PERSAMAAN DIFERENSIAL PARSIAL (PDP)

MATEMATIKA FISIKA II

JURDIK FISIKA FPMIPA UPI

BANDUNG

- PDP: Persamaan yang pada suku-sukunya mengandung bentuk turunan (diferensial) parsial yaitu turunan terhadap lebih dari satu variabel bebas.
- Dalam persoalan fisika banyak sekali di jumpai bahwa perubahan nilai suatu besaran dipengaruhi oleh beberapa faktor (variabel) bebas, baik variabel ruang maupun waktu, beberapa contoh fisika yang terumuskan dalam PDP adalah:

Persamaan Laplace : $\nabla^2 U = 0$ U adalah Skalar

Persamaan Difusi : $\nabla^2 U = \frac{1}{\alpha^2}\frac{du}{dt}$, α^2 = Difusivitas

Persamaan Gelombang : $\nabla^2 U = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

v = Kecepatan Gelombang

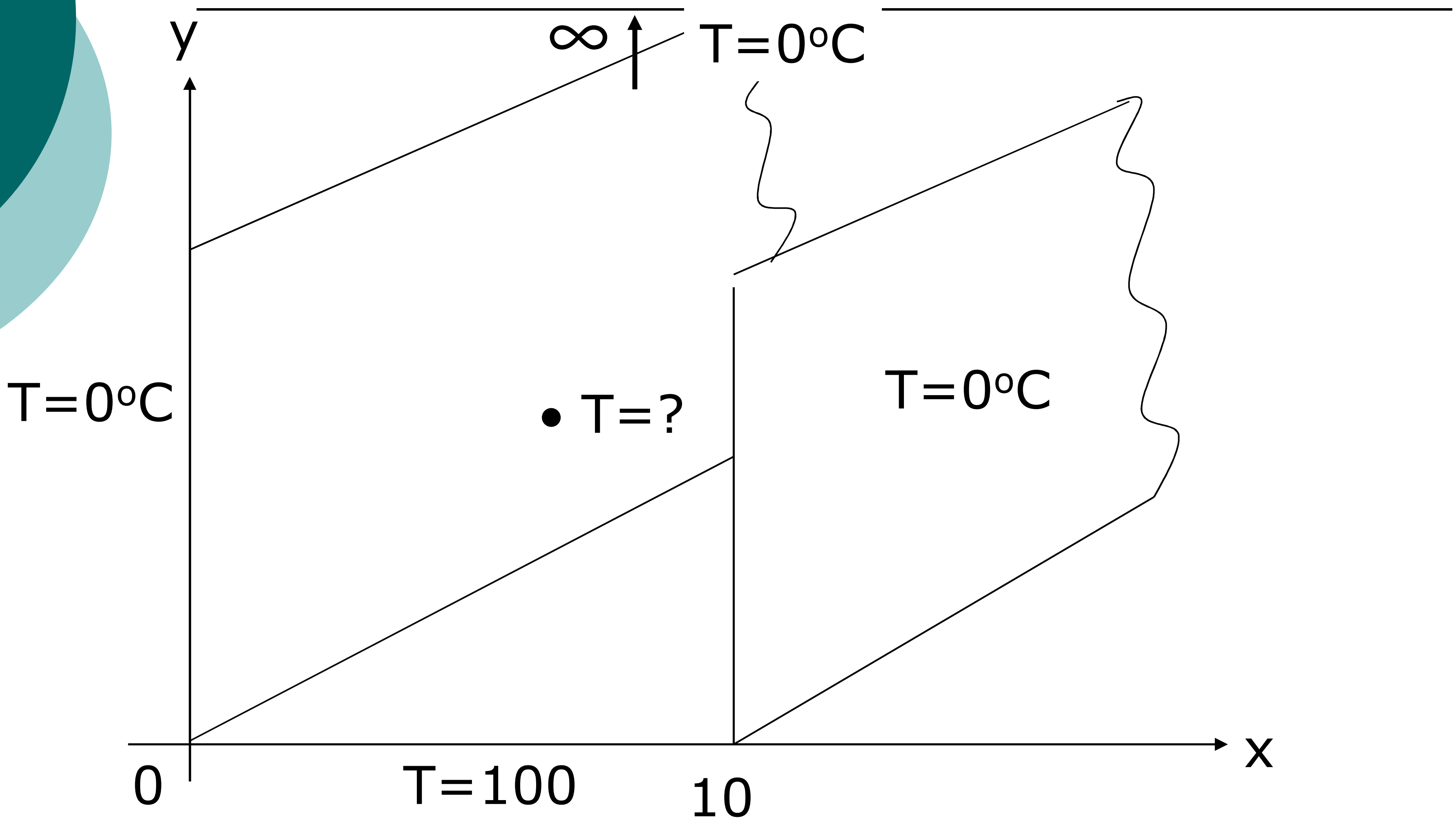
Kompetensi yang ingin dicapai adalah mampu mencari solusi umum dan khusus PDP terkait persoalan fisika yang ditinjau

Kasus Fisika :

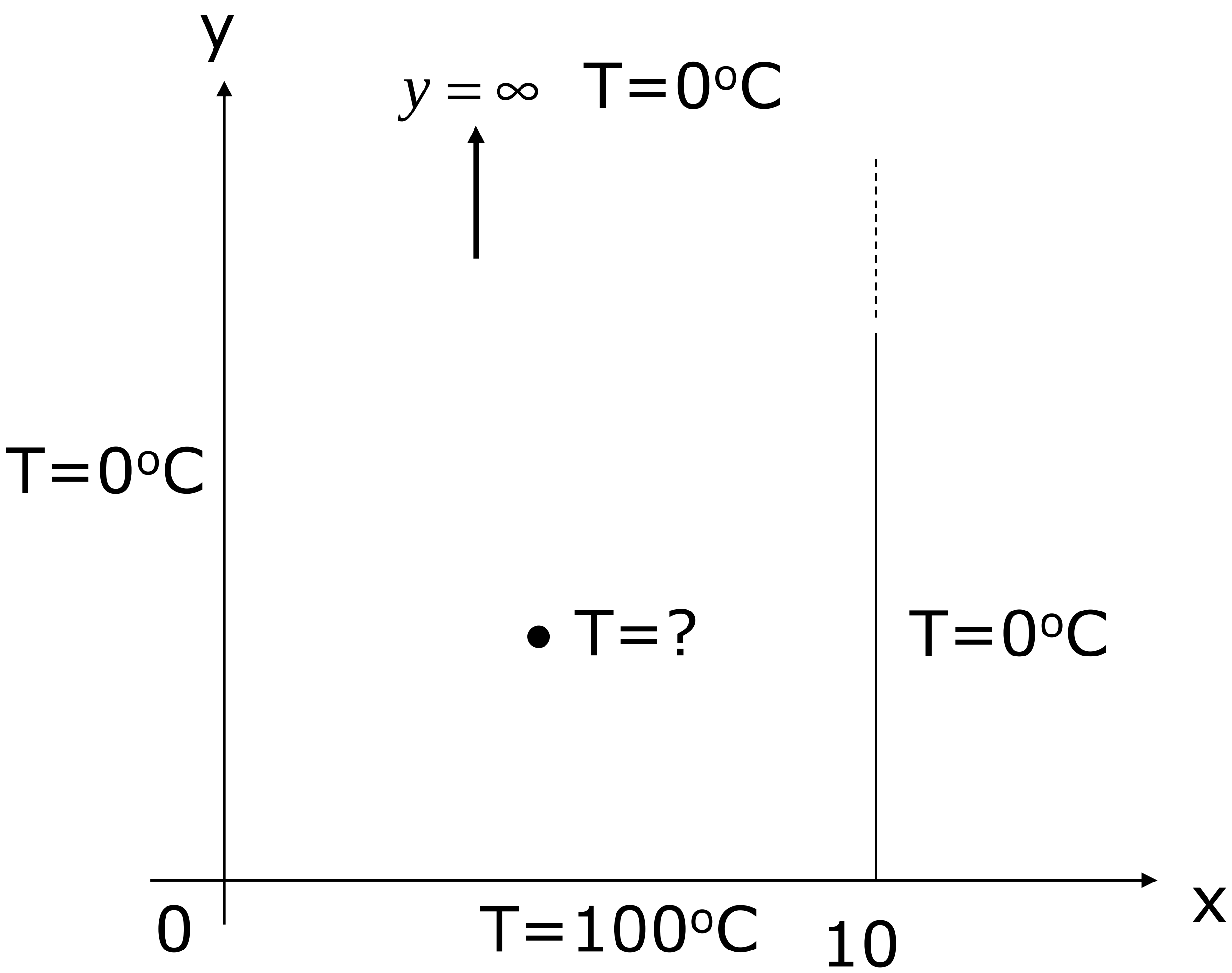
- **Persamaan Laplace**

- **Kasus Fisika : Distribusi keadaan mantap temperatur dalam ruang yang dibatasi oleh pelat semi tak hingga.**

Pelat semi tak hingga (3-Dimensi)



Pelat semi tak hingga (2-Dimensi)



Karena T tergantung pada x dan y tapi tidak bergantung pada z maka persamaan Laplacenya:

$$\nabla^2 T = 0 \longrightarrow T(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \longrightarrow \text{PDP}$$

Untuk mencari solusi umum dari PDP ini dimisalkan T(x,y) = P(x) Q(y), Dengan demikian PDP dapat dituliskan sebagai :

$$\frac{\partial^2 P(x)Q(y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P(x)Q(y)}{\partial y^2}=0$$

$$Q(y)\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2}+P(x)\frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2}=0$$

atau

$$\frac{1}{P(x)}\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2}=-\frac{1}{Q(y)}\frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2}$$

Ruas kiri fungsi x saja, sedangkan ruas kanan fungsi y Saja. Kedua ruas akan sama jika keduanya merupakan konstanta yang sama, misalkan: – k^2.
Sehingga:

$$\frac{1}{P(x)}\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{Q(y)}\frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2} = -k^2$$

atau

$$\frac{1}{P(x)}\frac{\partial^2 P(x)}{\partial x^2} = -k^2 \longrightarrow \frac{d^2 P(x)}{dx^2} + k^2 P(x) = 0$$

$$\frac{1}{Q(y)}\frac{\partial^2 Q(y)}{\partial y^2} = k^2 \longrightarrow \frac{d^2 Q(y)}{dy^2} - k^2 Q(y) = 0$$

Solusi I

$$P(x) = A \cos kx + B \sin kx$$

Solusi II

$$Q(y) = Ce^{ky} + De^{-ky}$$

Dengan demikian,

$$T(x,y) = P(x)Q(y)$$

$$T(x,y) = (A \cos kx + B \sin kx)(Ce^{ky} + De^{-ky})$$

Ini solusi umum dari PDP terkait kasus fisika yang ditinjau

Dari solusi umum ini selanjutnya dapat dicari solusi khusus, dengan cara meninjau syarat-syarat batas (Sb) yang diberikan pada kasus fisika yang ditinjau:

Sb I : $T(x,\infty) = 0^oC$

Sb II : $T(0,y) = 0^oC$

Sb III : $T(10,y) = 0^oC$

Sb IV : $T(x,0) = 100^oC$

Terapkan syarat batas I :

$T(x,\infty) = (A \cos kx + B \sin kx)(Ce^{\infty} + De^{-\infty}) = 0$

C= 0, D tidak sama dengan 0

$T(x,y) = (A \cos kx + B \sin kx)(De^{-ky})$

Terapkan Syarat batas II :

$T(0,y) = (A \cos 0 + B \sin 0)(De^{-ky}) = 0$

A=0, B tidak sama dengan 0

$T(x,y) = (B \sin kx)(D e^{-ky})$

Atau

$T(x,y) = BD \sin kx \, e^{-ky}$

Terapkan syarat batas III:

T(10,y) = BD sin 10k e^{-ky} = 0

Sin 10k = 0 atau 10k = nπ

atau $$k = \frac{n\pi}{10}$$

Sehingga :

$$T(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} BD \sin \frac{n\pi x}{10} e^{\frac{-n\pi y}{10}}$$

Terapkan syarat batas IV :

$$T(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty} BD\sin\frac{n\pi x}{10}e^{-0}=100^{o}C$$

$$100^{0}C=\sum_{n=0}^{\infty} BD\sin\frac{n\pi x}{10}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$ → **Deret Fourier Sinus (Fungsi ganjil)**

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$BD=b_n=\frac{2}{10}\int_0^{10}100\sin\frac{n\pi x}{10}dx$$

$$BD=b_n=20\left(-\frac{10}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{10}\right)_0^{10}$$

$$BD=b_n=-\frac{200}{n\pi}(\cos n\pi-1)$$

$$BD = \begin{cases} \dfrac{400}{n\pi}, & n = ganjil \\ 0, & n = genap \end{cases}$$

sehingga

$$\boxed{T(x,y) = \sum_{n=1(ganjil)}^{\infty} \frac{400}{n\pi} \sin\frac{n\pi x}{10} e^{-\frac{n\pi y}{10}}}$$

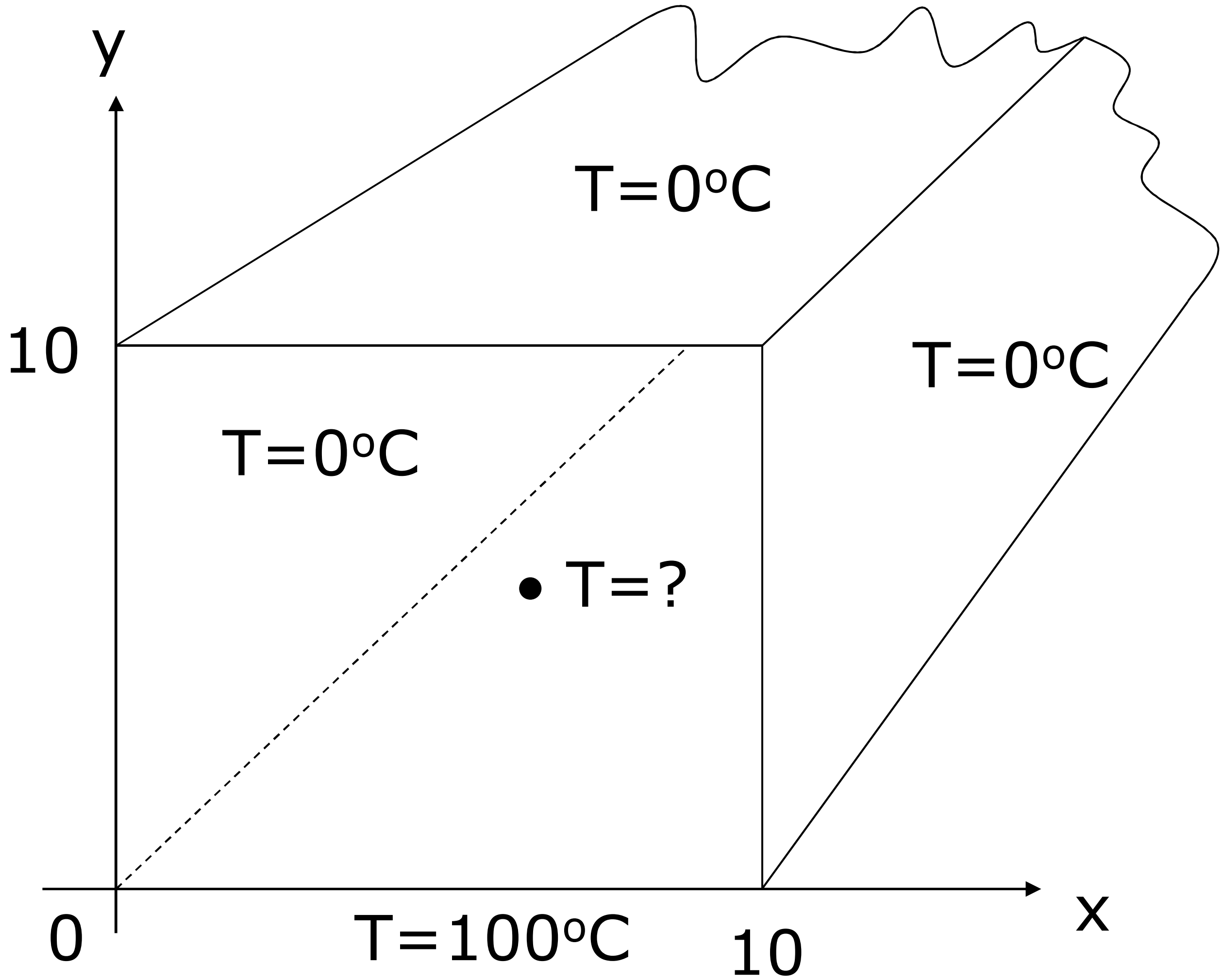
Inilah Solusi Khusus dari persoalan yang kita tinjau

Atau jika kita cek pada T(5,5) :

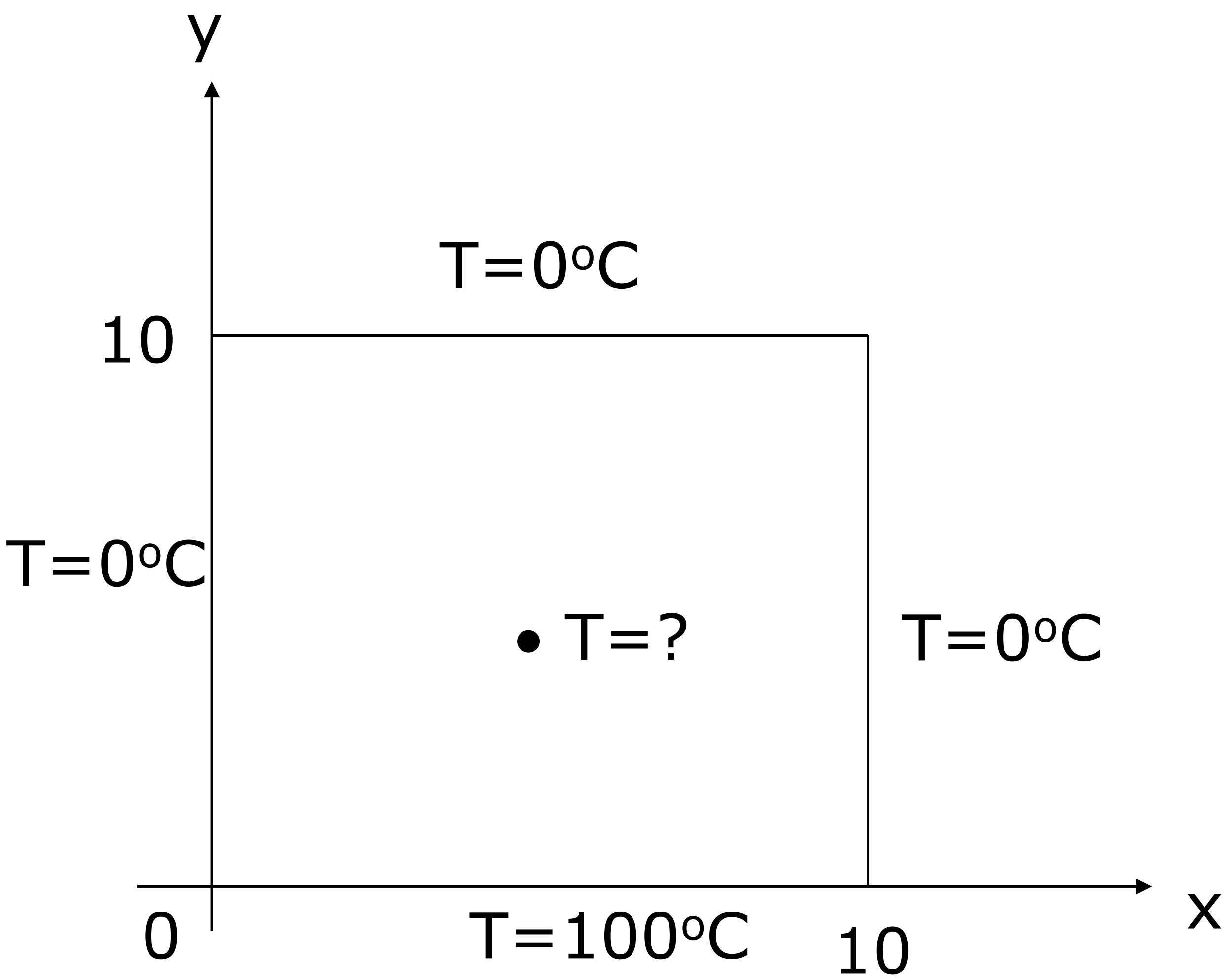
$$T(x,y)=\frac{400}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{10}e^{-\frac{\pi y}{10}}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{10}e^{-\frac{3\pi y}{10}}+\cdots\right)$$

$$T(5,5)=127\left(\sin\frac{\pi}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2}e^{-\frac{3\pi}{2}}+\cdots\right)=26{,}42^{o}C$$

Pelat segi empat (3-Dimensi)



Pelat segiempat (2-Dimensi)



Sama seperti sebelumnya kita mulai dari solusi umum

$$T(x,y) = (A \cos kx + B \sin kx)(Ce^{ky} + De^{-ky})$$

Dari solusi umum ini selanjutnya dapat dicari solusi khusus, dengan cara meninjau syarat-syarat batas (Sb) yang diberikan pada kasus fisika yang ditinjau:

Sb I : $T(x,10) = 0^{o}C$

Sb II : $T(0,y) = 0^{o}C$

Sb III : $T(10,y) = 0^{o}C$

Sb IV : $T(x,0) = 100^{o}C$

Untuk kasus seperti ini, kita harus mengeliminasi suku e^{ky}, karena pelat kita tingginya tidak tak hingga, sehingga :

$T(x,y) = (A \cos kx + B \sin kx)(De^{-ky})$

Kemudian lakukan modifikasi bentuk suku e^{-ky} dengan bentuk lain sedemikian rupa sehingga memenuhi syarat batas I : $T(x,10) = 0^0$C.

Bentuk yang dimaksud adalah kombinasi linier :

$$e^{-ky} = ae^{-ky} + be^{ky}$$

yang nilainya 0 ketika y = 10.

Salah satu pilihan yang tepat adalah :

$$a = \frac{1}{2} e^{10k} \qquad b = -\frac{1}{2} e^{-10k}$$

sehingga

$$e^{-ky} = \frac{1}{2} e^{10k} e^{-ky} - \frac{1}{2} e^{-10k} e^{ky}$$

$$e^{-ky} = \frac{1}{2} e^{k(10-y)} - \frac{1}{2} e^{-k(10-y)}$$

Pada y = 10, nilainya sama dengan nol, seperti persoalan kita.

$$e^{-ky} = \frac{1}{2}e^{k(10-y)} - \frac{1}{2}e^{-k(10-y)}$$

$$\frac{1}{2}e^{k(10-10)} - \frac{1}{2}e^{-k(10-10)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Dengan demikian :

$$T(x,y) = (A\cos kx + B\sin kx)C\sinh k(10-y)$$

Terapkan Sb II, seperti sebelumnya, didapat :

$$T(x,y) = (A\cos 0 + B\sin 0)C\sinh k(10-y) = 0$$

$$A = 0, \qquad B \neq 0$$

Sehingga :

$$T(x,y) = B\,C\sin kx\,\sinh k(10-y)$$

Terapkan syarat batas III:

$$T(10,y) = BC\sin 10k\ \sinh k(10-y) = 0$$

Sin 10k = 0 atau 10k = nπ

atau $k = \dfrac{n\pi}{10}$

Sehingga :

$$T(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} BC\sin\frac{n\pi x}{10}\ \sinh\ \frac{n\pi}{10}(10-y)$$

Terapkan syarat batas IV :

$$T(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty} BC\sin\frac{n\pi x}{10}\sinh\frac{n\pi}{10}(10-0)=100^{o}C$$

$$100=\sum_{n=0}^{\infty} \underline{BC\sinh n\pi}\ \sin\frac{n\pi x}{10}$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$ → **Deret Fourier Sinus (Fungsi ganjil)**

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n=\frac{2}{10}\int_0^{10}100\sin\frac{n\pi x}{10}dx$$

$$b_n=20\left(-\frac{10}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{10}\right)_0^{10}$$

$$b_n=-\frac{200}{n\pi}(\cos n\pi-1)$$

$$BC \sinh n\pi = b_n = \begin{cases} \dfrac{400}{n\pi}, & n = ganjil \\ 0, & n = genap \end{cases}$$

sehingga

$$BC = \frac{b_n}{\sinh n\pi} = \begin{cases} \dfrac{400}{n\pi \sinh n\pi}, & n = ganjil \\ 0, & n = genap \end{cases}$$

Dengan demikian :

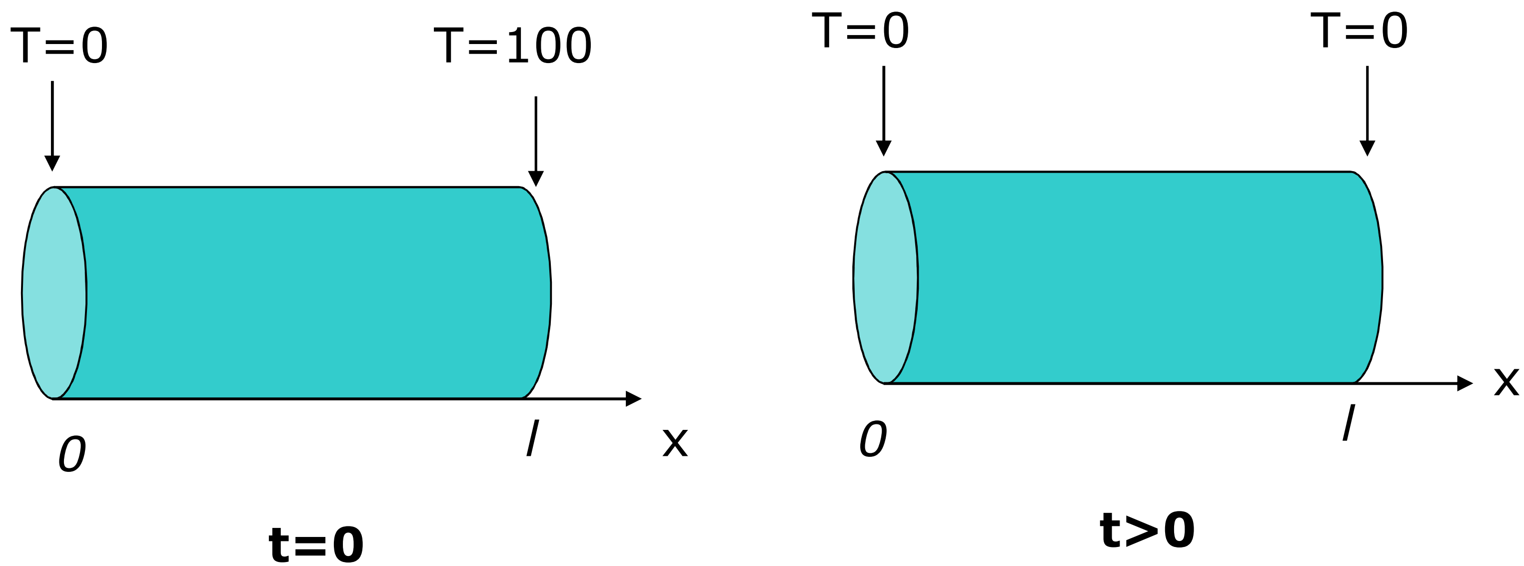
$$T(x,y)=\sum_{n=1,ganjil}^{\infty}\frac{400}{n\pi\sinh n\pi}\sin\frac{n\pi x}{10}\ \sinh\ \frac{n\pi}{10}(10-y)$$

Solusi khusus untuk persoalan keadaan mantap temperatur dalam plat segiempat

Persamaan Difusi : Difusi Kalor

$$\nabla^2 U = \frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial U}{\partial T}$$

Kasus Fisika : Difusi kalor pada batang logam, berarti T = suhu



Difusi kalor terjadi dari tempat yang temperaturnya lebih tinggi ke tempat yang temperaturnya lebih rendah. Jika dibatasi arah difusi hanya ke sb x saja, maka temperatur di setiap titik pada batang logam akan bergantung pada posisi x dan waktu t.

Dalam kasus ini u = T (temperatur) dan T=f(x,t) dengan demikian persamaan difusi menjadi :

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{1}{\alpha^2}\frac{dT}{dt}$$

Misalkan:

T(x,t) = P(x) S(t)

Maka persamaan difusi menjadi:

$$\frac{d^2P(x)S(t)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha^2}P(x)\frac{d\,S(t)}{dt}$$

atau

$$\frac{1}{P(x)}\frac{d^2P(x)}{dx^2} = \frac{1}{\alpha^2}P(x)\frac{d\,S(t)}{dt}$$

kedua ruas akan sama jika merupakan suatu konstanta yang sama –k², jadi :

$$\frac{1}{P(x)}\frac{d^2P(x)}{dx^2} = -k^2 \equiv \frac{d^2P(x)}{dx^2} + k^2 P(x) = 0 \quad *$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{1}{S(t)}\frac{dS(t)}{dt} = -k^2 \equiv \frac{dS(t)}{dt} = -k^2\alpha^2 dt \quad **$$

Solusi *

P(x) = (A cos kx + B Sin kx)

Solusi **

$$S(t) = Ce^{-k^2\alpha^2 t}$$

Sehingga

$$\boxed{\mathrm{T(x,t) = (A\cos kx + B\sin kx)(Ce^{-k^2\alpha^2 t})}}$$

Solusi umum persamaan difusi

Syarat awal dan syarat batas :

Syarat awal: (pada t = 0)

$$SA : T(x,0) = \frac{100}{\ell} x$$

Syarat Batas : t > 0

SB I : T(0,t) = 0^{o}C
SB II : T(*l*,t) = 0^{o}C

Terapkan SB I diperoleh :

$$T(o,t) = (A\cos 0 + B\sin 0)\left(ce^{-\alpha^2 k^2 t}\right) = 0$$

$$A = 0 \qquad B \neq 0$$

$$T(x,t) = B\sin kx \; ce^{-\alpha^2 k^2 t}$$

Terapkan SB II diperoleh:

$$T(x,t) = BC\sin k\ell e^{-\alpha^2 k^2 t} = 0$$

$k\ell = n\pi$ **atau** $k = \dfrac{n\pi}{\ell}$

Dengan demikian :

$$T(x,\ell)=\sum_{n=1}^{\infty} BC\sin\frac{n\pi x}{\ell}\, e^{-\alpha^2\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}$$

Terapkan Syarat Awal :

$$T(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} BC\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,\ell^0=\frac{100x}{\ell}$$

Atau :

$$\frac{100x}{\ell} = \sum_{n=1}^{\infty} BC \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$\downarrow$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$BC = b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$BC = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \frac{100x}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$BC = \frac{200}{\ell}\int_0^{\ell} x\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$BC = \frac{200}{\ell^2}\left\{\left(x\left(-\frac{\ell}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\right)-(1)\left(-\frac{\ell^2}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)\right\}_0^{\ell} = M_{(n)}$$

$$\boxed{T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} M_{(n)} \sin \frac{n\pi x}{\ell} e^{-\alpha^2 \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 t}}$$

Persamaan Gelombang

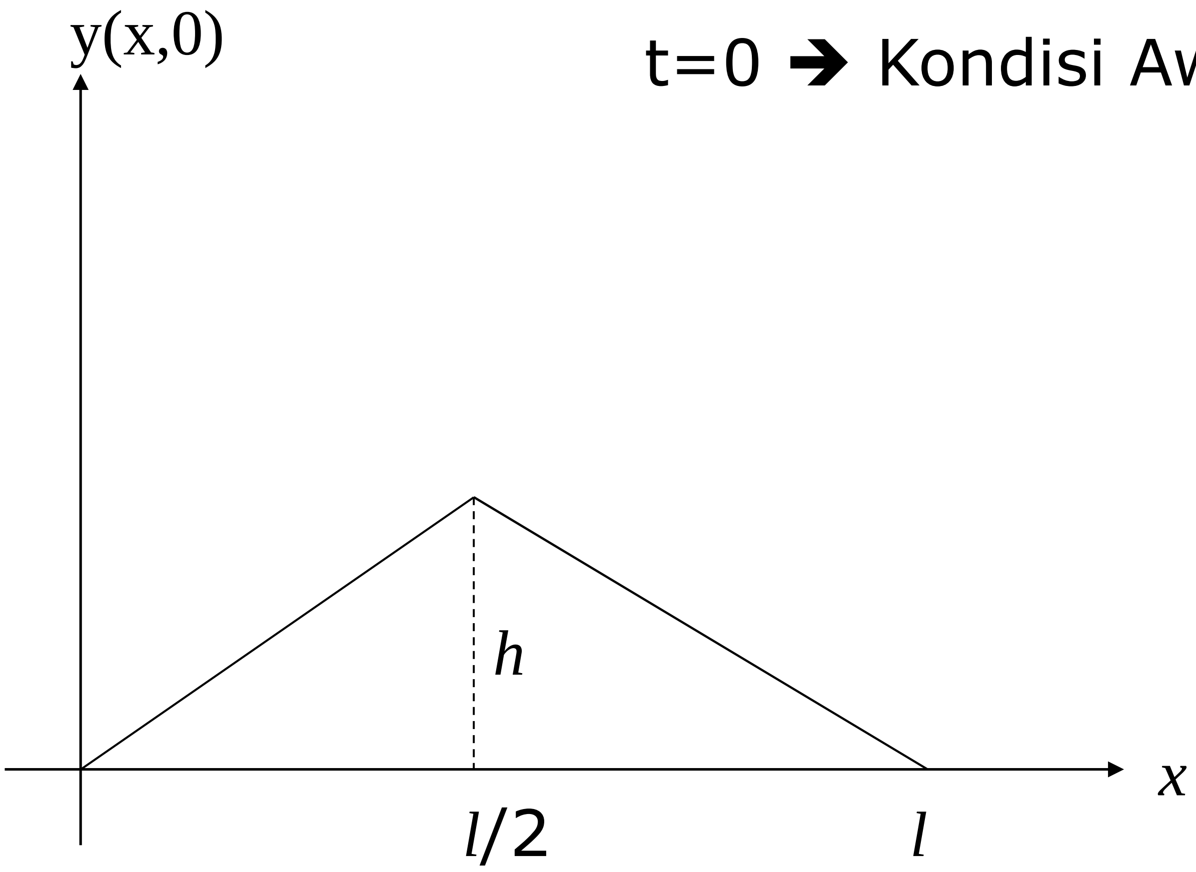
$$\boxed{\nabla^2 u = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

v = kecepatan Gelombang

Sebuah dawai yang panjangnya h diikat kedua ujungnya sehingga setiap sudut tetap karena disimpangkan padabagian tengahnya sejauh h seperti pada gambar.Jika kemudian pada t > 0 dawai dilepaskan maka dawaitersebut akan bergetar, akibatnya akan membentuk gelombang dalam hal ini u = y yang merupakan simpangan dan y bergantung pada posisi x dan waktu t, Y = f (x,t)

Kasus Fisika

t=0 ➔ Kondisi Awal



- **Sebuah dawai yang panjangnya h diikat kedua ujungnya. sehingga setiap sudut tetap karena disimpangkan pada bagian tengahnya sejauh h seperti pada gambar di atas.**
- **Jika kemudian pada t > 0 dawai dilepaskan maka dawai tersebut akan bergetar, akibatnya akan membentuk gelombang dalam hal ini u = y yang merupakan simpangan.**
- **Nilainya y bergantung pada posisi (x) dan waktu t.**
- **Y = f (x,t)**

Misalkan : y(x,t) = M(x) N(t)

Persamaan gelombang menjadi:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2 y}{dt^2} \longrightarrow \textbf{PDP}$$

$$\frac{d^2 M(x) N(t)}{dx^2} = \frac{1}{v}\frac{d^2 M(x) N(t)}{dt^2}$$

$$N(t)\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = \frac{1}{v^2} M(x)\frac{d^2 N(t)}{dt^2}$$

Ruas kiri dan kanan dikali dengan $\dfrac{1}{M(x)N(t)}$

$$\frac{1}{M(x)}\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{1}{N(t)}\frac{d^2N(t)}{dt^2} = -k^2$$

<u>Didapat :</u>

$$\frac{1}{M(x)}\frac{d^2M(x)}{dx^2} = -k^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2M(x)}{dx^2} = k^2M(x) = 0$$

$$\frac{1}{v^2}\frac{1}{N(t)}\frac{d^2N(t)}{dt^2} = -k^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2N(t)}{dt^2} + k^2v^2N(t) = 0$$

Didapat solusi untuk masing-masing :

$$M(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

$$N(t) = C\cos kvt + D\sin kvt$$

$$y(x,t) = \left[A\cos kx + B\sin kx\right]\left[C\cos kvt + D\sin kvt\right]$$

Solusi umum persamaan getaran dawai

Syarat batas dan awal :

Sb I : y(0,t) = 0
Sb II : y(*l*, t) = 0

Solusi khusus

$$SA\ I : \left.\frac{dy}{dt}\right]_{t=0} = 0$$

SA II = y (x,0) = seperti pada gambar

$$y(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{l} + 0; & 0 < x < \dfrac{\ell}{2} \\ \dfrac{-2hx}{l} + 2h; & \dfrac{\ell}{2} < x < \ell \end{cases}$$

Terapkan sb I:

$$y(0,t) = (A\cos 0 + B\sin 0)(C\cos kvt + D\sin kvt) = 0$$

$$A = 0,\ B \neq 0$$

$$y(x,t) = (B\sin kx)(C\cos kvt + D\sin kvt) = 0$$

Terapkan sb II:

$$y(l,t) = (B\sin kl)(C\cos kvt + D\sin kvt) = 0$$

$$k\ell = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{\ell}$$

$$y(x,t)=\left(B\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)\left(C\cos kvt+D\sin kvt\right)=0$$

$$y(x,t)=\left(B\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)\left(C\cos\frac{n\pi}{\ell}vt+D\sin\frac{n\pi}{\ell}vt\right)$$

Terapkan SA I :

$$\frac{dy}{dt} = B \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left(-C \frac{nv\pi}{\ell} \sin \frac{n\pi}{\ell} vt + D \frac{nv\pi}{\ell} \cos \frac{n\pi}{\ell} vt \right) = 0$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = B \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left(-C \frac{nv\pi}{\ell} \sin 0 + D \frac{nv\pi}{\ell} \cos 0 \right) = 0$$

$$C \neq 0, \quad D = 0$$

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} BC \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi vt}{\ell}$$

Terapkan SA II:

$$y(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty} BC\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos 0=\begin{cases}\frac{2hx}{\ell};\ 0<x<\frac{\ell}{2}\\ -\frac{2hx}{\ell}+2h;\ \frac{\ell}{2}<x<\ell\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{2hx}{l}, & 0<x<\frac{\ell}{2}\\ -\frac{2hx}{l}+2h, & \frac{\ell}{2}<x<\ell\end{array}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty} BC\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$BC=b_n=\frac{2}{L}\left[\int_0^{L/2}\left(\frac{2hx}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx+\int_{L/2}^{L}\left(-\frac{2hx}{\ell}+2h\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\right]$$

$$BC = b_n = \cdots$$

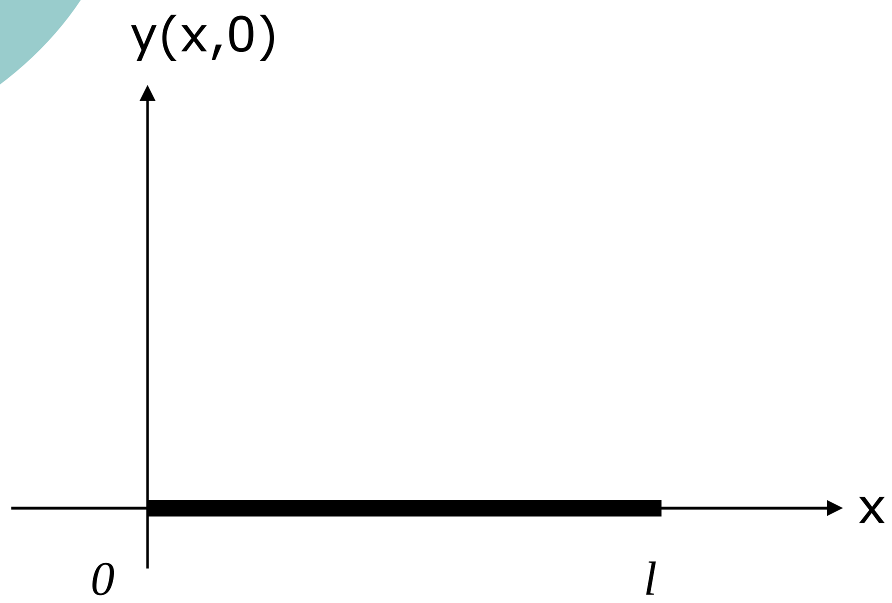
$$BC = b_n = \cdots$$

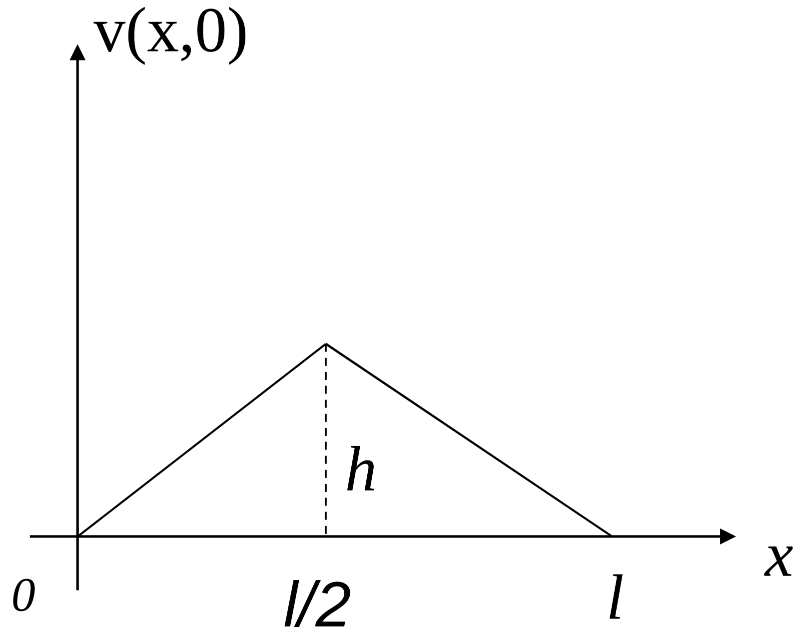
$$BC = b_n = M(x)$$

$$\boxed{y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} M(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi vt}{\ell}}$$

Pada Dawai Piano

t=0 ➔ Diberikan kecepatan awal dengan cara piano tuts ditekan





SB I: y (0,t) = 0

SB II: y (*l*,t) = 0

SA I : y (x,0) = 0

SA II : v (x,0) = lihat gambar

Mulai dari solusi umum :

$$y(x,t) = \left[A\cos kx + B\sin kx\right]\left[C\cos kvt + D\sin kvt\right]$$

Terapkan SB I dan SB II didapat :

$$y(x,t) = B\sin\frac{n\pi x}{l}\left[C\cos\frac{n\pi}{l}vt + D\sin\frac{n\pi}{l}vt\right]$$

Terapkan SA I:

$$y(x,0) = B\sin\frac{n\pi x}{l}\left[C\cos 0 + D\sin 0\right] = 0$$

$$C = 0, \quad D \neq 0$$

Sehingga :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B\,D \sin\frac{n\pi x}{l}\,\sin\frac{n\pi vt}{l}$$

Terapkan SA II :

$$\frac{dy}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} BD\frac{n\pi v}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{\cos n\pi vt}{l}$$

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} BD\frac{n\pi v}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos 0 = \begin{cases}\cdots\\ \cdots\end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix}\cdots\\ \cdots\end{matrix}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} BD\frac{n\pi v}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{\ell}\left[\int_0^{\ell/2}\frac{2hx}{\ell}\sin n\pi v dx + \int_{\ell/2}^{\ell}\left(-\frac{2hx}{\ell}+2h\right)\sin n\pi v dx\right]}$$

$$misal : b_n = R(n)$$

$$BD\frac{n\pi v}{\ell} = b_n = R(n)$$

$$BD = \frac{\ell}{n\pi v} b_n = \frac{R(n)l}{n\pi v}$$

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R(n)l}{n\pi v} \sin\frac{n\pi x}{l} \sin\frac{n\pi vt}{l}$$

Solusi khusus