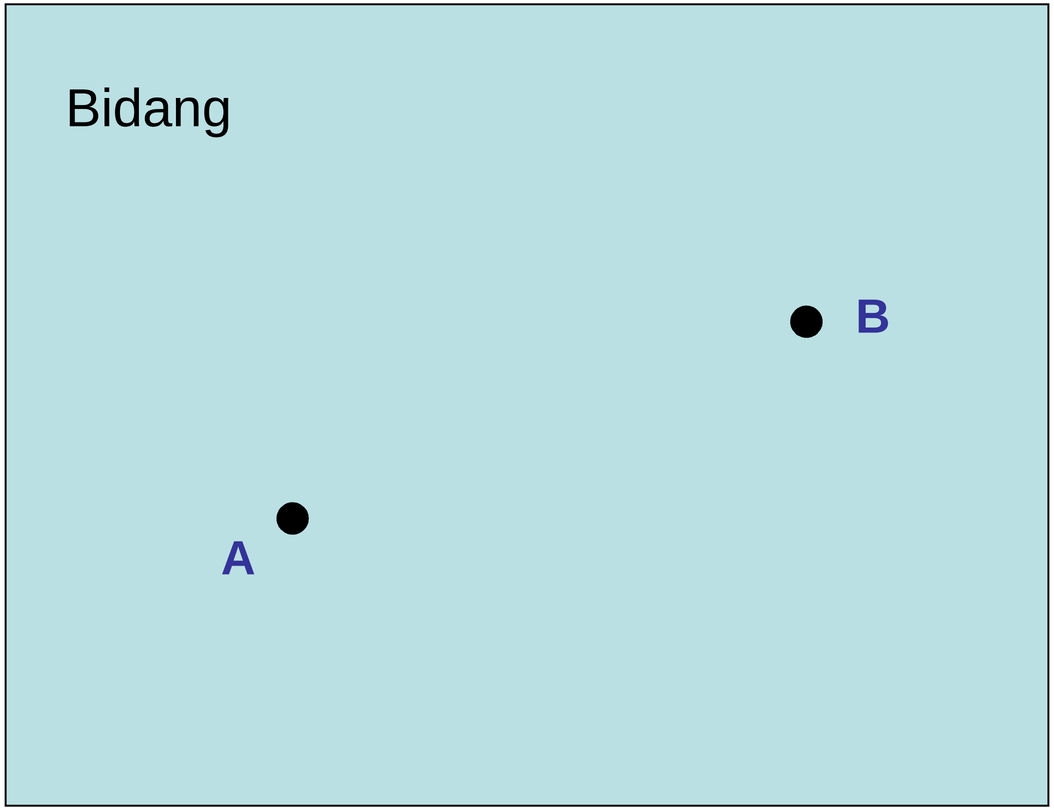
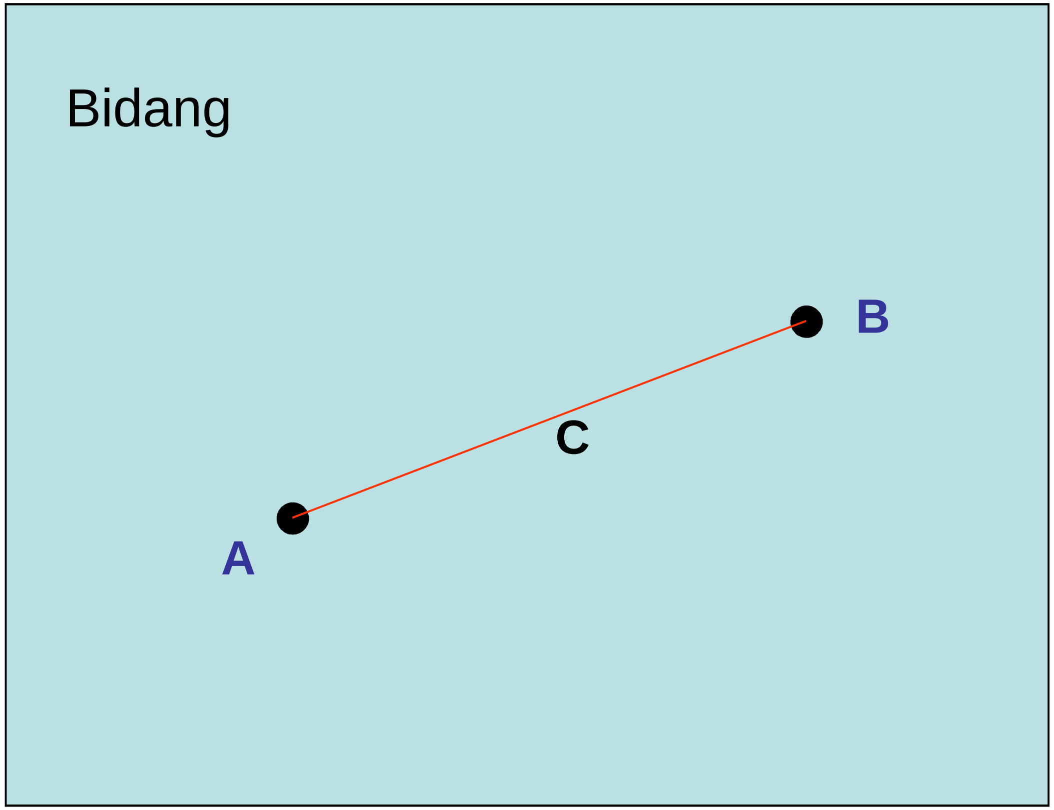
KALKULUS VARIASI

Simak Pertanyaan



Bentuk kurva apakah yang menunjukkan jarak terpendek yang menghubung-kan titik A dan titik B dalam bidang datar di samping ?

Simak Pertanyaan



Tentu mudah jawabnya, yaitu kurva C yang berbentuk garis lurus yang menghubungkan langsung A dan B.

Persoalan kurva yang menandai jarak terpendek yang menghubungkan dua titik dalam bidang yang dikenal sebagai "Geodesic" tercakup dalam persoalan nilai "maksimum" atau "minimum" suatu fungsi, atau lebih umum disebut sebagai persoalan nilai "Stasioner".

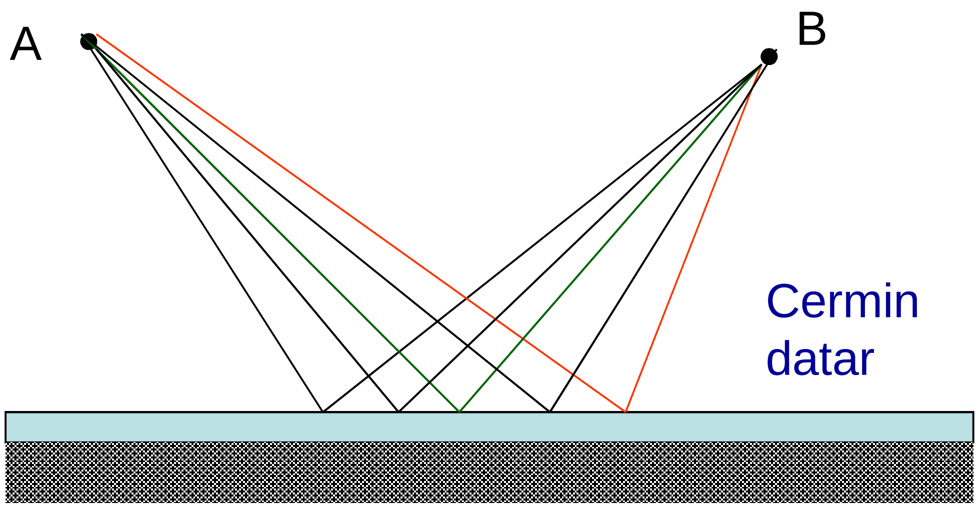
Menurut kalkulus dasar, syarat perlu suatu fungsi f(x) bernilai stasioner adalah :

$$\frac{df}{dx} = 0$$

Dalam Fisika, persoalan nilai stasioner (maksimum/minimum) suatu fungsi banyak dijumpai, dan analisis sifat stasioner suatu kuantitas fisika banyak menghasilkan hukum dan prinsip.

Contoh

Sinar datang dari titik A menuju cermin datar dan dipantulkan ke titik B. Dari sekian banyak lintasan yang dapat dilalui sinar, hanya satu lintasan yang sesungguhnya akan dilalui sinar.



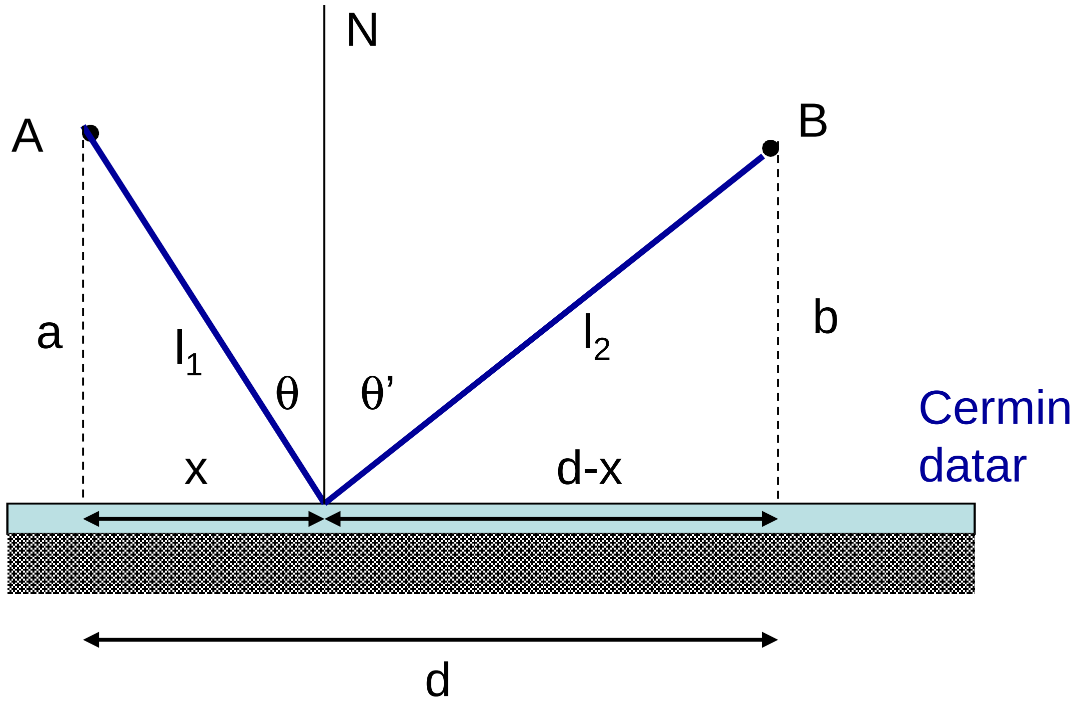
Lintasan manakah itu ???

Prinsip Fermat : Sinar datang dari titik A menuju cermin dan dipantulkan ke titik B akan menempuh satu lintasan tertentu yang jaraknya terpendek atau waktu tempuhnya tersingkat

Dari prinsip ini lahirlah hukum Snelius tentang pemantulan cahaya

Sudut Datang = Sudut Pantul

Bukti



$$l = l_1 + l_2$$

$$l = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d - x)^2}$$

Menurut Fermat l harus terpendek

Bukti

Menurut kakulus syarat perlu suatu kuantitas minimum adalah turunan pertama bernilai nol (0), dalam hal ini :

$$\frac{dl}{dx} = 0$$

$$\frac{dl}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + (d-x)^2}\right) = 0$$

$$\tfrac{1}{2}\left(a^2 + x^2\right)^{-1/2}(2x) + \tfrac{1}{2}\left(b^2 + (d-x)^2\right)^{-1/2} 2(d-x)(-1) = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} = 0$$

$$\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{(d-x)}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}$$

$\boxed{\text{Sin } \theta = \text{Sin } \theta'}$ $\longrightarrow$ $\theta = \theta'$ Hukum Snellius

Dalam Kalkulus Variasi, kuantitas atau fungsi yang dibuat stasioner dinyatakan dalam notasi integral (I) sebagai berikut :

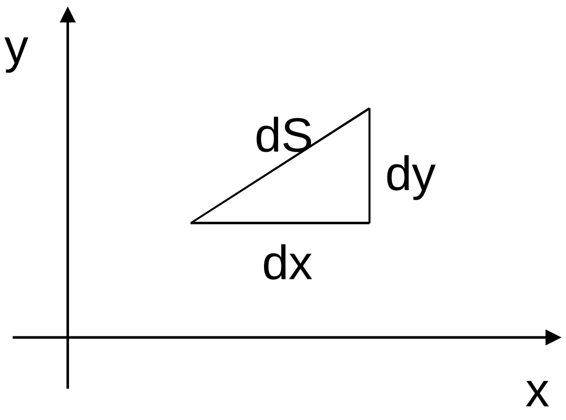
$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx; \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

Pada persoalan awal yaitu kurva yang menandai jarak terpendek yang menghubungkan dua titik dalam bidang

$$I = S = \int dS$$

$$I = S = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$I = S = \int \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$



$$I = S = \int \sqrt{1 + y'^2}\,dx; \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

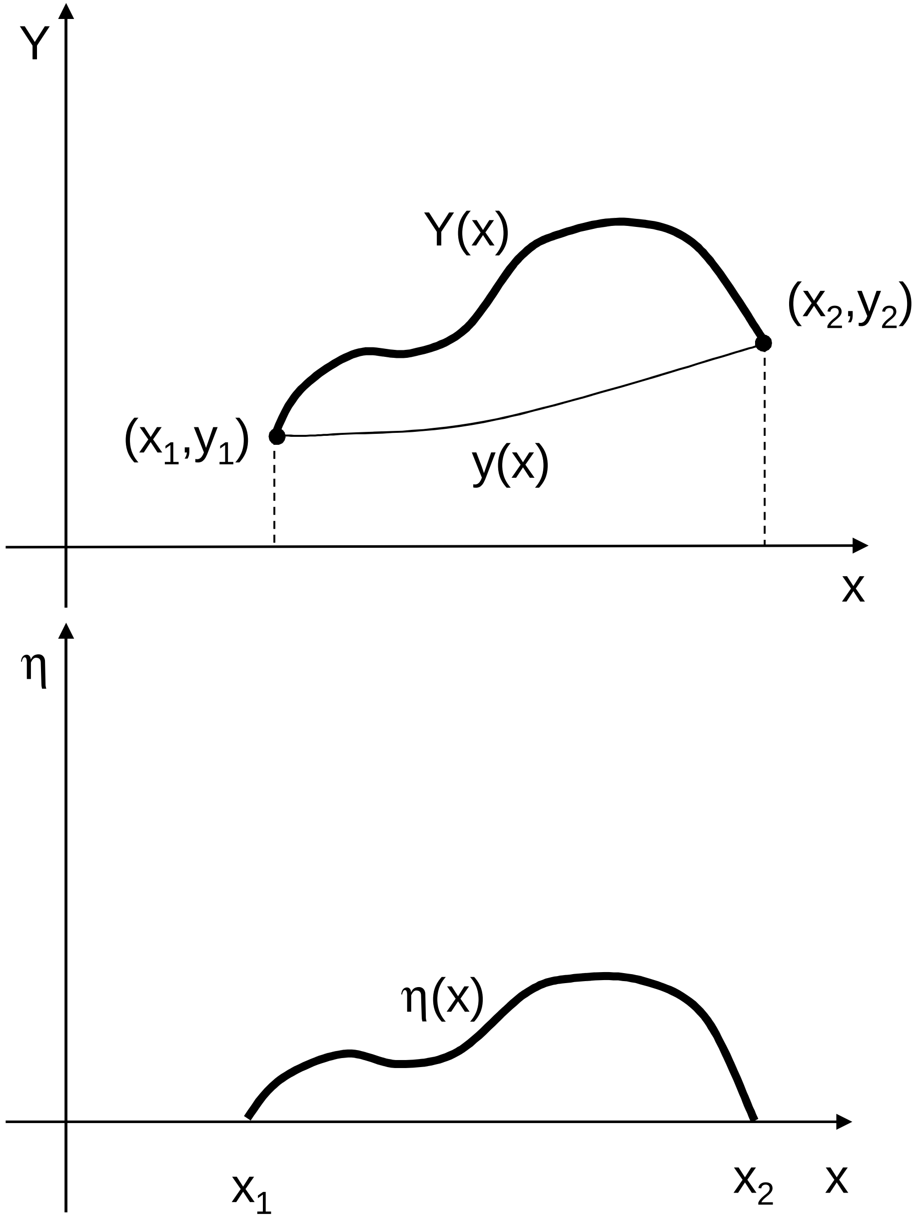
$$\boxed{F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}\ ; \qquad y' = \frac{dy}{dx}}$$

Penanganan persoalan ini dilakukan dengan Prinsip Variasi sehingga teknik ini disebut Kalkulus Variasi :

Dalam persoalan ini ingin diketahui kurva $y = f(x)$ yang menandai jarak terpendek atau kuantitas berikut bernilai paling kecil :

$$I = S = \int \sqrt{1 + y'^2}\, dx; \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

Dengan prinsip Variasi, kurva $y(x)$ divariasikan nilainya di atas maupun di bawah nilai sesungguhnya. Variasi ini diwakili oleh suatu fungsi sembarang $\eta(x)$ seperti pada gambar berikut.



$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$$

ε Adalah suatu parameter

$\eta(x)$ adalah suatu fungsi sembarang yang berkelakuan baik diantara x_1 dan x_2. nilainya nol di $x = x_1$ dan di $x = x_2$

Dengan variasi ini, maka sekarang kita menginginkan kuantitas berikut bernilai minimum

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + Y'^2}\, dx$$

Dan I sekarang menjadi fungsi parameter ε; jika $\varepsilon = 0$ maka Y = y(x). Persoalan sekarang adalah membuat I(ε) memiliki nilai minimum ketika $\varepsilon = 0$. Dengan kata lain :

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = 0; \quad \varepsilon = 0$$

Jika kita lakukan diferensiasi I terhadap ε, didapat :

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + Y'^2}}\, 2Y' \left(\frac{dY'}{d\varepsilon} \right) dx$$

Dan jika kita lakukan diferensiasi persamaan Y(x) terhadap x, didapat :

$$Y'(x) = y'(x) + \varepsilon\eta'(x)$$

didapat $$\frac{dY'}{d\varepsilon} = \eta'(x)$$

Jika hasil terakhir ini disubstitusi ke prs dI/dε dan mengambil dI/dε = 0 ketika ε = 0, maka didapat :

$$\left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y'(x)\eta'(x)}{\sqrt{1+y'^2}}\,dx = 0$$

Kita dapat mengintegrasi secara by part (parsial) terhadap integral ini, sebagai berikut :

$$\left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{y'(x)\eta'(x)}{\sqrt{1+y'^2}}\,dx = 0$$

$$u = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \quad dv = \eta'(x)\,dx$$

$$du = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)dx, \quad v = \eta(x)$$

dan

$$\left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\eta(x)\Bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)dx = 0$$

didapat

$$\left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}=\overbrace{\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\eta(x)\bigg|_{x_1}^{x_2}}^{=\,0}-\int_{x_1}^{x_2}\overbrace{\eta(x)}^{\neq\,0}\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)dx=0$$

sehingga $$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0$$

atau $$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=C$$

$$y' = C\sqrt{1 + y'^2}$$

$$y'^2 = C^2\left(1 + y'^2\right) = C^2 + C^2 y'^2$$

$$y'^2\left(1 - C^2\right) = C^2$$

$$y'^2 = \frac{C^2}{\left(1 - C^2\right)} = K^2$$

$$y' = K$$

$$\frac{dy}{dx} = K$$

$$dy = K\,dx$$

$$\boxed{y = \int K dx = Kx + B}$$

Merupakan persamaan garis lurus linier seperti yang diramalkan di awal

Persamaan Euler

Kembali ke kuantitas

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y')\,dx,$$

Tapi $$Y(x) = y(x) + \varepsilon\eta(x)$$

sehingga $$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, Y, Y')\,dx$$

Jika I diturunkan terhadap ε, didapat

$$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\frac{dY}{d\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial Y'}\frac{dY'}{d\varepsilon} \right) dx$$

atau $$\frac{dI}{d\varepsilon} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\eta(x) + \frac{\partial F}{\partial Y'}\eta'(x) \right) dx$$

Untuk ε = 0 maka dI/dε = 0

$$\left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\right)dx = 0$$

Jika kita lakukan proses integrasi untuk suku kedua didapat :

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'(x)\,dx = \cancelto{0}{\frac{\partial F}{\partial y'}\eta(x)\Big|_{x_1}^{x_2}} - \int_{x_1}^{x_2}\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta(x)\,dx$$

Maka :

$$\left(\frac{dI}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right]\eta(x)\,dx = 0$$

atau $$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0}$$ **Persamaan Euler**

Dalam persoalan kurva yang menandai jarak minimum yang menghubungkan dua buah titik dalam bidang, yakni :

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

maka $$F(x, y, y') = \sqrt{1+y'^2}$$

dan $$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Sehingga persamaan Eulernya :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

Sama seperti sebelumnya

Latihan Soal

Tentukan y=f(x) sehingga kuatitas-kuantitas berikut bernilai stasioner, dengan menggunakan persamaan Euler !

1. $$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{x}\sqrt{1+y'^2}\, dx$$

2. $$\int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{x}$$

3. $$\int_{x_1}^{x_2} e^x \sqrt{1+y'^2}\, dx$$

Penggunaan Persamaan Euler

a. Variabel lain

Varibel r dan θ

$$\int F(r,\theta,\theta')\,dr\,; \quad \theta' = {d\theta}/{dr}$$

$$\boxed{\frac{d}{dr}\left(\frac{\partial F}{\partial \theta'}\right) - \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0}$$

Varibel s dan p

$$\int F(s,p,p')\,ds\,; \quad p' = {dp}/{ds}$$

$$\boxed{\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial p'}\right) - \frac{\partial F}{\partial p} = 0}$$

Variabel t dan x

$$\int F(t, x, \dot{x})\,dt\,; \qquad \dot{x} = {dx}/{dt}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0}$$

dst...............

Contoh Soal

Tentukan lintasan yang akan dilalui sinar cahaya jika indeks bias (dalam koordinat polar) sebanding dengan r^{-2} !

$$\int n\,ds = \int r^{-2}\,ds$$

$$\int r^{-2}\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \int r^{-2}\sqrt{1 + r^2\theta'^2}\,dr$$

$$F = r^{-2}\sqrt{1 + r^2\theta'^2} = F(r, \theta')$$

Persamaan Euler :

$$\frac{d}{dr}\frac{\partial F}{\partial \theta'} - \frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} = r^{-2}\left(-\frac{1}{2}\left(1 + r^2\theta'^2\right)^{-1/2}\left(2r^2\theta'\right)\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta'} = \frac{\theta'}{\sqrt{1 + r^2\theta'^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = 0$$ Karena F bukan fungsi θ

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\theta'}{\sqrt{1 + r^2\theta'^2}}\right) - 0 = 0$$

$$\frac{\theta'}{\sqrt{1 + r^2\theta'^2}} = C$$

$$\theta' = C\sqrt{1 + r^2\theta'^2}$$

$$\theta'^2 = C^2\left(1 + r^2\theta'^2\right) = C^2 + C^2 r^2 \theta'^2$$

$$\theta'^2\left(1 - C^2 r^2\right) = C^2$$

$$\theta'^2 = \frac{C^2}{\left(1 - C^2 r^2\right)}$$

$$\frac{\theta'}{\sqrt{1 - r^2\theta'^2}} = C$$

$$\theta' = \frac{C}{\sqrt{1 - C^2 r^2}}$$

$$\frac{d\theta}{dr}=\frac{C}{\sqrt{1-C^2r^2}}$$

$$d\theta=\frac{C}{\sqrt{1-C^2r^2}}\,dr$$

$$\theta=\int\frac{C}{\sqrt{1-C^2r^2}}\,dr$$

$$\theta=Arc\,Sin\,Cr\;+\;B$$

b. Integral Pertama dari Persamaan Euler

Persamaan Euler untuk F(x,y,y') adalah

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

Jika F bukan fungsi y, yakni F(x,y'), maka :

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

Sehingga persamaan Eulernya menjadi :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0 \qquad \text{atau} \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}=C$$

Keadaan ini disebut **integral pertama dari persamaan Euler**

Integral Pertama dari Persamaan Euler

Jika suatu persoalan dapat diarahkan ke bentuk integral pertama persamaan Euler, maka pengerjaannya akan lebih mudah dan lebih sederhana.

Cara yang dapat ditempuh agar suatu persoalan mengarah ke integral pertama persamaan Euler adalah melakukan pertukaran variabel, yaitu **pertukaran variabel bebas dengan variabel terikat** seperti berikut :

$$x' = \frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} = \frac{1}{y'}$$

dan

$$dx = \frac{dx}{dy}\,dy = x'\,dy$$

Tentukan dan selesaikan persamaan Euler agar kuantitas berikut stasioner !

$$I = \int \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\, dx$$

Dari soal dapat ditentukan F sebagai berikut :

$$F(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$$

sehingga

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\frac{1}{2}\left(1+y'^2\right)^{-1/2}(2y')}{\sqrt{y}} = \frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-\sqrt{1+y'^2}\ \frac{1}{2}\, y^{-1/2}}{y} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}}$$

Dengan demikian persamaan Eulernya menjadi :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F}{\partial y}=0}$$

atau

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\right)-\left(-\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}}\right)=0$$

Tampak tidak sederhana bukan ?? Dan mencari solusinya tidak cukup mudah

Coba sekarang lakukan pertukaran variabel bebas dengan terikat sbb:

$$\sqrt{1+y'^2}\,dx = \sqrt{1+y'^2}\,x'\,dy = \sqrt{x'^2+1}\,dy$$

Sekarang kuantitas yang dibuat stasioner menjadi :

$$I = \int \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}}\,dy$$

Sehingga F nya sekarang berubah menjadi :

$$F(y, x') = \frac{\sqrt{1+x'^2}}{\sqrt{y}}$$

Dengan demikian persamaan Eulernya menjadi :

$$\boxed{\frac{d}{dy}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0}$$

Dan $$\frac{d}{dy}\left(\frac{x'}{\sqrt{y}\sqrt{1+x'}}\right)-0=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0$$

Sehingga persamaan Eulernya menjadi :

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{x'}{\sqrt{y}\sqrt{1+x'}}\right)-0=0$$

$$\frac{x'}{\sqrt{y}\sqrt{1+x'^2}}=C$$

Tampak lebih mudah diselesaikan dari sebelum dilakukan pertukaran variabel

Beberapa variabel terikat; Persamaan Lagrange

Dalam persoalan nilai stasioner ini sesungguhnya tidak perlu terbatas pada sebuah variabel terikat, melainkan bisa terdiri atas beberapa variabel terikat.

Ingat kembali pada kalkulus dasar, bahwa jika y = f(x), maka syarat perlu agar f(x) bernilai stasioner adalah :

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 0}$$

Dan jika suatu z = f(x,y) maka untuk kondisi ini, syarat stasioner adalah :

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = 0} \quad \text{dan} \quad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = 0}$$

Beberapa variabel terikat; Persamaan Lagrange

Analog dengan itu terjadi pula dalam kalkulus variasi. Misalkan kita diberikan sebuah F yang merupakan fungsi dari :

$$y, \; z, \; \frac{dy}{dx}, \; \frac{dz}{dx}, \; x,$$

dan kita ingin mencari dua kurva y = y(x) dan z = z(x) yang membuat :

$$I = \int F(x, y, z, y', z'); \qquad y' = {dy}/{dx} \qquad z' = {dz}/{dx}$$

bernilai stasioner. Maka nilai integral I bergantung pada y(x) dan z(x). Untuk kasus ini terdapat dua persamaan Euler, satu untuk y dan satu lagi untuk z, seperti berikut

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad dan \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Prinsip Hamiltonian dalam Mekanika

Dalam Fisika Dasar, hukum II Newton merupakan persamaan fundamental dalam membahas gerak benda.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Dalam mekanika lanjut, persoalan gerak benda dianalisis dari sudut pandang yang berbeda, yang disebut prinsip Hamiltonian

Prinsip ini menyatakan bahwa suatu partikel atau sistem partikel selalu bergerak pada suatu lintasan sedemikian rupa sehingga :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$$

bernilai stasioner, dengan :

$$\boxed{L = T - V}$$

L disebut Lagrangian, T energi kinetik partikel, V energi potensial partikel

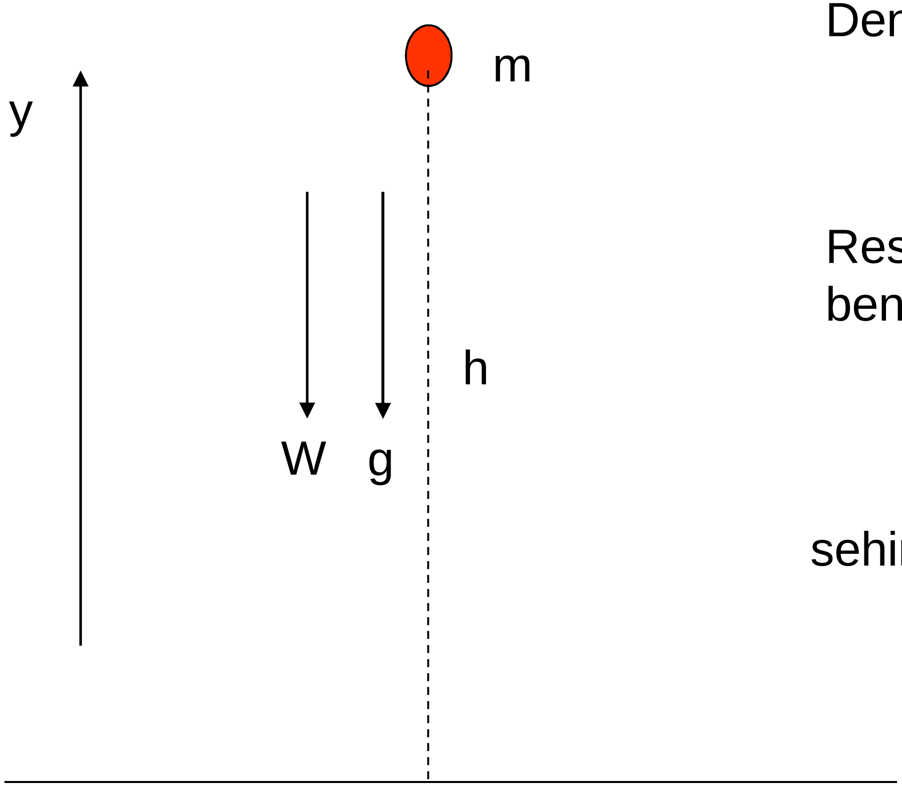
Persamaan Lagrange

Untuk persoalan ini terdapat persamaan Euler, yang lebih dikenal sebagai persamaan Euler-Lagrange atau persamaan Lagrange, yang jumlahnya bergantung pada jumlah variabel terikat. Untuk 3 Dimansi maka persamaan Lagrange-nya dalam sistem kartesian adalah :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} &= 0 \end{aligned}}$$

Contoh Soal

Sebuah benda dijatuhkan secara bebas dari ketinggian tertentu dekat permukaan bumi. Tentukan persamaan gerak benda yang jatuh bebas tersebut !



Dengan Hukum II Newton

$$\sum F = m\vec{a}$$

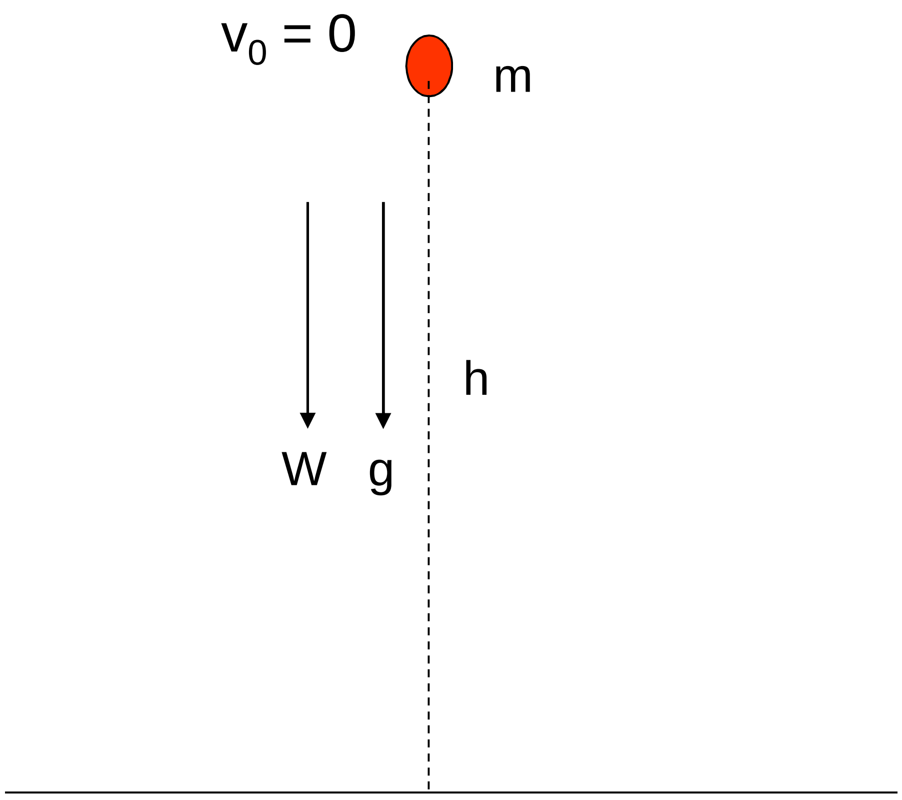
Resultan gaya yang bekerja pada benda adalah gaya berat :

$$F = W = -mg$$

sehingga :

$$\boxed{\begin{aligned} -m\vec{g} &= m\vec{a}_y \\ \vec{a}_y &= -\vec{g} \end{aligned}}$$

Contoh Soal



Kecepatan benda sbg fungsi waktu

$$\vec{v}_y = \int - g\, dt$$

$$\vec{v}_y = - gt$$

posisi benda sbg fungsi waktu

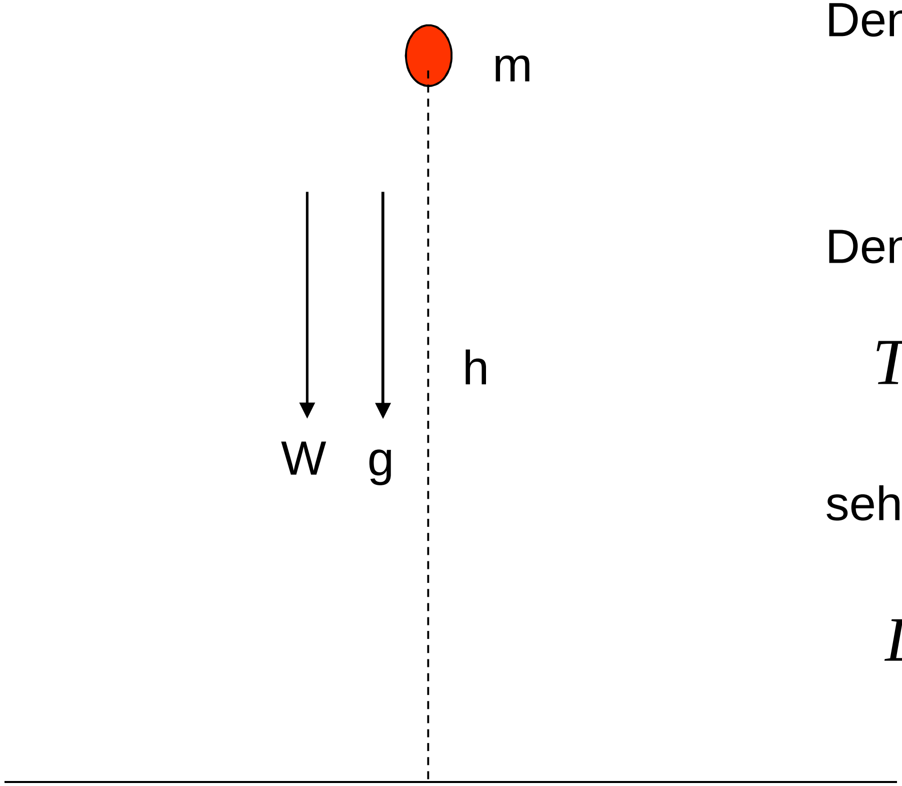
$$\vec{y} = \int \vec{v}\, dt$$

$$\vec{y} = \int \left(- gt\right) dt$$

$$\vec{y} = -\tfrac{1}{2} g t^2 + y_0$$

Contoh Soal

Sebuah benda dijatuhkan secara bebas dari ketinggian tertentu dekat permukaan bumi. Tentukan persamaan gerak benda yang jatuh bebas tersebut !



Dengan prinsip Hamiltonian

$$L = T - V$$

Dengan :

$$T = \tfrac{1}{2} m\dot{y}^2 \qquad V = mgy$$

sehingga :

$$L = \tfrac{1}{2} m\dot{y}^2 - mgy$$

Persamaan Lagrange

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = -mg$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{y}) - (-mg) = 0$$

$$(m\ddot{y}) + (mg) = 0$$

$$a_y = -g$$

Sama seperti sebelumnya

Prinsip Variasi Van Baak dalam Rangkaian DC

Dalam Fisika Dasar, teorema simpal Kirchoff merupakan teorema fundamental dalam membahas rangkaian listrik arus searah (DC).

$$\sum \varepsilon + \sum iR = 0$$

Dari sudut pandang lain, persoalan rangkaian arus listrik DC dapat diselesaikan menggunakan prinsip Variasi Van Baak

Prinsip ini menyatakan bahwa arus listrik akan mengalir ke suatu percabangan rangkaian sedemikian rupa sehingga :

$$S = P_d - 2P_g$$

bernilai stasioner, dengan :

$$P_d = \sum_{k=1}^{n} i_k^2 R_k \qquad P_g = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k i_k$$

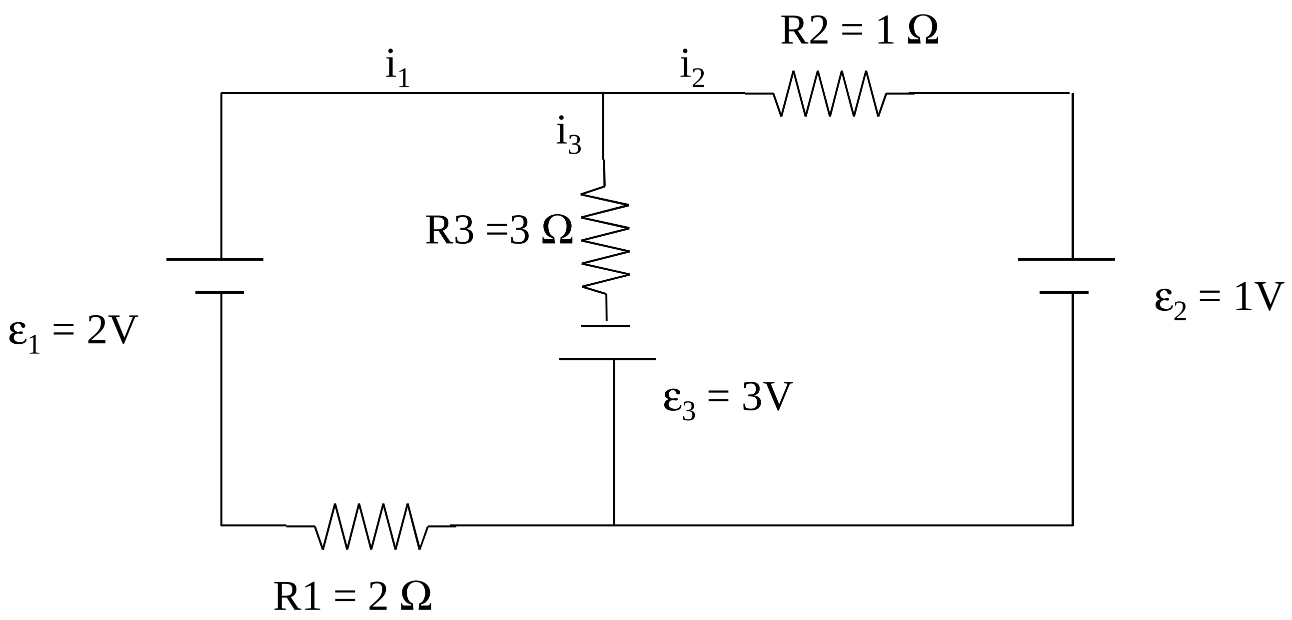
Syarat perlu :

$$\frac{\partial S}{\partial i_k} = 0$$

k = jumlah cabang dalam rangkaian

Contoh soal

Gunakan prinsip variasi untuk menyelesaikan persoalan rangkaian listrik berikut ini. Tentukan kuat arus listrik yang mengalir pada setiap cabang rangkaian di bawah ini !



Jawab

Prinsip Variasi Baak : S = Pd – 2 Pg

$$\left.\begin{aligned} Pd &= \sum i_k{}^2 R_k = 2i_1{}^2 + 3i_3{}^2 + i_2{}^2 \\ Pg &= \sum \varepsilon_k i_k = 2i_1 + 3i_3 + i_2 \end{aligned}\right\} i_3 = i_1 + i_2$$

$$S = 2i_1{}^2 + 3i_3{}^2 + i_2{}^2 - 4i_1 - 6i_3 - 2i_2$$

$$S = 2i_1{}^2 + 3(i_1 + i_2)^2 + i_2{}^2 - 4i_1 - 6(i_1 + i_2) - 2i_2$$

$$S = S(i_1, i_2)$$

$$\frac{\partial S}{\partial i_1} = 0 \rightarrow 4i_1 + 6(i_1 + i_2) - 4 - 6 = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial i_2} = 0 \rightarrow 6(i_1 + i_2) + 2i_2 - 6 - 2 = 0$$

Jawab

$$\begin{aligned} 10i_1 + 6i_2 &= 10 \\ 6i_1 + 8i_2 &= 8 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 5i_1 + 3i_2 &= 5 \\ 3i_1 + 4i_2 &= 4 \end{aligned} \iff \begin{aligned} 15i_1 + 9i_2 &= 15 \\ 15i_1 + 20i_2 &= 20 \end{aligned} \; -$$

$$-11i_2 = -5$$

$$i_2 = \frac{5}{11} A$$

$$5i_1 = 5 - 3i_2$$

$$5i_1 = 5 - 3\left(\frac{5}{11}\right)$$

$$5i_1 = \frac{55 - 15}{11}$$

$$5i_1 = \frac{40}{11}$$

$$i_1 = \frac{8}{11} A$$

$$i_3 = i_1 + i_2$$

$$i_3 = \frac{5}{11} + \frac{8}{11}$$

$$i_3 = \frac{13}{11} A$$