INTERFERENSI DAN DIFRAKSI

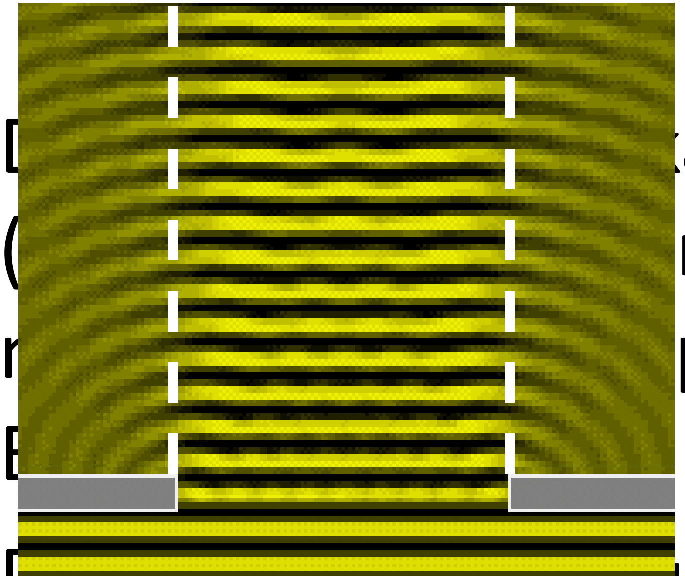
Mata Kuliah: Gelombang & Optik

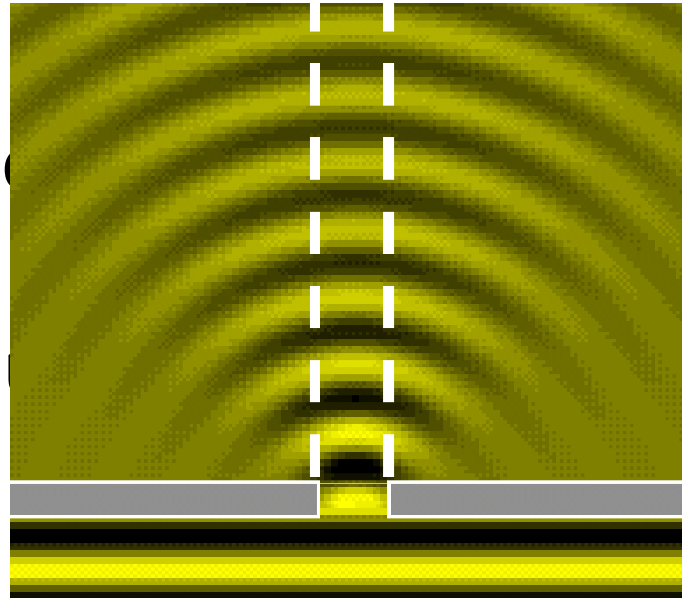
Dosen: Andhy Setiawan

DIFRAKSI

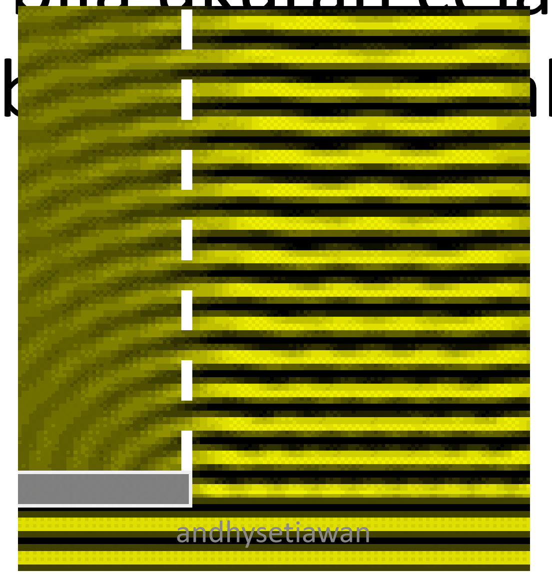
CELAH TUNGGAL DAN KISI

B. Difraksi





- D… kan ge… n (… mbang … r r… pit atau … u E…
- Difraksi terjadi bila ukuran celah lebih kecil dari panjang gelomb… luinya.

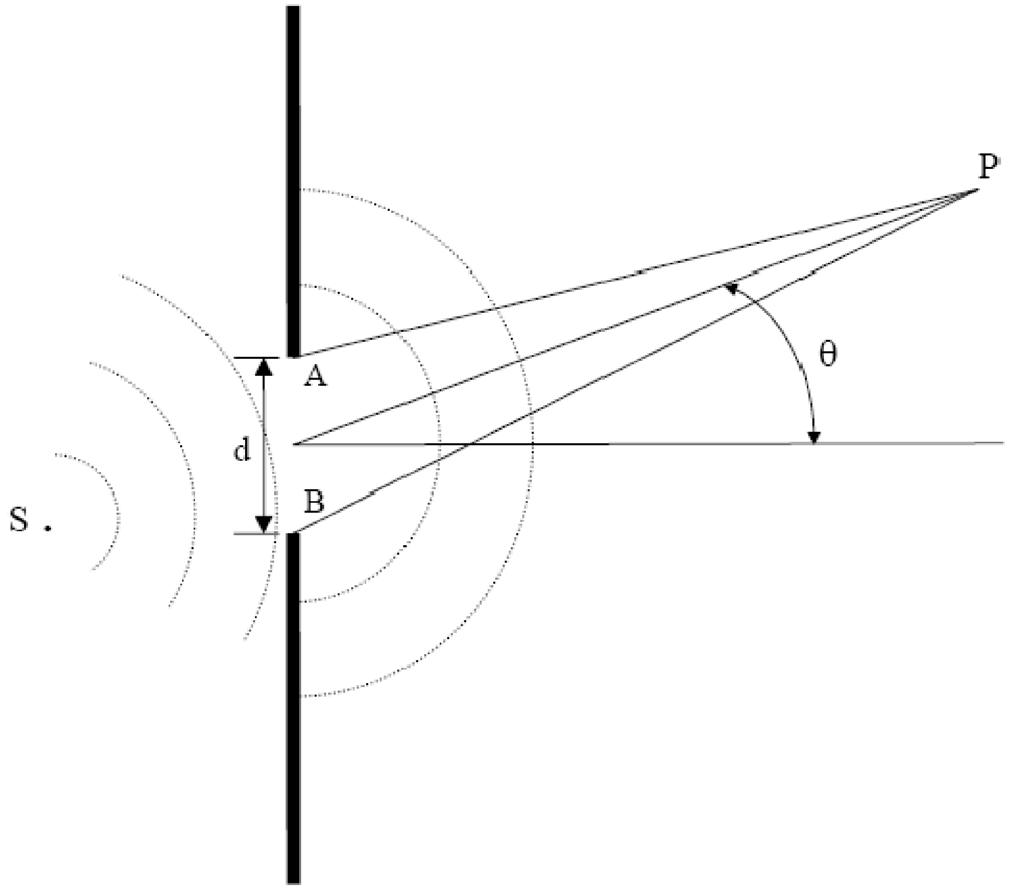


Teori yang mendasari gejala difraksi

Prinsip Huygens-Fresnel:

Dalam proses perambatan gelombang bebas, setiap titik pada suatu muka gelombang berfungsi sebagai sumber sekunder sferis untuk anak gelombang (wavelet), dengan frekuensi yang sama dengan gelombang primernya.

B.1. Difraksi Fresnel dan Difraksi Fraunhofer



Gambar gejala difraksi dari suatu gelombang datar yang menjalar melalui suatu celah.

• Menurut prinsip Huygens-Fresnel titik A dan B pada tepi celah, merupakan sumber sekunder dengan fase yang sama.

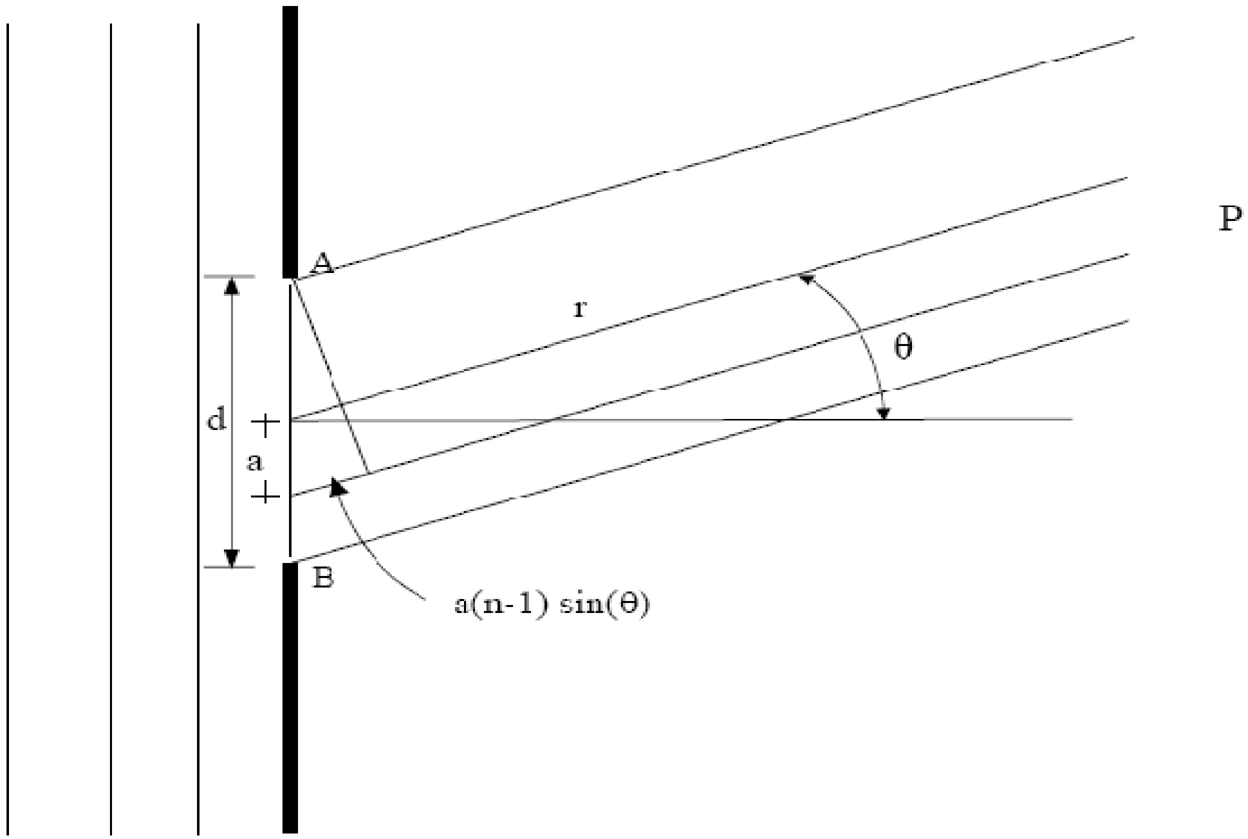
• Efek difraksi diamati pada sutu titik P pada arah θ terhadap sumbu celah. <u>Difraksi Fresnel</u>: jika titik P dan sumber gelombang datang tidak begitu jauh dari celah, sehingga gelombang datang tidak dapat dianggap sebagai gelombang datar.

• <u>Difraksi Fraunhofer</u>: jika titik P dan sumber gelombang datang cukup jauh dari celah, sehingga gelombang datang dapat dianggap sebagai gelombang datar.

Difraksi Celah Tunggal: Difraksi Fraunhofer

- gelombang datang berupa gelombang datar
- jartak titik P ke celah, jauh lebih besar dari lebar celah, r >> d .

Difraksi gelombang datang berupa gelombang datar



•Titik-titik pada celah antara A dan B, dapat dipandang sebagai sumber-sumber gelombang sekunder.
•Jadi Pola difraksi celah ini, dapat didekati sebagai pola interferensi sistim banyak celah sempit, masing-masing berjarak a.

Apabila fungsi gelombang yang berasal dari celah sempit pertama (celah sempit paling atas dititk A) adalah:

Misalkan: $$E_1 = E_0 e^{-i\omega t}$$

$$E_n = E_0 e^{-i\left(\omega t - k(n-1)a\sin\theta\right)}$$

Sehingga di titik P akan terjadi superposisi dari $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n = \sum_{n=1}^{n} E_n \longrightarrow E = E_0 e^{-i\omega t}\sum_{n=1}^{N} e^{ika(n-1)\sin\theta}$$

$$E = E_0 e^{-i\omega t} + E_0 e^{-i(\omega t - ka\sin\theta)} + E_0 e^{-i(\omega t - 2ka\sin\theta)} + \ldots + E_0 e^{-i(\omega t - k(N-1)a\sin\theta)}$$

$$E = E_0 e^{-i\omega t}\underbrace{\left(1 + e^{ika\sin\theta} + e^{2ia\sin\theta} + \ldots + e^{ika(N-1)\sin\theta}\right)}$$

deret ukur dengan rasio $r = e^{ika\sin\theta}$

$$S_N = \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{e^{ikaN\sin\theta} - 1}{e^{ika\sin\theta} - 1}$$

$$S_N = \frac{e^{ika\frac{N}{2}\sin\theta}\left(e^{ika\frac{N}{2}\sin\theta} - e^{-ika\frac{N}{2}\sin\theta}\right)}{e^{i\frac{ka}{2}\sin\theta}\left(e^{i\frac{ka}{2}\sin\theta} - e^{-i\frac{ka}{2}\sin\theta}\right)}$$

$$S_N = e^{i\frac{ka}{2}(N-1)\sin\theta}\frac{\left[2i\sin\left(ka\frac{N}{2}\sin\theta\right)\right]}{\left[2i\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)\right]}$$

$$= e^{i\frac{ka}{2}(N-1)\sin\theta}\left(\frac{\sin\left(ka\frac{N}{2}\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)}\right)$$

Maka persamaan ..1 berubah menjadi:

$$E = E_0 e^{-i\omega t}\left[e^{i\frac{ka}{2}(N-1)\sin\theta} \frac{\left[\sin\left(ka\frac{N}{2}\sin\theta\right)\right]}{\sin\left[\frac{ka}{2}\sin\theta\right]}\right]$$

$$E = E_0 e^{-i\omega t+\frac{1}{2}ika(N-1)\sin\theta}\left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2}kaN\sin\theta\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}ka\sin\theta\right]}\right]$$

misalnya $$(N-1)a = b$$

Kemudian bila jumlah sempit N diperbanyak sehingga menuju tak hingga, maka

$$(N-1)a \cong Na = b$$

$$E = E_0 e^{-i\omega t + \frac{1}{2}ikb\sin\theta}\left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2}kb\sin\theta\right)\right]}{N\sin\left[\frac{1}{2}ka\sin\theta\right]}\right]N$$

karena $$\sin\left(\frac{1}{2}ka\sin\theta\right) \approx \frac{1}{2}ka\sin\theta$$

$$E = E_0 e^{-i\omega t + \frac{1}{2}ikb\sin\theta}\left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2}kb\sin\theta\right)\right]}{\frac{1}{2}kb\sin\theta}\right]N$$

$$E = E_0 e^{-i\omega t + \frac{1}{2} ikb \sin\theta} \left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2} kb \sin\theta\right)\right]}{\frac{1}{2} kb \sin\theta} \right] N$$

misal $r = \frac{1}{2} b \sin\theta$

$$E = E_0 e^{-i\omega t + ikr} \left[\frac{[\sin(kr)]}{kr} \right] N$$

Jika $\beta = kr = \frac{1}{2} kb \sin\theta$

Maka :

$$E = E_0 e^{-i(\omega t - \beta)} \left[\frac{\sin\beta}{\beta} \right] N$$

$$E = E_0 e^{-i(\omega t - kr)} \left[\frac{\sin \beta}{\beta} \right] N$$

Superposisi gelombang di titik P

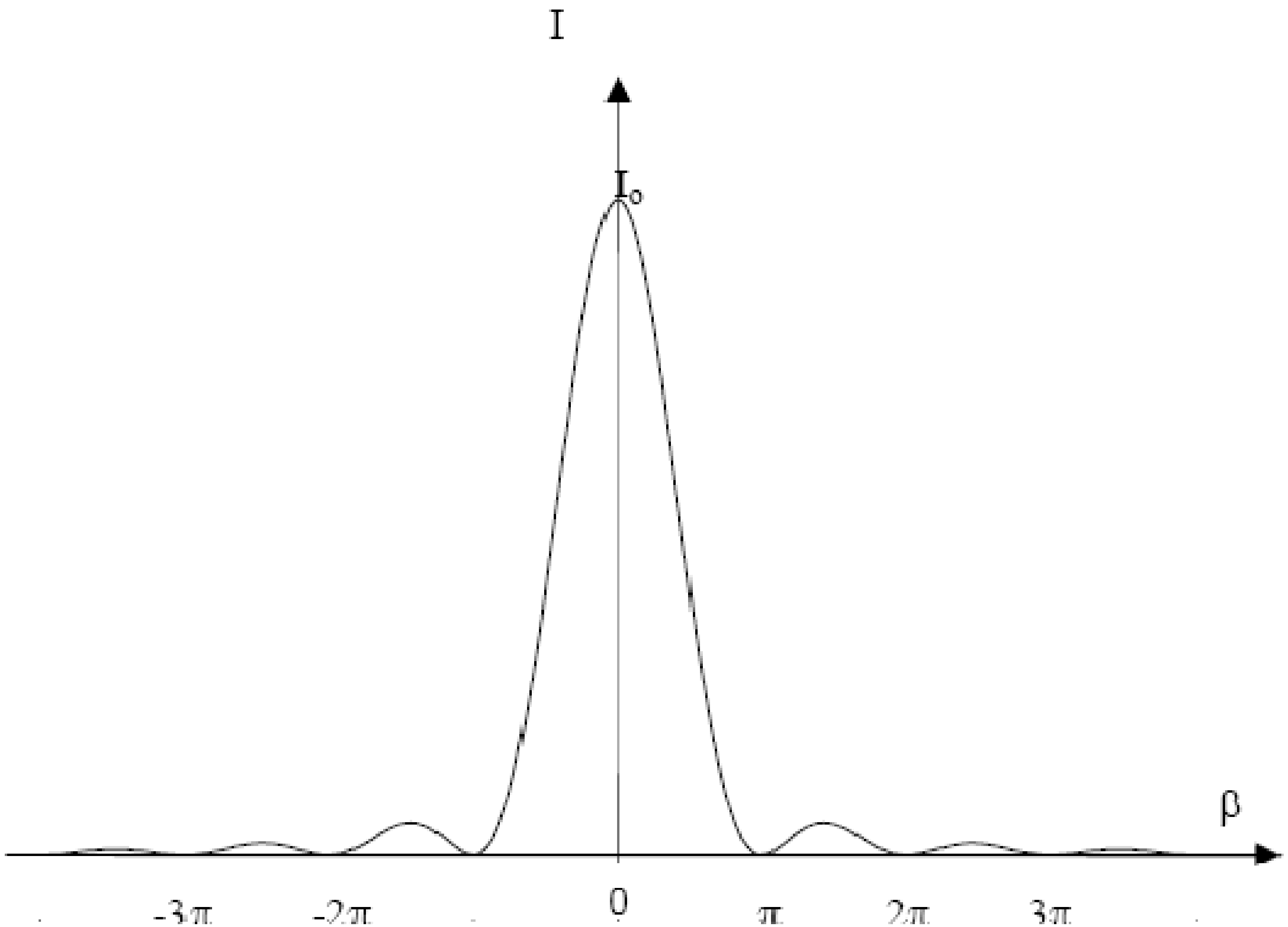
Maka pola difraksinya dapat diperoleh melalui Intensitas gelombang dititik P

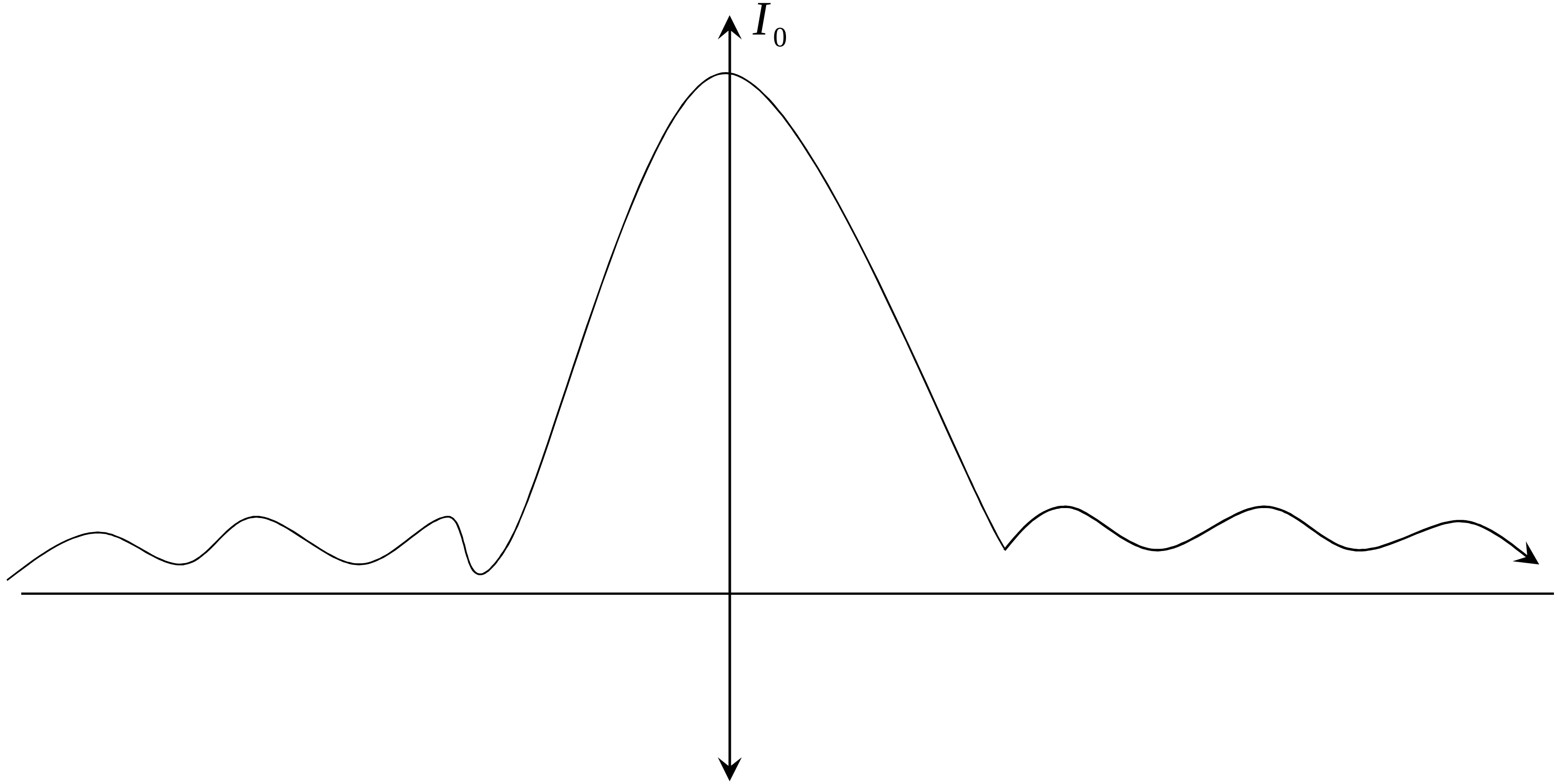
$$\boxed{I = I_0 \left[\frac{\sin \beta}{\beta} \right]^2 N^2}$$

Untuk θ = 0 diperoleh pucak intensitas maksimum sebesar I_0,

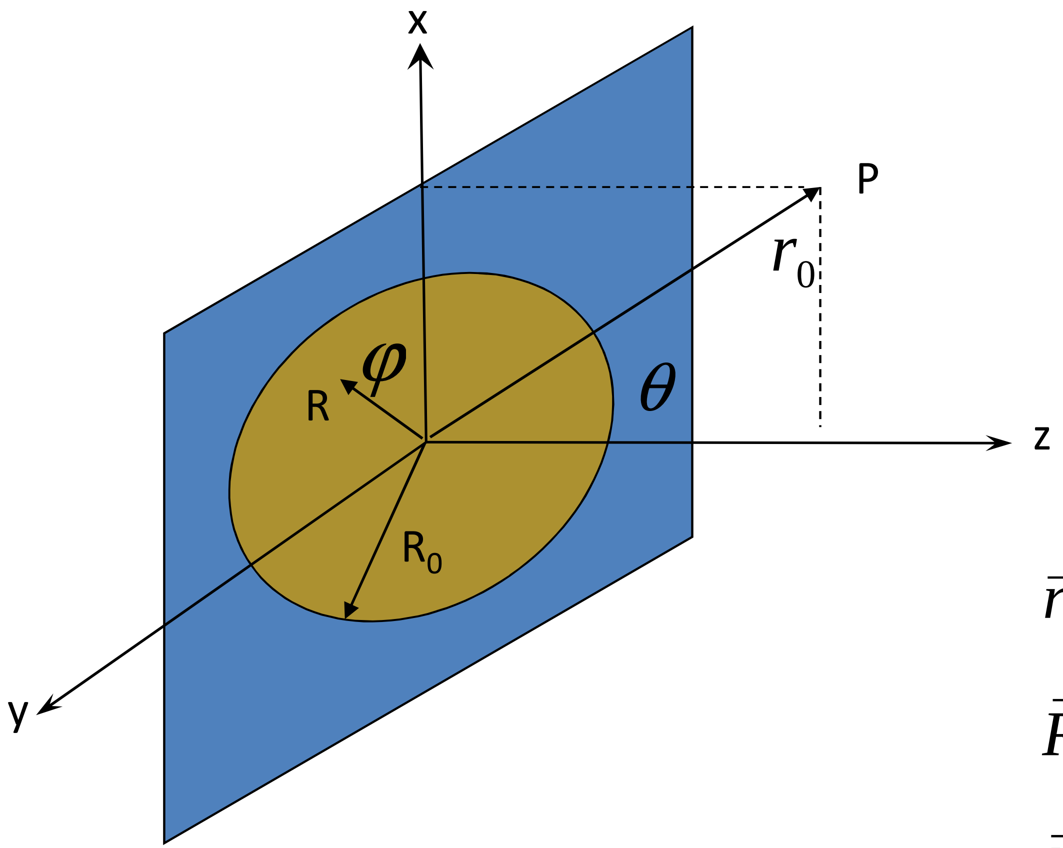
jadi intensitas maksimum terletak pada arah sumbu celah

Pola difraksi celah tunggal




I_0

Untuk bukaan (aperture) yang tidak berbentuk celah, misalnya bebentuk lingkaran dengan jari-jari R, maka :



$$\vec{r} = \vec{r}_0 . \vec{R}$$

$$\vec{r}_0 = (\sin\ \theta, 0 . \cos\ \theta)$$

$$\vec{R} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, .0)$$

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{R} = R\cos\varphi\sin\theta$$

$$dE = \frac{E_0}{\pi R^2} e^{-i(kR\cos\varphi\sin\theta - \omega t)} RdRd\theta$$

$$dS = RdRd\theta$$

$$E = \frac{2E_0}{R^2} e^{-i\omega t} \frac{1}{2\pi} \int_0^d \left[\int_0^{2\pi} e^{ikR\sin\theta\cos\varphi} d\varphi \right] RdR$$

Misal :

$$\rho = kR\sin\theta \qquad R = \frac{\rho}{k\sin\theta}$$

$$d\rho = k\sin\theta dR$$

$$dR = \frac{d\rho}{k\sin\theta}$$

$$RdR = \frac{\rho d\rho}{(k\sin\theta)^2}$$

Subtitusikan ke persamaan …1 akan diperoleh persamaan

$$E = \frac{2E_0}{R^2} e^{-i\omega t} \frac{1}{2\pi} \int_0^d \left[\int_0^{2\pi} e^{i\rho\cos\varphi} d\varphi \right] RdR$$

$$E = \frac{2E_0}{R^2} e^{-i\omega t} \frac{1}{2\pi} \int_0^{kd\sin\theta} \left[\int_0^{2\pi} e^{i\rho\cos\varphi} d\varphi \frac{\rho d\rho}{(k\sin\theta)^2} \right] \quad E = \frac{2E_0}{R^2} e^{-i\omega t} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(k\sin\theta)^2} \int_0^{kd\sin\theta} \left[\int_0^{2\pi} e^{i\rho\cos\varphi} d\varphi \right] \rho d\rho$$

$$E = \frac{2E_0}{R^2} e^{-i\omega t} \frac{1}{(k\sin\theta)^2} \int_0^{kd\sin\theta} \rho J_0(\rho) d\rho$$

Dengan menggunakan fungsi Bessel

$$J_0(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\rho\cos\varphi} d\varphi$$

$$\rho(d) = kd\sin\theta$$

$$J_1(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(\varphi+\rho\cos\varphi)} d\varphi$$

$$E=\frac{2E_0}{R^2}e^{-i\omega t}\frac{1}{(k\sin\theta)^2}\int_0^{dk\sin\theta}\rho J_0(\rho)d\rho$$

$$u=Rk\sin\theta$$

$$E=2E_0\frac{1}{(Rk\sin\theta)^2}e^{-i\omega t}\int_0^{kd\sin\theta}J_0(\rho)\rho d\rho$$

$$J(u)=\int_0^{u(d)}J_0(u)d\rho$$

$$E=2E_0\frac{1}{(u)^2}e^{-i\omega t}\int_0^{kd\sin\theta}J_0(\rho)ud\rho$$

$$E=2E_0e^{-i\omega t}\frac{J(u)}{u}$$

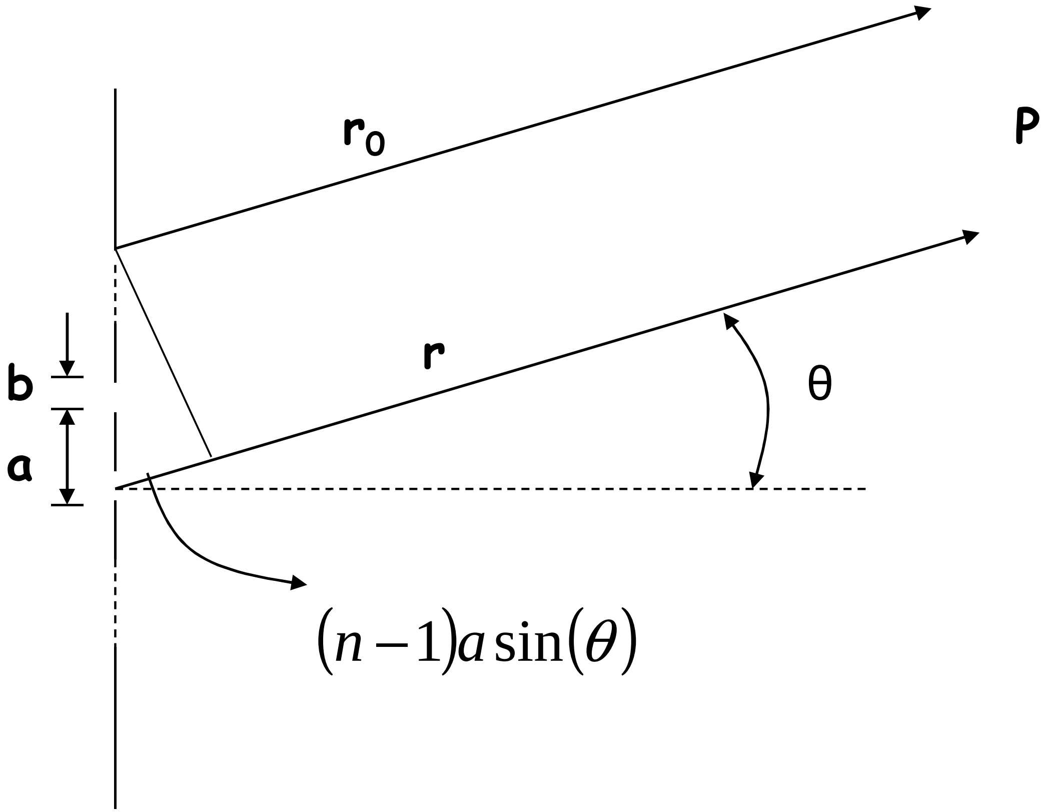
$$E=2E_0\frac{1}{u}e^{-i\omega t}J(u)$$

Intensitas pada arah θ adalah

$$I=I_0\left[\frac{2J(u)}{u}\right]^2$$

Kisi Difraksi

Kisi Difraksi merupakan sistem N buah celah, dengan lebar celah yang teratur. Diraksi oleh kisi seferti ini akan menghasilkan pola difraksi tunggal tak sempit dengan pola interferensi N buah sumber yang sinkron.



Gambar 6.13 Diraksi oleh N buah celah

Gambar 6.13 memperlihatkan difraksi oleh sebuah kisi, lebar celah dan jarak antara celah masing-masing b dan a. Bila kisi ini disinari cahaya monokromatik, osilasi listrik di titik P yang ditimbulkan oleh celah ke nomor ke n adalah:

$$E_n = E_0 e^{-i(kr-u-\omega t)}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right]$$

Dimana $\Delta r = r - r_o$

$$r = \Delta r + r_o$$

$$\Delta r = (n-1)\, a \sin\theta$$

$$r = r_o + (n-1)\, a \sin\theta$$

$r_{o\,=}$ Jarak tepi celah pertama sampai ke titik P

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n$$ Yang memberikan hasil:

$$E = \sum_{n=1}^{N} E_n(\theta)$$

$$E = E_{01}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{-i(kr_o + 0 - u - \omega t)} + E_{01}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{-i(k(r_o + a\sin\theta - u - \omega t)} + \cdots + E_{01}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{-i(k(r_o + (n-1)a\sin\theta - u - \omega t)}$$

$$E = E_{01}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{-i(-u-\omega t)} e^{ikr_o}\left[1 + e^{ika\sin\theta} + \ldots + e^{i(n-1)ka\sin\theta}\right]$$ 1

Dengan $e^{ika\sin\vartheta}$

$$S = \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{e^{ikaN\sin\theta} - 1}{e^{ika\sin\theta} - 1}$$ 2

$$S = \frac{e^{ika\frac{N}{2}\sin\theta}\left(e^{ika\frac{N}{2}\sin\theta} - e^{-ika\frac{N}{2}\sin\theta}\right)}{e^{i\frac{ka}{2}\sin\theta}\left(e^{i\frac{ka}{2}\sin\theta} - e^{-i\frac{ka}{2}\sin\theta}\right)}$$

$$S = e^{\frac{1}{2}ika\,(N-1)\sin\theta}\left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2}kaN\ \sin\theta\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}ka\ \sin\theta\right]}\right]$$

Untuk lebar celah sempit a mendekati nol. Maka

$$(N-1)a = Na = Nb$$

$$E = E_{01} e^{-i(kr_o - u - \omega t)} \left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{\frac{1}{2} ika \sin\theta} \left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2}Nkb\sin\theta\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}kb\sin\theta\right]}\right]$$

$$E = E_{01} e^{-i(kr_o - u - \omega t)} \left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{\frac{1}{2} ikb \sin\theta} \left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2}Nkb\sin\theta\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}kb\sin\theta\right]}\right]$$

misal $\delta = kb\sin\theta$

$$E = E_{01}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{-i(k\delta-\omega t)}\left[\frac{\left[\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right] \quad .....2$$

sehingga

$$I = NE_{o1}{}^{2}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right]^{2}\left[\frac{\left[\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)\right]}{N\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right]^{2}$$

$$I = I_{0}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right]^{2}\left[\frac{\left[\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)\right]}{N\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right]^{2}$$

Intensitas maksimum utama (primer) dicapai bila $\frac{\delta}{2} = m\pi$ dengan m bilangan bulat

$$\frac{\delta}{2} = m\pi$$

$$\frac{1}{2} kb \sin\theta = m\pi$$

$$\sin\theta = \frac{2m\pi}{kb}$$

$$\sin\theta = \frac{2m\pi}{\frac{2\pi b}{\lambda}}$$

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{b}$$

Maksimum tambahan (sekunder) dicapai apabila

$$\frac{N\delta}{2} = \frac{(2m-1)}{2}\pi \quad \text{dengan} \quad m = \pm 1, \pm 2$$

$$\frac{1}{2} kNb \sin\theta = \frac{(2m+1)\pi}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{(2m+1)\pi}{Nb}$$

Minimum (titik nol) terjadi bila

$$\frac{N\delta}{2} = m\pi \quad \text{dengan} \quad m = \pm 1, \pm 2$$

$$\frac{1}{2} kNb \sin\theta = m\pi$$

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{Nb}$$

Apabila cahaya yang datang terdiri dari dua panjang gelombang yang berbeda, maka kedudukan maksimum utama dari kedua panjang gelombang tersebut pada orde m yang sama akan terpisah bila

$$\Delta \theta = m \frac{\Delta \lambda}{a \cos \theta}$$

$$\Delta \theta = \frac{\lambda}{aN \cos \theta}$$

$$atau$$

$$m \frac{\Delta \lambda}{a \cos \theta} = \frac{\lambda}{aN \cos \theta}$$

$$\frac{\lambda}{\Delta \lambda} = Nm$$

Besaran ini sering dinyatakan dengan daya pisah (DP) jadi

$$DP = \frac{\lambda}{\Delta \lambda} = Nm$$