Fungsi Khusus Lanjutan (PDB)

MATEMATIKA FISIKA II

JURDIK FISIKA FPMIPA UPI

Bandung

Fungsi Khusus dalam bentuk PDB terdiri atas :

- Polinomial Legendre dalam berbagai jenis
- Fungsi Bessel dalam berbagai bentuk
- Polinomial Hermite
- Polinomial Laguarre

- Semua point di atas diperoleh dari solusi-solusi Persamaan Differensial (PD) Laguarre, PD Bessel, dst

Diperlukan pengetahuan tentang metode-metode untuk mencari solusi PD :

- Telah dipelajari metode analitik untuk mencari solusi PDB orde I dengan PDB orde II dikenal :
  - Metode pemisahan variable
  - Metode linier orde I
  - Metode PD homogen
  - Metode Bernoulli

  PDB ORDE I

  - Metode reduksi orde
  - Metode Variasi parameter

  PDB ORDE II
- Metode aproksimasi dengan deret pangkat

Mencari Solusi PDB dengan metode deret pangkat

- Solusi PDB = hubungan eksplisit antara variabel terikat dan variabel bebas yang jika kita substitusikan ke PDB yang bersangkutan akan menghasilkan suatu identitas.
- Dengan metode deret pangkat kita misalkan :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots + a_n x^n$$

$$y' = 0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots + na_n x^{n-1}$$

$$y'' = 0 + 0 + 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2}$$

<u>Sudah dibahas dalam deret pangkat</u>

Persamaan Diferensial Legendre

$(1-x^2)y''-2xy'+\ell(\ell+1)y=0 \longrightarrow$ metode deret pangkat $y=\sum_{n=0}^{1} a_n x^n$

Solusi :

$$y=a_0\left(1-\frac{\ell(\ell+1)}{2!}x^2+\frac{\ell(\ell+1)+(\ell-2)(\ell+3)}{4!}x^4-\ldots\right)$$
$$+a_1\left(x-\frac{(\ell-1)(\ell-2)}{3!}x^3+\frac{(\ell+1)+(\ell+2)(\ell-3)(\ell-4)}{5!}x^5-\ldots\right)+\ldots$$

Dengan menggunakan tes rasio maka deret ini memiliki selang konvergensi $x^2<1$ dan tidak konvergensi untuk

$$x^2=1$$

Polinomial Legendre

$\ell \quad \rightarrow$ suatu konstanta sebarang

$\ell = 0 \Rightarrow y = a_0 +$ deret pangkat dengan koefisien a_1

$\ell = 1 \Rightarrow y = a_1 x +$ deret pangkat dengan koefisien a_0

$\ell = 2 \Rightarrow y = a_0(1 - 3x^2) +$ deret pangkat dengan koefisien a_1

$\ell = 3 \Rightarrow y = a_1(x - \frac{5}{3}x^3) +$ deret pangkat dengan koefisien a_0

Secara umum setiap nilai ℓ ,

dihasilkan suatu deret pangkat dan lainnya suatu polinomial dimana deret pangkat yang dihasilkan bersifat divergen pada nilai

$x^2 = 1$. Selanjutnya jika nilai-nilai a_0 dan a_1

Pada setiap polinomial dipilih sedemikian rupa sehingga nilai

$y = 1$ untuk $x^2 = 1$

Maka akan dihasilkan suatu polinomial yang disebut polynomial legendre ditulis dengan

$P_\ell(x)$

Polynomial Legendre

$$\therefore \quad \ell = 0 \Rightarrow y = a_0$$

$$\Big\Downarrow \; y = 1, x = 1$$

$$1 = a_0 \Rightarrow a_0 = 1$$

$$P_0(x) = 1$$

$$\therefore \quad \ell = 1 \Rightarrow y = a_1 x$$

$$\Big\Downarrow \; y = 1, x = 1$$

$$1 = a_1 \cdot 1 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$\therefore \ \ell = 2 \Rightarrow y = a_0(1 - 3x^2)$

$y = 1, x = 1$

$$1 = a_0\left(1 - 3(1)^2\right)$$

$$1 = a_0(-2)$$

$$a_0 = -\frac{1}{2}$$

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}(1 - 3x^2)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_2(x) = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$\therefore \ \ell = 3 \Rightarrow y = a_1\left(x - \frac{5}{3}x^3\right)$

$y = 1, x = 1$

$$1 = a_1\left(1 - \frac{5}{3}\right)$$

$$a_1 = -\frac{3}{2}$$

$$P_3(x) = -\frac{3}{2}\left(x - \frac{5}{3}x^3\right)$$

$$P_3(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{3}x^3 - x\right)$$

$$P_3(x) = \left(\frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right)$$

Formula Rodriguez :

$$\boxed{P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}\left(x^2 - 1\right)^\ell}$$

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!}\frac{d^0}{dx^0}\left(x^2 - 1\right)^0 = 1 \Rightarrow P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!}\frac{d^1}{dx^1}\left(x^2 - 1\right)^1 = \frac{1}{2}(2x) \Rightarrow P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2 - 1\right)^2 = \frac{1}{8}\left(\frac{d}{dx}\left(2\left(x^2 - 1\right)(2x)\right)\right) = \frac{1}{8}\left(\frac{d}{dx}\left(4x\left(x^2 - 1\right)\right)\right)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{8}\left(4x\left(x^2 - 1\right) + 4x(2x)\right) = \frac{1}{8}\left(4x^2 - 4 + 8x^2\right) = \frac{1}{8}\left(12x^2 - 4\right)$$

$$\Rightarrow P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Fungsi Pembangkit Polinomial Legendre

Fungsi pembangkit polinomial legendre dirumuskan sebagai berikut :

$$\boxed{\phi(x,h) = \left(1 - 2xh + h^2\right)^{-\frac{1}{2}}, |h| < 1}$$

Disebut pungsi pembangkit polinomial legendre karena dari fungsi ini dapat dibangkitkan polinomial legendre.

Misalkan : $2xh - h^2 = y$

Maka $\phi(y) = (1 - y)^{-\frac{1}{2}}$ gunakan uraian deret binomial $(1 + x)^p$

$$\phi(y) = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + \ldots$$

Substitusi kembali:

$$y = 2xh - h^2$$

$$\phi(x,h) = 1 + xh - \frac{1}{2}h^2 + \frac{3}{8}\left(2xh - h^2\right)^2 + \ldots$$

$$\phi(x,h) = 1 + xh - \frac{1}{2}h^2 + \frac{3}{8}\left(4x^2h^2 - 4xh^3 + 4h^4\right) + \ldots$$

$$\phi(x,h) = 1 + xh + h^2\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) + \ldots$$

$$\phi(x,h) = P_0(x) + hP_1(x) + h^2P_2(x) + \ldots$$

Fungsi Pembangkit Polinomial Legendre berguna untuk mencari hubungan-hubungan rekursif polinomial legendre:

a) $\ell P_\ell(x) = (2\ell - 1)xP_{\ell-1}(x) - (\ell - 1)P_{\ell-2}(x)$

b) $xP'_\ell(x) - P'_{\ell-1}(x) = \ell P_\ell(x)$

c) $P'_\ell(x) - xP'_{\ell-1}(x) = \ell P_{\ell-1}(x)$

d) $(1 - x^2)P'_\ell(x) = \ell P_{\ell-1}(x) - \ell x P_\ell(x)$

e) $(2\ell + 1)P_\ell(x) = P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x)$

Buktikan hubungan rekursif a)

$$\phi = \left(1 - 2xh + h^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial h} = -\frac{1}{2}\left(1 - 2xh + h^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(-2x + 2h\right)$$

$$\left(1 - 2xh + h^2\right)\frac{\partial \phi}{\partial h} = \left(x - h\right)\phi$$

Tetapi $\phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell} P_{\ell}(x)$

Maka:

$$\left(1-2xh+h^2\right)\frac{\partial}{\partial h}\sum_{\ell=0}^{\infty}h^\ell P_\ell(x)=\left(x-h\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}h^\ell P_\ell(x)$$

$$\left(1-2xh+h^2\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}\ell h^{\ell-1}P_\ell(x)=\left(x-h\right)\sum_{\ell=0}^{\infty}h^\ell P_\ell(x)$$

$$\ell h^{\ell-1}P_\ell(x)-2xh\ell h^{\ell-1}P_\ell(x)+h^2\ell h^{\ell-1}P_\ell(x)=xh^\ell P_\ell(x)-hh^\ell P_\ell(x)$$

$$\ell h^{\ell-1}P_\ell(x)-2x\ell h^\ell P_\ell(x)+\ell h^{\ell+1}P_\ell(x)=xh^\ell P_\ell(x)-h^{\ell+1}P_\ell(x)$$

$$\ell h^{\ell-1}P_\ell(x)-2x\left(\ell-1\right)h^{\ell-1}P_{\ell-1}(x)+\left(\ell-2\right)h^{\ell-1}P_{\ell-2}(x)=xh^{\ell-1}P_{\ell-1}(x)-h^{\ell-1}P_{\ell-2}(x)$$

$$\ell P_\ell(x)-2x\left(\ell-1\right)P_{\ell-1}(x)+\left(\ell-2\right)P_{\ell-2}(x)=xP_{\ell-1}(x)-P_{\ell-2}(x)$$

Atau:

$$\ell P_\ell(x) = \left(2\ell - 1\right) x P_{\ell-1}(x) - \left(\ell - 1\right) P_{\ell-2}(x)$$

$$\left.\begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ \\ P_1(x) = x \end{array}\right\} \ell = 2 \longrightarrow 2P_2(x) = \left(2\cdot 2 - 1\right) x P_1(x) - (1) P_0(x)$$

$$2P_2(x) = 3x \cdot x - 1$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

Nyatakan $x - x^3$ dalam kombinasi linier polinomial-polinomial legendre!

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \qquad x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}x$$

$$x - x^3 = x - \left(\frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}x\right) = x - \frac{2}{5}P_3(x) - \frac{3}{5}x$$

$$= \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}P_3(x)$$

$$= \frac{2}{5}\left(P_1(x) - P_3(x)\right)$$

Ortogonalitas Polinomial Legendre:

Dua buah vektor dikatakan ortogonal jika keduanya saling tegak lurus mengapit sudut 90^o . Menurut perkalian titik *(dot product)* dua vektor yang ortogonal memenuhi :

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos 90^0$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = 0$$

Karena $\vec{A} = A_1\hat{i} + A_2\hat{j} + A_3\hat{k}$

Maka $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = 0$ atau

$$\sum_{i=1}^{3} A_iB_i = 0 \rightarrow 3D$$

Secara umum dua buah vektor yang saling tegak lurus memenuhi

$$\sum_{i=1} A_1 B_1 = 0$$

Analogi dengan itu jika kita memiliki dua fungsi kontinu yaitu $A(x)$ dan $B(x)$ maka kedua fungsi tersebut akan saling ortogonal dalam selang (a,b) jika memenuhi:

$$\int_a^b A(x)B(x)dx = 0$$

Jika $A(x)$ $B(x)$ merupakan fungsi kompleks maka syarat $A(x)$ dan $B(x)$ orthogonal ditulis sebagai berikut :

$$\int_a^b A^*(x)B(x)dx = 0$$

$A^*(x) \rightarrow$ kompleks berkonjugat dengan $A(x)$

Jika kita memiliki himpunan fungsi $A_n(x)$ dimana $n = 1,2,3,\ldots, dst$

$$\int_a^b A_n(x) A_m(x) dx = \begin{cases} 0; m \neq n \\ \text{konstanta jika } m = n \neq 0 \end{cases}$$

maka fungsi-fungsi $A_n(x)$ disebut himpunan fungsi ortogonal

Contoh :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\, dx = \begin{cases} 0; m \neq n \\ \pi; m = n \neq 0 \end{cases}$$

Maka $\sin nx$ merupakan himpunan fungsi-fungsi yang ortogonal dalam selang $(-\pi, \pi)$

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_m(x)\, dx = 0$$ kecuali untuk $\ell = m$

<u>Pertanyaan apakah?</u>

$P_1(x)$ ortogonal dengan $P_2(x)$

$P_0(x)$ ortogonal dengan $P_3(x)$

$P_2(x)$ ortogonal dengan $P_5(x)$

Bukti:

PD Legendre $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+\ell\left(\ell+1\right)y=0$

$\Rightarrow y = P_\ell(x)$

$$\left(1-x^2\right)P_\ell''(x)-2xP_\ell'(x)-\ell\left(\ell+1\right)P_\ell(x)=0$$

$$\otimes\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_\ell'(x)\right]+\ell\left(\ell+1\right)P_\ell(x)=0 \qquad \text{atau}$$

$$\otimes\otimes\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right]+m\left(m+1\right)P_m(x)=0$$

$$\otimes P_m(x)\left\{\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_\ell'(x)\right]+\ell\left(\ell+1\right)P_\ell(x)\right\}=0$$

$$\otimes\otimes P_\ell(x)\left\{\left[\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right]+m\left(m+1\right)P_m(x)\right\}=0$$

Selanjutnya $\otimes$ dikurangi $\otimes\otimes$ didapat : $\otimes\otimes\otimes$

$$P_m(x)\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_\ell'(x)\right]-P_\ell(x)\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)P_m'(x)\right]+\left[\ell(\ell+1)-m(m+1)\right]P_m(x)P_\ell(x)=0$$

dua suku pertama $\otimes \otimes \otimes$ menjadi :

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(P_m(x)P_\ell'(x)-P_\ell(x)P_m'(x)\right)\right]+\left[\ell(\ell+1)-m(m+1)\right]P_m(x)P_\ell(x)=0$$

Kemudian lakukan integrasi $\otimes \otimes \otimes$ untuk selang $(-1,1)$

$$\int_{-1}^{1}\left\{\underbrace{\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(P_m(x)P_\ell'(x)-P_\ell(x)P_m'(x)\right)\right]}_{\text{Suku I}}+\underbrace{\left[\ell(\ell+1)-m(m+1)\right]P_m(x)P_\ell(x)}_{\text{Suku II}}\right\}dx=0$$

Suku I $= \int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\left(P_m(x)P_\ell'(x)-P_\ell(x)P_m'(x)\right)\right]dx$

$$= \left[\left(1-x^2\right)\left(P_m(x)P_\ell'(x)-P_\ell(x)P_m'(x)\right)\right]_{-1}^{1} = 0$$

Suku II $= \left[\ell(\ell+1)-m(m+1)\right]\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_m(x)dx$

Suku I + Suku II = 0

$$0+\left[\ell(\ell+1)-m(m+1)\right]\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_m(x)dx = 0$$

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_m(x)dx = \frac{0}{\left[\ell(\ell+1)-m(m+1)\right]} = 0$$

Polinomial-polinomial legendre merupakan fungsi-fungsi yang saling ortogonal:

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_m(x)\,dx = 0}$$

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_m(x)\,dx = 0$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^{1} x\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right)dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x\right)dx = \left(\frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2\right)_{-1}^{1} = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\int_{-1}^{1} P_1(x) P_1(x)\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Normalisasi polinomial legendre

Vektor satuan

$$\hat{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \longrightarrow$$ Besarnya satu satuan

disebut proses normalisasi
tinjau untuk fungsi

$$\int_a^b A(x)A(x)dx = \int_a^b |A(x)|^2 dx = N^2$$

Berapa normalisasi $A(x)$ dalam selang (a,b) ?

Jadi jika $A(x)$ dinormalisasi dalam selang (a,b) maka

$A(x)$ dikali dengan $\frac{1}{N}$ setelah dinormalisasi

$$\frac{A(x)}{N} nilainya = 1$$

$\frac{1}{N}$ disebut faktor normalisasi

Contoh:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin nx dx = \pi = \left(\sqrt{\pi}\right)^2$$

Normalisasi fungsi $\sin nx$? $N = \sqrt{\pi}$

Faktor normalisasi fungsi $\sin nx$? $\frac{1}{N} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin nx = 1$$

Berapa normalisasi untuk $P_\ell(x)$?

Hubungan Rekursif Polinomial Legendre b) $xP'_\ell(x) - P'_{\ell-1}(x) = \ell P_\ell(x)$

Kalikan $\otimes$ dengan $P_\ell(x)$

$$\ell P_\ell(x) P_\ell(x) = xP_\ell(x) P'_\ell(x) - P_\ell(x) P'_{\ell-1}(x) \otimes\otimes$$

$\otimes\otimes$ integrasikan untuk selang $(-1,1)$

$$\ell \int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_\ell(x) dx = \int_{-1}^{1} xP_\ell(x) P_\ell'(x) dx - \int_{-1}^{1} \underbrace{P_\ell(x) P_{\ell-1}'(x) dx}_{0}$$

$$\ell \int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_\ell(x) dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{xP_\ell(x) P_\ell'(x) dx}_{bypart \quad \int udv}$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = P_\ell(x)P_\ell'(x)dx = P_\ell(x)d\left(P_\ell(x)\right)$$

$$v = \frac{1}{2}\left(P_\ell(x)\right)^2$$

Ruas kanan dengan integral *bypart*:

$$\left[\frac{1}{2}x\left(P_\ell(x)\right)^2\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_\ell(x)dx$$ dengan demikian:

$$\ell\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_\ell(x)dx = \left[\frac{1}{2}x\left(P_\ell(x)\right)^2\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_\ell(x)dx$$

$$\left(\ell + \frac{1}{2}\right)\int_{-1}^{1} P_\ell(x)P_\ell(x)dx = \frac{1}{2}\left(P_\ell(1)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(P_\ell(-1)\right)^2$$

Jadi $\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_\ell(x)\, dx = \dfrac{1}{\ell + \frac{1}{2}}$

$$\boxed{\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_\ell(x)\, dx = \frac{1}{\frac{2\ell+1}{2}} = \frac{2}{2\ell+1}}$$

Berapa normalisasi untuk $P_\ell(x)$? $N = \sqrt{\dfrac{2}{2\ell+1}}$

Faktor normalisasi ? $\dfrac{1}{N} = \sqrt{\dfrac{2\ell+1}{2}}$

Fungsi Legendre yang Diasosiasikan

PDB yang mirip dengan Legendre

$$(1-x^2)y''-2xy+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]y=0 \quad \text{dengan} \quad m^2 \leq \ell^2$$

PDB ini memiliki solusi : $y=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\dfrac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$

Solusi ini disebut fungsi legendre yang diasosiasikan yang ditulis sebagai :

$$P_\ell^m(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m}{dx^m}P_\ell(x)$$

Formula Rodriguez untuk mencari fungsi legendre yang diasosiasikan :

$$P_\ell^m(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\left(1 - x^2\right)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}}\left(x^2 - 1\right)^\ell$$

Untuk m negatif fungsi legendre asosiasi dapat ditentukan dengan formula sebagai berikut :

$$P_\ell^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} P_\ell^m(x)$$

Fungsi $P_\ell^m(x)$ untuk setiap m merupakan himpunan fungsi-fungsi yang orthogonal pada selang $(-1,1)$ sehingga :

$$\int_{-1}^{1} P_\ell^m(x) P_n^m(x)\,dx = 0, \ell \neq n$$

Normalisasi fungsi Legendre yang diasosiasikan adalah :

$$\int_{-1}^{1} P_m^\ell(x) P_\ell^m(x)\,dx = \frac{2}{2\ell+1}\frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!}$$

PDB legendre diasosiasikan sering juga ditulis dalam bentuk

sebagai berikut :

$$\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dy}{d\theta}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]y=0$$

Fungsi ini diperoleh dengan mengganti $x = \cos\theta$

$$P_1^1(\cos\theta)?$$

$$P_1^1(\cos\theta)?$$

$$P_1^1(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}P_1(x)$$

$$P_1^1(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x)$$

$$P_1^1(x)=\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 1$$

$$P_1^1(x)=\sqrt{\left(1-x^2\right)}$$

$$P_1^1(x)=\sqrt{\left(1-\cos^2 x\right)}$$

$$P_1^1(x)=\sqrt{\left(\sin^2 x\right)}$$

$$P_1^1(x)=\sin x$$

PDB Bessel

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - p^2\right)y = 0$$

P adalah konstan, tidak perlu bilangan bulat, disebut orde fungsi Bessel. Dengan menggunakan metode deret pangkat, PDB bessel dapat dicari solusinya.

Solusi pertama yang memenuhi PDB bessel adalah

$$y = a_0 x^p \Gamma(1+p)\left[\frac{1}{\Gamma(1+p)} - \frac{1}{\Gamma(2+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!\Gamma(3+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3!\Gamma(4+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots\right]$$

atau

$$y = a_0 2^p \left(\frac{x}{2}\right)^p \Gamma(1+p)\left[\frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1+p)} - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{\Gamma(3)\Gamma(3+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{\Gamma(4)\Gamma(4+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^6 + \ldots\right]$$

Jika dipilih

$$y = a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(1+p)}$$ atau $$a_0 = \frac{1}{2^0 P!}$$ Maka:

y disebut sebagai Fungsi Bessel

Jenis pertama yang ditulis sebagai $J_p(x)$

Dengan demikian :

$$J_p(x) = \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^p - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2+p} + \frac{1}{\Gamma(3)\Gamma(3+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{6+p} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Solusi kedua yang memenuhi PDB Bessel menghasilkan fungsi bessel jenis kedua sebagai berikut :

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-p+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

Hubungan

$$J_p(x) \text{ dan } J_{-p}(x) \rightarrow J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$$

$$\rightarrow p = 0$$

$$J_0(x) = \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1)}\left(\frac{x}{2}\right)^0 - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2)}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{\Gamma(3)\Gamma(3)}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \ldots$$

$$= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{64 \cdot 36} + \ldots$$

Hubungan Rekursif Fungsi Bessel :

a) $$\frac{d}{dx}\left[x^{p} J_{p}(x)\right] = x^{p} J_{p-1}(x)$$

b) $$\frac{d}{dx}\left[x^{-p} J_{p}(x)\right] = -x^{-p} J_{p+1}(x)$$

c) $$J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_{p}(x)$$

d) $$J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J_{p}'(x)$$

e) $$J_{p}'(x) = -\frac{p}{x} J_{p}(x) + J_{p-1}(x) = \frac{p}{x} J_{p}(x) - J_{p+1}(x)$$

PDB umum yang solusinya mengandung fungsi bessel

$$y''+\frac{1-2a}{x}y'+\left[\left(bcx^{c-1}\right)^2+\frac{a^2-p^2c^2}{x^2}\right]y=0$$

Solusinya $y=x^aJ_p\left(bx^c\right)$

$$y''-\frac{1}{x}y'+\left(4+\frac{1}{x^2}\right)y=0$$

$$x^0 = x^{2c-2}$$

$$\boxed{y = xJ_0(2x)}$$

$$1-2a=-1 \qquad b^2c^2=4 \qquad 2c-2=0 \qquad a^2-p^2c^2=1$$

$$2a=2 \qquad b^2(1)=4 \qquad 2c=2 \qquad (1)^2-p^2(1)^2=1$$

$$a=1 \qquad b=\pm 2 \qquad c=1 \qquad p^2=0$$

$$p=0$$

Jenis-jenis lain fungsi bessel:

a) Fungsi Bessel jenis ketiga disebut fungsi Henkel

$$\left.\begin{aligned} H_p^{(1)}(x) &= J_p(x) + iN_p(x) \\ H_p^{(2)}(x) &= J_p(x) - iN_p(x) \end{aligned}\right\} \text{Bandingkan dengan } e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

di sini $$N_p(x) = Y_p(x) = \frac{\cos(\pi p) J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin(\pi p)}$$

b) Fungsi Bessel Hiperbolik

$$I_p(x) = i^{-p} Jp(ix)$$

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2} i^{p+1} H_p^{(1)}(ix)$$

c) Fungsi Bessel Sperik

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{(2n+1)}{2}}(x) = x^n \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\sin x}{x} \right)$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{\frac{(2n+1)}{2}}(x) = -x^n \left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\cos x}{x} \right)$$

$$h_p^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_p(x)$$

$$h_p^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_p(x)$$

Ortogonalitas Fungsi Bessel

$$\int_0^1 xJ_p(ax)J_p(bx)dx = 0; a \neq b$$

a dan b pembuat nol $J_p(x)$

Diketahui $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$

Dengan menggunakan hubungan rekursif Fungsi Bessel.
Cari

$J_{\frac{3}{2}}(x)$ kemudian cari $J_0(x), J_1(x)$

$J_{\frac{3}{2}}(x) = ?$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) =$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x)\right] = -x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x\right)\right] = -x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x\right] = -x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(x)$$

$$-x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin x}{x}\right] = J_{\frac{3}{2}}(x)$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = -x^{-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right)$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x = \frac{\sin x}{x}$$

$$\boxed{J_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot x^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right) = \frac{x\cos x - \sin x}{2}}$$

Fungsi Hermite

Persamaan Differensial untuk fungsi hermite :

$$y_n'' - x^2 y_n = -(2n+1)y_n ; n = 0,1,2,3$$

Solusi PDB ini adalah $y_n = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$ disebut sebagai fungsi Hermite

Jika fungsi hermite ini dikalikan dengan $(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}$

akan didapat polinomial hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Untuk $n = 0,1,2,...$ didapat

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

Polinomial hermite memenuhi persamaan differensial hermite

$$y_n'' - 2xy' + 2ny = 0$$

Ortogonalitas polinomial hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\, dx = 0; n \neq m = 0$$

Normalisasi polinomial hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,2^n n!; n = m$$

Fungsi pembangkit polinomial hermite

$$\phi(x,h) = e^{2xh-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{h^n}{n!}$$

Hubungan rekursif polinomial hermite :

a) $H_n{}'(x) = 2nH_{n-1}(x)$

b) $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$

$$\boxed{H_2(x) = 2x(2x) - 2 = 4x^2 - 2}$$

Fungsi Laguarre

Polinomial laguarre merupakan solusi dari PDB :

$$xy''+(1-x)y'+ny=0$$

Dapat dicari dengan formula Rodriguez sebagai berikut :

$$L_n(x)=\frac{1}{n!}e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

Untuk $n=0,1,2,\ldots$ didapat:

$$L_0(x)=1$$

$$L_1(x)=1-x$$

$$L_2(x)=1-2x+\frac{x^2}{2}$$

Ortogonalitas polinomial laguarre

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_k(x) dx = 0; n \neq k$$

Normalisasi polinomial laguarre

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_k(x) dx = 1; n = k$$

Fungsi pembangkit polinomial laguarre

$$\phi(x,h) = \frac{e^{-\frac{xh}{(1-h)}}}{1-h} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) h^n$$

Hubungan rekursif polinomial laguarre :

a) $L'_{n+1}(x) - L'_n(x) + L_n(x) = 0$

b) $(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$

c) $xL'_n(x) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$

HAVE FINISHED…

Go to the next concept…