secara analitis, ketimbang fungsi f(x) itu sendiri. Misalnya, dalam perhitungan integral dari fungsi f(x), bila seandainya f(x) adalah suatu fungsi rumit yang integralnya tak terdapat dalam tabel integral, maka penyelesaiannya akan sulit. Penanganan dalam pernyataan deret dari f(x) mungkin dapat lebih mudah ditangani.

- Sebagai contoh, integral tentu berikut:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx$$

- Muncul dalam persoalan fisika, yaitu pada persoalan difraksi Fresnel gelombang cahaya oleh sebuah celah. Integral jenis ini tak terdaftarkan dalam tabel integral, karena hasilnya tak dapat diungkapkan dalam pernyataan suatu fungsi primitif tertentu. Sehingga sulit diselesaikan secara analitik dengan menggunakan teknik dasar integral.
- Integral seperti ini dapat dengan mudah diselesaikan dengan metode aproksimasi menggunakan metode deret pangkat.

- Misalkan kita ingin menyatakan sebuah fungsi f(x) yang diketahui dalam pernyataan deret pangkat, maka mula-mula kita tulis bentuk umum seperti berikut :

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots$$

- Tetapan a dapat pula bernilai nol. Masalah selanjutnya adalah:

a. Menentukan nilai-nilai koefisien C_n, sebagai fungsi dari n, sehingga penulisan di atas berupa suatu identitas (berlaku bagi semua nilai x).

b. Menentukan selang konvergensi deret pangkatnya dalam mana identitas (a) berlaku.

- Dengan menerapkan teorema diferensiasi deret pangkat, kita peroleh:

$$f(a) = C_0 + C_1(0) + C_2(0)^2 + \cdots + C_n(0)^n + \cdots = C_0$$

$$f'(a) = 0 + C_1 + 2C_2(0) + \cdots + nC_n(0)^{n-1} + \cdots = C_1$$

$$f''(a) = 0 + 0 + 2.1C_2 + \cdots + n(n-1)C_n(0)^{n-2} + \cdots = 2!C_2$$

....

$$f^{n}(a) = 0 + 0 + 0 + \cdots + n!C_n + 0 + \cdots = n!C_n$$

Jadi:

$$\boxed{C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)}$$

- Dengan demikian,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!} f^n(a)(x-a)^n + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(a)(x-a)^n$$

Uraian Taylor dari fungsi f(x) disekitar x = a

Khusus untuk x = 0, uraian deret pangkat dari fungsi f(x) disebut deret McLaurin

Misalkan kita ingin menyatakan fungsi sinus x dalam deret pangkat disekitar x = 0

Bentuk umum :

$$\sin x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

Tugas kita adalah mencari a_0, a_1, a_2, a_3, ... dst

Turunan pertama dari fungsi sin x terhadap x adalah :

$$\cos x = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots.$$

Pada x = 0,

$$Cos\ 0 = a_1 + 2a_2(0) + 3a_3(0)^2 + \ldots$$

Jadi : $a_1 = 1$

Turunan kedua dari fungsi sin x terhadap x adalah :

$$-\sin x = 2a_2 + 3.2a_3 x + 4.3\,a_4 x^2 + \ldots$$

pada x = 0

$$-\sin 0 = 2a_2 + 3.2a_3(0) + 4.3\,a_4(0)^2 + \ldots$$

Jadi : $a_2 = 0$

Dst........lakukan proses yang sama untuk turunan ke-tiga, ke-empat, ke-lima, akan didapat :

$$-\cos x = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 x + \cdots,$$

$$-1 = 3!\, a_3, \qquad a_3 = -\frac{1}{3!};$$

$$\sin x = 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2a_5 x + \cdots,$$

$$0 = a_4;$$

$$\cos x = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2a_5 + \cdots,$$

$$1 = 5!\, a_5, \cdots.$$

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.}$$

Interval konvergensi deret sin x

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots.$$

Notasi umum :

$$\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\,!}$$

Dengan uji nisbah didapat :

$$\rho_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \times \frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right|$$

$$\rho_n = \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n-1)!(2n)(2n+1)} \times \frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right| = \left|\frac{x^2}{(2n+1)(2n)}\right|$$

$$\rho = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^2}{(2n+1)(2n)} \right| = 0$$

didapat :

$$\rho = 0 < 1$$

Untuk x berapa pun, jadi selang konvergensi untuk deret sin x adalah semua nilai x. Dengan kata lain deret sin x konvergen untuk semua nilai x.

Pernyataan deret dari fungsi	Selang konvergensi
1. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$	Semua nilai x
2. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots,$	Semua nilai x
3. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,$	Semua nilai x
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$	$-1 < x \leq 1$
5. $(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + \frac{p(p-1)(p-2)x^3}{3!} + \ldots,$	$\lvert x \rvert < 1$

Disebut **deret Binomial**, dengan p adalah bilangan real positif atau negatif

Teknik-teknik untuk mendapatkan pernyataan deret suatu fungsi

A. Perkalian suatu deret dengan suatu polinomial atau perkalian deret dengan deret

Contoh 1

Untuk mencari pernyataan deret dari : $(x+1)\sin x$

Maka kita lakukan perkalian $(x+1)$ **Dengan deret** $\sin x$ **Sbb :**

$$(x+1)\sin x = (x+1)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right)$$

$$= x + x^2 - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{3!} + \cdots.$$

Contoh 2

Untuk mencari pernyataan deret dari : $e^x \cos x$

Maka kita lakukan perkalian deret e^x **Dengan deret** $\cos x$ **Sbb :**

$$e^x \cos x = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \cdots$$

$$- \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{2!\,2!} \cdots$$

$$+ \frac{x^4}{4!} \cdots$$

$$= 1 + x + 0\,x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} \cdots = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} \cdots .$$

B. Pembagian suatu deret dengan deret lainnya atau dengan suatu polinomial

Contoh 1

Untuk mencari pernyataan deret dari : $\frac{1}{x}\ln(1+x)$

Maka kita lakukan pembagian $\ln(1+x)$ **Dengan deret** x **Sbb :**

$$\frac{1}{x}\ln(1+x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \cdots .$$

Contoh 2

Untuk mencari pernyataan deret dari : $\dfrac{1}{1+x}$

Maka kita lakukan pembagian 1 Dengan $(1+x)$ **Sbb :**

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 - x + x^2 - x^3 \cdots \\
\hline
1 + x & 1 \\
 & \underline{1 + x} \\
 & \quad -x \\
 & \quad -x - x^2 \\
 & \qquad\quad x^2 \\
 & \qquad\quad \underline{x^2 + x^3} \\
 & \qquad\qquad -x^3 \cdots ,
\end{array}
$$

Contoh 3

Untuk mencari pernyataan deret dari : $\tan x$

Maka kita lakukan pembagian deret $\sin x$ **dengan deret** $\cos x$ **Sbb :**

$$
\begin{array}{r l}
 & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 \cdots \\
\hline
1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} \cdots \Big) & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} \cdots \\
 & x - \dfrac{x^3}{2!} + \dfrac{x^5}{4!} \cdots \\
\hline
 & \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} \cdots \\
 & \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{6} \cdots \\
\hline
 & \dfrac{2x^5}{15} \cdots, (
\end{array}
$$

C. Menggunakan deret Binomial

Contoh 1

Untuk mencari pernyataan deret dari : $\dfrac{1}{x+1}$ **(contoh B2)**

Digunakan deret Binomial Sbb :

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \cdots$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots.$$

Hasilnya sama dengan contoh B2

D. Substitusi suatu polinomial atau suatu deret untuk variabel dalam deret lain

Contoh 1

Untuk mencari pernyataan deret dari : e^{-x^2}

Maka kita lakukan substitusi $-x^2$ **pada variabel x dalam deret** e^x **Sbb :**

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots .$$

Contoh 2

Untuk mencari pernyataan deret dari : $e^{\tan x}$ **kita lakukan substitusi sbb :**

$$e^{\tan x} = 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots\right) + \frac{1}{2!}\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)^2$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(x + \frac{x^3}{3} + \cdots\right)^3 + \frac{1}{4!}(x + \cdots)^4 + \cdots$$

$$= 1 + x + \qquad \frac{x^3}{3} + \qquad \cdots$$

$$+ \frac{x^2}{2!} \qquad + \frac{1}{2!}\frac{2x^4}{3} \cdots$$

$$+ \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3}{8}x^4 \cdots .$$

E. Metode Kombinasi

Contoh 1

Untuk mencari pernyataan deret dari : $arc\tan x$

Digunakan metode Sbb :

karena $$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tan } t \Big|_0^x = \text{arc tan } x,$$

Kita tuliskan $\dfrac{1}{1+t^2}$ **Sebagai deret Binomial sbb :**

$$(1+t^2)^{-1} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots;$$ **sehingga**

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \cdots \Big|_0^x .$$

$$\text{arc tan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots .$$

Soal latihan

1. $\dfrac{e^x}{1-x}$

2. $\sec x$

3. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$

4. $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

E. Uraian Taylor melalui uraian Mc-Laurin

Contoh 1

Untuk mencari pernyataan deret taylor dari fungsi $\ln x$ **disekitar x = 1, kita tuliskan:**

$$\ln x = \ln\,[1 + (x - 1)]$$

Lalu gunakan uraian McLaurin untuk :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

Kemudian ganti x dengan (x-1), didapat :

$$\ln x = \ln(1+(x-1)) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots,$$

Contoh 2

Cari uraian Taylor dari fungsi $\cos x$ **disekitar** $x = {}^{3\pi}\!/_{2}$

Kita tuliskan:

$$\cos x = \cos\left[\frac{3\pi}{2} + \left(x - \frac{3\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$$

Lalu gunakan uraian McLaurin untuk :

$$Sin\, x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots,$$

Kemudian ganti x dengan (x - 3π/2), didapat :

$$Cos\ x = Sin\left(x - {}^{3\pi}\!/_{2}\right) = \left(x - {}^{3\pi}\!/_{2}\right) - \frac{\left(x - {}^{3\pi}\!/_{2}\right)^3}{3!} + \frac{\left(x - {}^{3\pi}\!/_{2}\right)^5}{5!} + \ldots$$

Soal Latihan

Cari uraian Taylor dari fungsi-fungsi berikut melalui uraian McLaurin :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} \; disekitar \;\; a = 1$

2. $f(x) = \sqrt{x} \; disekitar \;\; a = 25$

Beberapa penggunaan deret

A. Perhitungan secara numerik

Contoh 1

hitunglah $\ln\sqrt{(1+x)/(1-x)} - \tan x$ **di x = 0,0015**

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \tan x\Big|_{x=0.0015} = \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7}\cdots\right)$$

$$- \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315}\cdots\right)\Big|_{x=0.0015}$$

$$= \frac{x^5}{15} + \frac{4x^7}{45}\cdots\Big|_{x=0.0015} = 5.06 \times 10^{-16}$$

Contoh 2

hitunglah $$\frac{d^4}{dx^4}\left(\frac{1}{x}\sin x^2\right)\Big|_{x=0.1}$$

$$\frac{1}{x}\sin x^2 = \frac{1}{x}\left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!}\cdots\right) = x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!}\cdots$$

Lakukan diferensiasi empat kali dan masukan x=0,1, didapat :

$$-\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2x}{3!} + \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6x^5}{5!}\Big|_{x=0.1} = -2 + 0.00025\cdots$$

B. Penjumlahan deret

Contoh 1

hitunglah $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$

Mulai dengan deret :

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Ambil x = 1

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Jadi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... = 0,69$$

Soal latihan

1. $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+.... = ...$ Gunakan $arc\tan x$

2. $\frac{\pi^2}{3!}-\frac{\pi^4}{5!}+\frac{\pi^6}{7!}- .... = ...$ Gunakan $\frac{\sin x}{x}$

3. $\ln 3+\frac{(\ln 3)^2}{2!}+\frac{(\ln 3)^3}{3!}+ .... = ...$ Gunakan e^x-1

C. Menghitung integral tertentu

Contoh :

hitunglah $\int_0^1 \sin x^2 \, dx$ **Integral Fresnel, dijumpai pada persoalan Difraksi Fresnel**

Mulai dengan deret :

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - ....$$

$$\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \cdots \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \cdots$$

$$= 0.33333 - 0.02381 + 0.00076 - \cdots = 0.31028 - .$$

D. Menghitung Limit

Contoh :

hitunglah $\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^x}{x}$.

Jawab :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - e^x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 + x + (x^2/2!) + \cdots)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(-1 - \frac{x}{2!} - \cdots \right) = -1.$$

Soal latihan

1. $\int_0^{0,01} \sqrt{t}e^{-t}\,dt$

2. $\dfrac{d^3}{dx^3}\left(\dfrac{x^2e^x}{1-x}\right) \quad di \;\; x = 0,01$

3. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$

E. Menentukan nilai e

Gunakan pernyataan deret pangkat untuk e^x dengan x = 1

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \ldots,$$

$$e = 2 + 0{,}5 + 0{,}17 + 0{,}\ldots + \ldots = 2{,}718..$$

F. Menentukan akar suatu bilangan

Tentukanlah niali $\sqrt{9}$ dengan deret Binomial

Deret Binomial :

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + \frac{p(p-1)(p-2)x^3}{3!} + \ldots,$$

Kita tidak bisa menulis $\sqrt{9}$ dengan $\sqrt{1+8}$ atau $(1+8)^{1/2}$

Karena konvergensi deret Binomial adalah $|x| < 1$

Untuk menyelesaikan ini gunakan resep berikut :

$$(a)^{1/n} = \left(\frac{b}{c}\right)\left(a\left(\frac{c}{b}\right)^n\right)^{1/n}$$ Dengan b >> c

Jadi nilai $\sqrt{9}$

$$(9)^{1/2} = \left(\frac{10}{2}\right)\left(9\left(\frac{2}{10}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$(9)^{1/2} = 5\left(\frac{36}{100}\right)^{1/2} = 5\left(\frac{100}{100}-\frac{64}{100}\right)^{1/2} = 5(1-0,64)^{1/2}$$

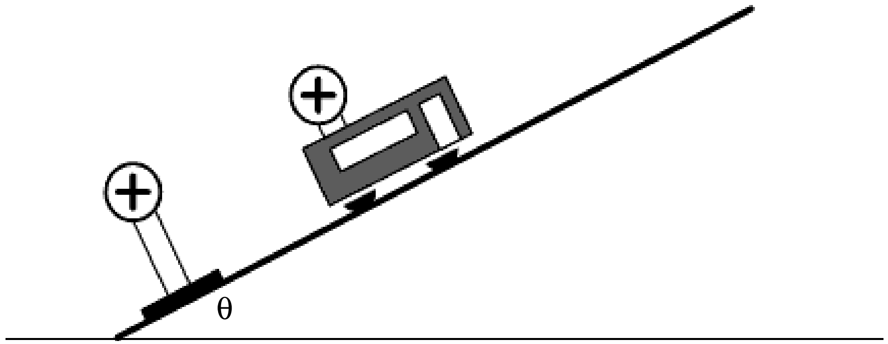
$$(9)^{1/2} = 5\left(1+0,5(-0,64)-\frac{1(0,64)^2}{8}+\ldots\right) = 3$$

Itulah hasilnya

Aplikasi Deret Pangkat pada Persoalan Fisika

Contoh 1

Selesaikan dengan menggunakan metode deret pangkat yang cocok !
Sebuah kereta luncur bermassa m berada pada sebuah jalur tanjakan dengan sudut kemiringan θ terhadap horizontal. Di dekat bagian bawah jalur terdapat sebuah tiang bermuatan listrik positif. Muatan positif yang sama ditempatkan pula di atas kereta. Jika gesekan kereta luncur dengan lintasan diabaikan dan diasumsikan percepatan gravitasi g, berapakah besar gaya tolak Coulomb (F) yang diperlukan agar kereta luncur tersebut tetap diam di tempatnya. Petunjuk tuliskan F dalam deret pangkat dari θ.



Aplikasi Deret Pangkat pada Persoalan Fisika

Solusi : Agar kereta tetap di tempatnya, maka :

$$\sum F = 0$$

$$F_C = F_{w\sin\theta}$$

$$F_C = mg\sin\theta$$

$$F_C = mg\left(\theta - \frac{\theta^3}{3\,!} + \frac{\theta^5}{5\,!} + \ldots.\right)$$

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan Metode Deret Pangkat

Cari solusi PDB berikut :

$$y' = 2xy$$

Dengan metode pemisahan variabel

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \qquad \frac{dy}{y} = 2x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x\,dx$$

$$\ln y = x^2 + \ln c$$

$$\boxed{y = Ce^{x^2}}$$

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan Metode Deret Pangkat

Mencari solusi dengan metode deret pangkat, dimulai dengan :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

PDB yang dicari solusinya berorde satu (y'), maka perlu dicari y' :

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots$$

PDB :

$$y' = 2xy \quad \Rightarrow \quad y' - 2xy = 0$$

$$\begin{array}{rl} y' = & a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots \\ -2xy = & \quad -2a_0 x - 2a_1 x^2 - 2a_2 x^3 + \ldots \\ \hline 0 = & \ldots. + \ldots\ldots x + \ldots\ldots x^2 + \ldots\ldots x^3 + \ldots. \end{array} \quad +$$

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan Metode Deret Pangkat

Buat matriks seperti berikut :

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & x^0 & x & x^2 & x^3 \\
\hline
y' & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 4a_4 \\
-2xy & 0 & -2a_0 & -2a_1 & -2a_2 \\
\hline
+ & & & &
\end{array}
$$

$$0 = (a_1 - 0) + (2a_2 - 2a_0) + (3a_3 - 2a_1) + (4a_4 - 2a_2) + \ldots.$$

didapat :

$$a_1 - 0 = 0 \qquad 2a_2 - 2a_0 = 0 \qquad 3a_3 - 2a_1 = 0 \qquad 4a_4 = 2a_2$$

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = a_0 \qquad a_3 = \tfrac{2}{3}a_1 = 0 \qquad a_4 = \tfrac{2}{4}a_2 = \tfrac{1}{2}a_0$$

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan Metode Deret Pangkat

Dengan demikian :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots$$

$$y = a_0 + 0x + a_0 x^2 + 0x^3 + \frac{1}{2} a_0 x^4 + 0x^5 + \frac{1}{3} a_0 x^6 + \dots.$$

$$y = a_0 + a_0 x^2 + \frac{1}{2!} a_0 x^4 + \frac{1}{3!} a_0 x^6 + \dots.$$

$$y = a_0 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \dots. \right)$$

$$\boxed{y = a_0 e^{x^2}}$$

Sama dengan hasil sebelumnya

Soal Latihan

Cari solusi PDB Berikut dengan metode deret pangkat

1. $y' = 3x^2 y$

2. $y' = xy + x$

3. $y'' + y = 4\sin 3x$

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan Metode Deret Pangkat

Cari solusi PDB berikut :

$$y' = xy + x \longrightarrow y' = x(y+1)$$

Dengan metode pemisahan variabel

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1) \longrightarrow \frac{dy}{(y+1)} = x\,dx$$

$$\int \frac{dy}{(y+1)} = \int x\,dx$$

....

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan Metode Deret Pangkat

Mencari solusi dengan metode deret pangkat, dimulai dengan :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

PDB yang dicari solusinya berorde satu (y’), maka perlu dicari y’ :

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots$$

PDB :

$$y' = xy + x \quad \Longrightarrow \quad y' - xy = x$$

$$\begin{array}{rl}
y' = & a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots \\
-xy = & \quad -a_0 x \; - a_1 x^2 \; - a_2 x^3 + \ldots \\
\hline
x = & \ldots. + \ldots\ldots x + \ldots\ldots x^2 + \ldots\ldots x^3 + \ldots.
\end{array} \quad +$$

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan Metode Deret Pangkat

Buat matriks seperti berikut :

$$
\begin{array}{r|cccc}
 & x^0 & x & x^2 & x^3 \\
\hline
y' & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 4a_4 \\
-xy & 0 & -a_0 & -a_1 & -a_2 \\
\hline
+ & & & &
\end{array}
$$

$$x = (a_1 - 0) + (2a_2 - a_0)x + (3a_3 - a_1)x^2 + (4a_4 - a_2)x^3 + \dots.$$

didapat :

$$a_1 - 0 = 0$$

$$a_1 = 0$$

$$2a_2 - a_0 = 1$$

$$a_2 = \frac{1 + a_0}{2} = \frac{1}{2} + \frac{a_0}{2}$$

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan Metode Deret Pangkat

Buat matriks seperti berikut :

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x^0 & x & x^2 & x^3 \\
\hline
y' & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & 4a_4 \\
-xy & 0 & -a_0 & -a_1 & -a_2 \\
\hline
+ & & & &
\end{array}
$$

$$x \;=\left(a_1-0\right)+\left(2a_2-a_0\right)x+\left(3a_3-a_1\right)x^2+\left(4a_4-a_2\right)x^3+\ldots.$$

didapat :

$$3a_3-a_1=0$$

$$a_3=\tfrac{1}{3}a_1=0$$

$$4a_4-a_2=0$$

$$a_4=\tfrac{1}{4}a_2=\tfrac{1}{4}\left(\frac{1+a_0}{2}\right)=\frac{1}{8}+\frac{a_0}{8}$$

dst

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan Metode Deret Pangkat

Dengan demikian :

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots$$

$$y = a_0 + 0x + \left(\frac{1}{2} + \frac{a_0}{2}\right)x^2 + 0x^3 + \left(\frac{1}{8} + \frac{a_0}{8}\right)x^4 + 0x^5 + \ldots.$$

$$y = a_0 + \left(\frac{1}{2} + \frac{a_0}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{8} + \frac{a_0}{8}\right)x^4 + \ldots.$$

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \ldots.\right) + a_0\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + \ldots.\right)$$