



Mata Kuliah
GELOMBANG-OPTIK

TOPIK I
SUB TOPIK

OSILASI GANDENG

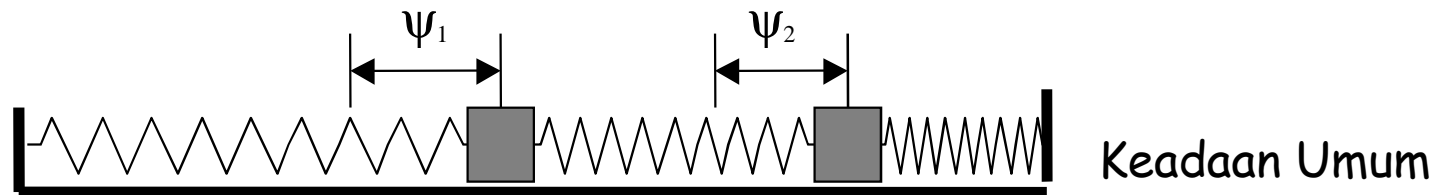
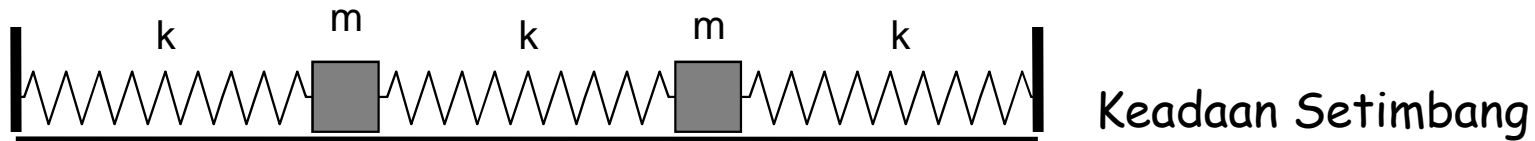


andhy setiawan

C. SISTEM OSILASI DUA DERAJAT KEBEBASAN: OSILASI GANDENG

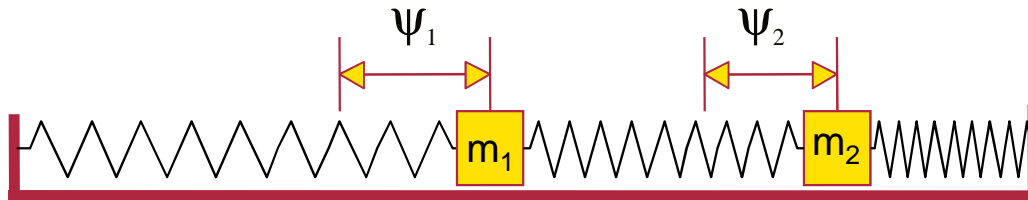
- Satu derajat kebebasan:
Misalkan: pegas yang memiliki satu simpangan
- Dua derajat kebebasan:
Misalkan: pegas yang memiliki dua simpangan berbeda

C.1 OSILASI GANDENG PEGAS



Sistem pegas gandeng, terdiri dari tiga pegas yang konstanta pegasnya sama yakni k , dan dua benda yang massanya sama juga yakni m . Sistem ini terletak pada permukaan datar tanpa gesekan.

Untuk benda m_1 , hukum II Newton: $\sum F = m_1 a$



$$f_{p1} + f_{p2} = m_1 \frac{d^2 \psi_1}{dt^2}$$

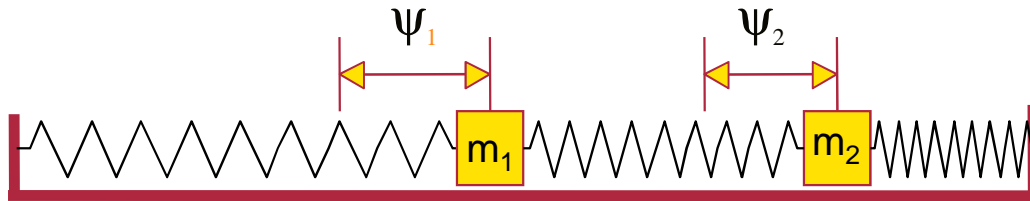
$$m_1 \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} = -k_1 \psi_1 - k_2 (\psi_1 - \psi_2)$$

$$m_1 \frac{d^2 \psi_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2) \psi_1 + k_2 \psi_2$$

$$\frac{d^2 \psi_1}{dt^2} = -\frac{(k_1 + k_2)}{m_1} \psi_1 + \frac{k_2}{m_1} \psi_2 \quad \dots \quad (1.14)$$



Untuk benda m_2 , hukum II Newton: $\sum F = m_2 a$



$$f_{p2} + f_{p3} = m_2 \frac{d^2 \psi_2}{dt^2}$$

$$m_2 \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} = -k_2 (\psi_2 - \psi_1) - k_3 \psi_2$$

$$m_2 \frac{d^2 \psi_2}{dt^2} = -(k_2 + k_3) \psi_2 + k_2 \psi_1$$

$$\frac{d^2 \psi_2}{dt^2} = \frac{k_2}{m_2} \psi_1 - \frac{(k_2 + k_3)}{m_2} \psi_2 \quad \dots (1.15)$$



Persamaan umum gelombang

$$\psi_n = A_n \cos(\omega t + \phi)$$

dengan

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -a_{11}\psi_1 - a_{12}\psi_2 \quad \dots (1.16)$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -a_{21}\psi_1 - a_{22}\psi_2 \quad \dots (1.17)$$

Masukan solusi umum penyelesaian persamaan gelombang kedalam (1.16) dan (1.17)

$$-A_1\omega^2 \cos(\omega t + \phi) + a_{11}A_1 \cos(\omega t + \phi) + a_{21} \cos(\omega t + \phi) = 0$$

$$-A_2\omega^2 \cos(\omega t + \phi) + a_{21}A_1 \cos(\omega t + \phi) + a_{22} \cos(\omega t + \phi) = 0$$



Atau dalam bentuk matrik:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -\omega^2 + a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan determinan $\det A = 0$

$$(-\omega^2 + a_{11})(-\omega^2 + a_{22}) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\underbrace{(\omega^2)^2 - (a_{11} + a_{22})\omega^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{\text{Persamaan kuadrat dalam } \omega^2} = 0$$

Ingat Rumus abc (akar2 pers. Kuadrat)!

$$\omega_{I,II}^2 = \frac{(a_{11} + a_{22})}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}$$

andhy setiawan



Jika $\omega_1^2 > \omega_2^2$

Maka $\omega_1^2 \longrightarrow$ Mode tinggi

Perbandingan amplitudo

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -\omega^2 + a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$(-\omega^2 + a_{11})A_1 + a_{12}A_2 = 0 \quad \xrightarrow{\text{Mode I}}$$

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{a_{12}}{(\omega_I^2 - a_{11})}}$$

Mode II

$$a_{21}A_1 + (-\omega^2 + a_{22})A_2 = 0 \quad ?$$

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{a_{12}}{(\omega_{II}^2 - a_{11})}}$$

andhy setiawan

Untuk kasus $k_1 = k_2 = k_3 = k$ dan $m_1 = m_2 = m$

Maka
$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\frac{2k}{m}\psi_1 + \frac{k}{m}\psi_2$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = +\frac{k}{m}\psi_1 - \frac{2k}{m}\psi_2$$

+

$$\frac{d^2}{dt^2}(\psi_1 + \psi_2) = -\frac{2k}{m}(\psi_1 + \psi_2) + \frac{k}{m}(\psi_1 + \psi_2)$$

Jika $(\psi_1 + \psi_2) = \psi_I = A_I \cos(\omega_I t + \phi)$

$$= (A_1 + A_2) \cos(\omega_I t + \phi)$$

$$\omega_I^2 = \frac{k}{m}$$

maka

$$\frac{d^2\psi_I}{dt^2} = \frac{k}{m}\psi_I - \frac{2k}{m}\psi_I$$

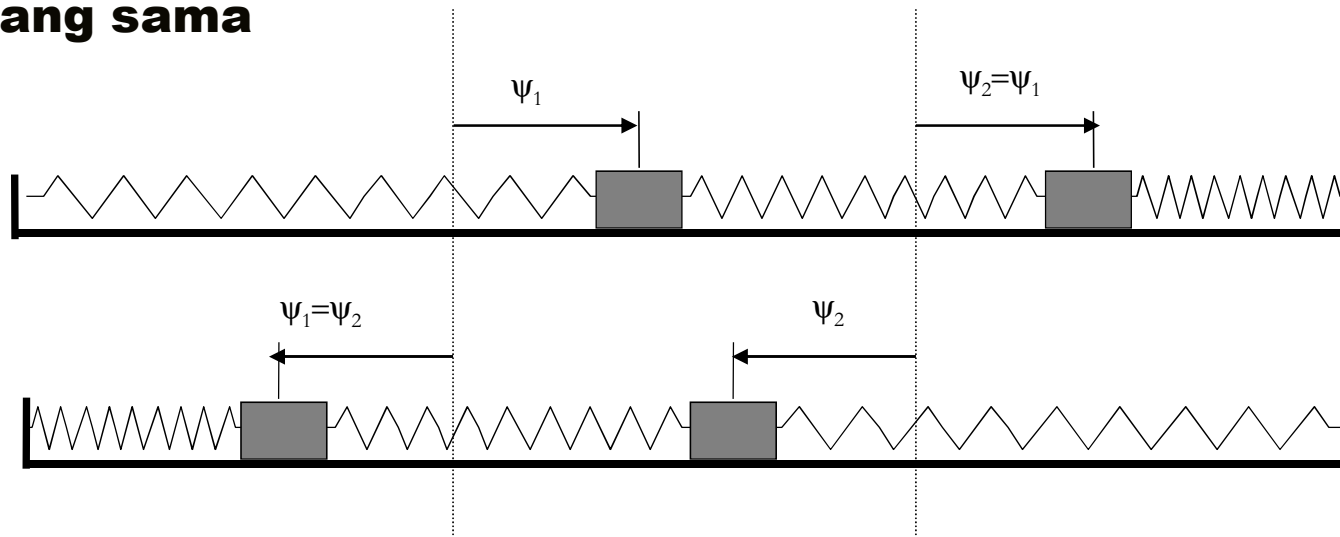
$$\frac{d^2\psi_I}{dt^2} = -\frac{k}{m}\psi_I \rightarrow \text{mode rendah}$$

Solusi persamaan

$$\begin{aligned}(\psi_1 + \psi_2) &= \psi_I = A_I \cos(\omega_I t + \phi) \\ &= (A_1 + A_2) \cos(\omega_I t + \phi)\end{aligned}$$

merupakan osilasi pusat massa

gerak osilasi pusat massa ini mempunyai frekuensi yang sama dengan frekuensi osilasi pegas tunggal, pegas penggandeng hanya berfungsi sebagai penyelaras gerak osilasi. Perpindahan masing-masing benda mempunyai besar dan arah yang sama



$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\frac{2k}{m}\psi_1 + \frac{k}{m}\psi_2$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = +\frac{k}{m}\psi_1 - \frac{2k}{m}\psi_2 \quad -$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\psi_1 - \psi_2) = -\frac{2k}{m}(\psi_1 - \psi_2) + \frac{k}{m}(\psi_1 - \psi_2)$$

Jika $(\psi_1 - \psi_2) = \psi_{II} = A_{II} \cos(\omega_{II}t + \phi)$
 $= (A_1 - A_2) \cos(\omega_{II}t + \phi)$

maka $\frac{d^2\psi_{II}}{dt^2} = -\frac{k}{m}\psi_{II} - \frac{2k}{m}\psi_{II}$

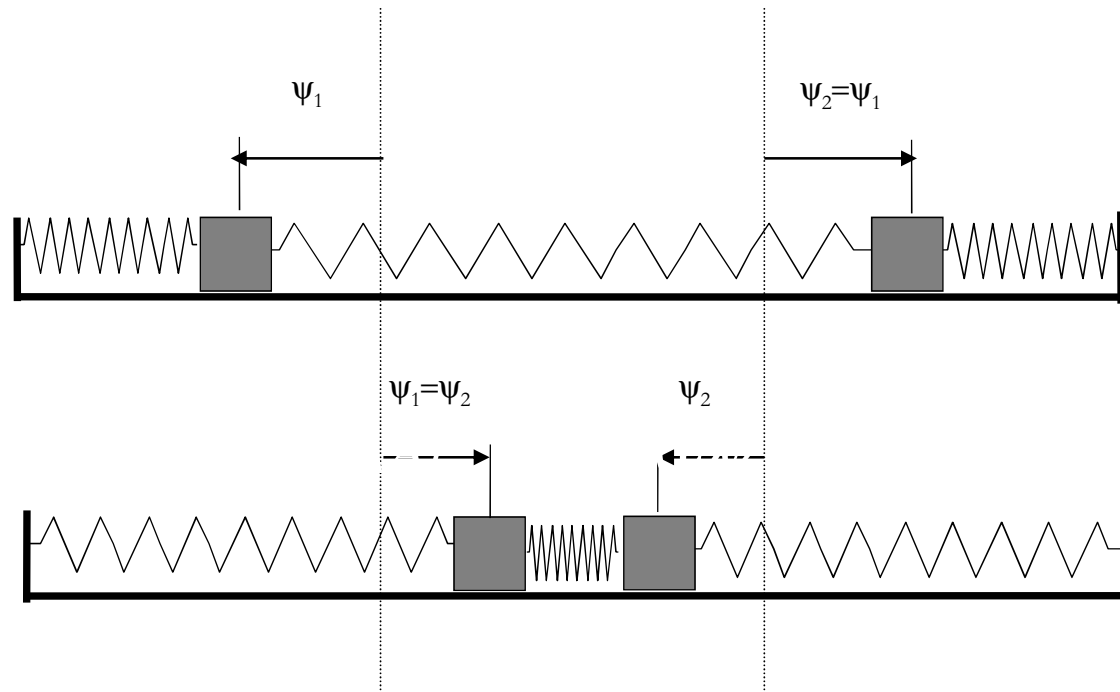
$$\frac{d^2\psi_{II}}{dt^2} = -\frac{3k}{m}\psi_{II} \rightarrow \text{mode tinggi}$$

$$\omega_{II}^2 = \frac{3k}{m}$$

Solusi persamaan

$$\begin{aligned}(\psi_1 - \psi_2) &= \psi_{II} = A_{II} \cos(\omega_{II}t + \phi) \\ &= (A_1 - A_2) \cos(\omega_{II}t + \phi)\end{aligned}$$

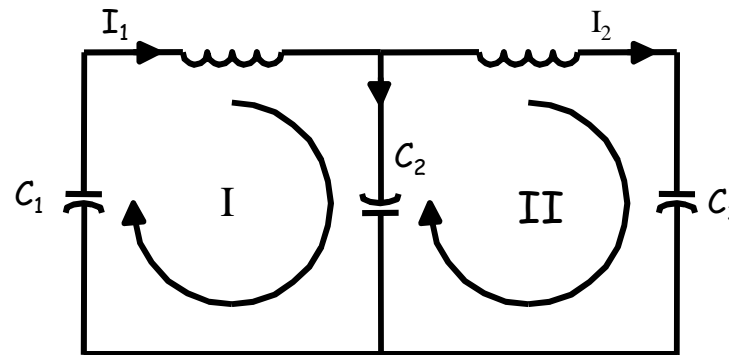
merupakan osilasi relatif



Gerak osilasi seluruh sistem merupakan superposisi linier dari kedua osilasi harmonik tersebut, yaitu:

$$\psi = \psi_I + \psi_{II}$$

OSILASI GANDENG RANGKAIAN LC



Osilasi Gandeng Rangkaian LC

Rangkaian LC gandeng yang terdiri dari tiga kapasitor yang kapasitansinya sama yakni C , dan dua induktor yang induktansinya juga sama yakni L , seperti pada gambar. Mula-mula rangkaian ini dihubungkan dengan suatu sumber, dan setelah tercapai resonansi sumber dilepas kembali.

Hukum II Kirchoff, dalam rangkaian tertutup $\sum V = 0$

Loop I : $V_{L_1} + V_{C_1} + V_{C_2} = 0$

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

$$L_1 \frac{d^2 Q_1}{dt^2} + \frac{1}{C_1} \frac{dQ_1}{dt} + \frac{1}{C_2} \frac{dQ_2}{dt} = 0 \quad (1.18)$$



$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{1}{L_1 C_1} \frac{dQ_1}{dt} + \frac{1}{L_1 C_2} \frac{dQ_2}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{1}{L_1 C_1} I_1 + \frac{1}{L_1 C_2} I_2 = 0$$

Dari hukum I Kirchoff $I_1 = I_2 + I_3 \rightarrow I_2 = I_1 - I_3$ Maka :

$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{1}{L_1 C_1} I_1 + \frac{1}{L_1 C_2} (I_1 - I_3) = 0$$

$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_2} \right) I_1 - I_3 \frac{1}{L_1 C_2} = 0 \quad \dots (1.19)$$

Loop II $V_{L_2} + V_{C_3} + V_{C_2} = 0$

$$L_2 \frac{dI_3}{dt} - \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = 0$$

$$\frac{d^2 I_3}{dt^2} - \frac{1}{L_2 C_2} I_2 + \frac{1}{L_2 C_3} I_3 = 0$$

$$\frac{d^2 I_3}{dt^2} - \frac{1}{L_2 C_2} (I_1 - I_3) + \frac{1}{L_2 C_3} I_3 = 0$$

$$\frac{d^2 I_3}{dt^2} - \frac{1}{L_2 C_2} I_1 + \left(\frac{1}{L_2 C_3} + \frac{1}{L_2 C_2} \right) I_3 = 0 \quad \dots (1.20)$$

Mode normal $\longrightarrow I_n = I_{0n} \sin(\omega_n t - \varphi)$

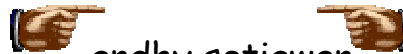
$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} = -\omega^2 I_1 \longrightarrow \text{Substitusikan pada pers. (1.19)}$$

$$\frac{d^2 I_3}{dt^2} = -\omega^2 I_3 \longrightarrow \text{Substitusikan pada pers. (1.20)}$$

$$-\omega^2 I_1 + \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_2} \right) I_1 - I_3 \frac{1}{L_1 C_2} = 0$$

$$\left(-\omega^2 + \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_2} \right) \right) I_1 - I_3 \frac{1}{L_1 C_2} = 0$$




andhy setiawan



$$\left(-\omega^2 + \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_2} \right) \right) I_1 - I_3 \frac{1}{L_1 C_2} = 0$$

$$-\omega^2 I_3 - \frac{1}{L_2 C_2} I_1 + \left(\frac{1}{L_2 C_3} + \frac{1}{L_2 C_2} \right) I_3 = 0$$

$$\left(\frac{1}{L_2 C_3} + \frac{1}{L_2 C_2} - \omega^2 \right) I_3 - \frac{1}{L_2 C_2} I_1 = 0$$

Dalam bentuk matrik

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{L_2 C_3} + \frac{1}{L_2 C_2} - \omega^2 \right) & -\frac{1}{L_1 C_2} \\ -\frac{1}{L_2 C_2} & \left(\frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{L_2 C_3} - \omega^2 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_3 \end{bmatrix} = 0$$

andhy setiawan

Determinan matrik

$$\left(\frac{1}{L_2 C_3} + \frac{1}{L_2 C_2} - \omega^2\right) \left(\frac{1}{L_2 C_3} + \frac{1}{L_2 C_2} - \omega^2\right) - \left(\frac{1}{L_1 C_2}\right) \left(\frac{1}{L_2 C_2}\right) = 0$$

$$(\omega^2)^2 - \left(\frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{L_2 C_3}\right) (\omega^2) - \left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_2}\right) (\omega^2) +$$

$$\left[\left(\frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_1 C_2}\right) + \left(\frac{1}{L_2 C_2} + \frac{1}{L_2 C_3}\right) \right] - \left(\frac{1}{L_1 C_2} \times \frac{1}{L_2 C_2}\right) = 0$$

Ingat!!!
Rumus
abc

$$A(\omega^2)^2 - B(\omega^2) - C = 0$$

Silahkan selesaikan!!!!

Persamaan kuadrat

andhy setiawan



ANALISIS OSILASI HARMONIS

Fungsi gangguan $\psi(t)$ yang periodik dapat diuraikan sebagai superposisi linier dari fungsi harmonik sederhana dengan amplitudo dan frekuensi tertentu, melalui uraian deret Fourier sebagai berikut:

$$\psi(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1} \{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\} \quad (1.21)$$

dengan a_n dan b_n disebut koefisien-koefisien Fourier.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t) \cos(n\omega t) dt \quad (1.22)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \psi(t) \sin(n\omega t) dt \quad (1.23)$$

dengan $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, dan $\omega = \frac{2\pi}{T}$



Untuk gangguan $\psi(t)$ yang tidak periodik dapat diuraikan sebagai superposisi linier dari fungsi harmonik sederhana, melalui transformasi Fourier sebagai berikut:

dengan

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.24)$$

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (1.25)$$

Persamaan 1.24 menunjukkan bahwa gangguan yang tidak periodik dapat dinyatakan sebagai superposisi linier dan fungsi harmonik dalam spektrum ω yang kontinu.

Analisis energi potensial dari sistem osilasi:

$$V(\psi) = \int_0^{\psi} F(\psi) d\psi = \frac{1}{2} k\psi^2 \quad (1.26)$$

Jadi, fungsi energi potensial $V(\psi)$ yang sebanding dengan ψ^2 , mengungkapkan gerak osilasi harmonis dari sistem tersebut.



Sebaliknya dapat ditunjukkan bahwa setiap sistem dengan fungsi energi potensial yang berharga minimum pada suatu titik tertentu (misalnya di $\psi = \psi_0$), maka sistem tersebut akan berosilasi di sekitar titik ψ_0 tersebut.

Syarat Minimum:

$$\left. \frac{dV}{d\psi} \right|_{\psi = \psi_0} = 0 \quad \text{dan} \quad (1.27)$$

$$\left. \frac{d^2V}{d\psi^2} \right|_{\psi = \psi_0} > 0$$

Fungsi potensial $V(\psi)$ diekspansikan kedalam deret Taylor untuk $\psi = \psi_0$ maka

$$V(\psi) = V(\psi_0) + (\psi - \psi_0) \left. \frac{dV}{d\psi} \right|_{\psi = \psi_0} + \frac{(\psi - \psi_0)^2}{2!} \left. \frac{d^2V}{d\psi^2} \right|_{\psi = \psi_0} + \dots$$

Mengingat persamaan (1.27), maka persamaan terakhir ini dapat dituliskan dalam bentuk :

$$V(\psi) - V(\psi_0) = \frac{(\psi - \psi_0)^2}{2!} \left. \frac{d^2V}{d\psi^2} \right|_{\psi=\psi_0} \quad (1.28)$$

Tampak bahwa persamaan (1.28) ini merupakan bentuk yang sama dengan persamaan (1.26), ini terpenuhi bila osilasinya mempunyai simpangan (aproksimasi) yang kecil.

Thanks for your Attention!!!



andhy setiawan