

# Studi Awal Analisis Geometri Tortuositas dalam Pemodelan Rekahan yang Digenerasi Fraktal IFS

*S.Feranie, U.Fauzi, S.Bijaksana*

Fisika Sistem Komplek. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Teknologi Bandung – Indonesia  
*Email: feranie@upi.edu*

## Abstrak

Telah dilakukan perhitungan tortuositas secara analitik untuk model rekahan yang digenerasi fraktal IFS. Hubungan antar parameter-parameter pemodelan seperti input awal, faktor skala ( $s$ ), sudut antar cabang ( $\theta$ ) dan iterasi ( $i$ ) terhadap tortuositas diinvestigasi. Untuk kasus input awal garis lurus (1,0), tortuositas bergantung pada factor skala, sudut antar cabang dan banyaknya iterasi untuk jumlah iterasi genap tetapi tidak bergantung banyaknya iterasi untuk jumlah iterasi ganjil. Hasil turunan perhitungan turtuositas dicek dengan perhitungan tortuositas dari imej model yang berkaitan. Untuk factor skala kecil, hasil perhitungan dari imej model sesuai dengan hasil perhitungan secara analitik.

## 1. Pendahuluan

Sistem berpori memiliki rekahan (Sahimi dalam Afdal, 2005). Aliran fluida dan besaran-besaran fisis yang terukur dipengaruhi oleh rekahan, sehingga karakteristik dan pemodelan rekahan ini diperlukan dalam beberapa bidang. Jumlah lapangan minyak dan gas yang di dalamnya rekahan memainkan peran penting telah meningkat pada beberapa tahun belakangan (Nelson dalam Afdal, 2005). Cadangan reservoir geothermal bergantung terutama pada porositas matriks batuan, sedangkan laju produksi uap dan air bergantung terutama pada rekahan (Li dalam Afdal, 2005).

Dalam eksplorasi air, hidrokarbon dan studi aliran fluida lainnya sangat bergantung kepada sifat-sifat fisis batuan. Sifat-sifat fisis batuan sangat dipengaruhi oleh besaran-besaran fisis mikroskopis dan struktur geometri batuan tersebut. Beberapa besaran fisis mikroskopis yang paling penting adalah porositas dan permeabilitas. Permeabilitas dipengaruhi oleh beberapa besaran fisis mikroskopis lain, antara lain adalah tortuositas. Salah satu estimasi nilai tortuositas dari suatu media berpori baik alamiah maupun model dapat dilakukan dengan analisis geometri dari media tersebut.

Sun dan Koch (1998) menyatakan bahwa formasi batuan geologi berpori memiliki sifat fraktal. Pemodelan media berpori yang digenerasi fraktal telah banyak dilakukan, diantaranya: Wei-Wei (2006), Teo (2006), Wang (2005), Sun (1998), Pape (1999) dan Mistakidis (1997). Dari hasil penelitian mereka, pemodelan yang digenerasi fraktal memiliki potensial yang cukup tinggi untuk dapat memodelkan media berpori walaupun dalam pemodelannya memerlukan optimasi parameter-parameter dalam menggenerasi fraktal untuk dapat memodelkan media berpori yang valid dengan data sebenarnya. Salah satu contohnya adalah penelitian yang dilakukan Wang (2005) yang mengembangkan fungsi retensi air tanah berdasarkan model fraktal pori-solid (PSF=pore-solid fraktal) untuk menggambarkan dan menginterpretasi secara akurat sifat hidroliknya. Fungsi yang digenerasi oleh PSF ini lalu dikomparasi dengan 65 data tanah. Hasil penelitiannya menunjukkan fungsi PSF cocok dengan data hasil pengukuran

Pemodelan menggunakan fraktal IFS telah banyak dilakukan diantaranya: Perfect dkk (2006) menggenerasi monofraktal dan multifraktal karpet Sierpinski menggunakan

IFS dalam penelitiannya. Mistakidis (1997) memodelkan retakan dengan IFS untuk mendapatkan gambaran sifat mekanis bahan yang dimodelkan, sedangkan He (1999) memaparkan beberapa konsep batas dalam dan peta pemisahan dalam lalu kemudian menggunakan algoritma filter batas dalam untuk penentuan batas spatial dari atraktor IFS dengan cepat dan akurat dan Cen (1997) mengeksplorasi penggunaan IFS 3D sebagai model grafik waktu termasuk pewarnaan, pencahayaan dan efek kabut.

Pada paper ini dilakukan perhitungan tortuositas secara analitik geometris untuk model rekahan yang digenerasi fraktal IFS. Hubungan antar parameter-parameter pemodelan seperti input awal, faktor skala (s), sudut terhadap cabang sebelumnya ( $\theta$ ) dan iterasi (i) terhadap tortuositas diinvestigasi.

## 2. Deskripsi Model Rekahan dan besaran fisis yang diuji

Fraktal adalah objek yang memiliki kemiripan dengan dirinya sendiri (self similarity) pada skala yang berbeda. Ini berarti, bagian-bagian dari objek akan tampak sama dengan objek itu sendiri bila dilihat secara keseluruhan (Mandelbrot, B, 1984). Pemodelan yang digenerasi fractal banyak ditemukan di hampir tiap kajian ilmu baik untuk kebutuhan *image processing* ataupun prediksi suatu fenomena. *Iterated Function System* (IFS) adalah salah satu cara menggenerasi fraktal dengan mengiterasikan sejumlah transformasi *affine* diantaranya translasi, rotasi dan penskalaan. Contoh dari fraktal kelompok ini adalah set Cantor, karpet Sierpinski, gasket Sierpinski, daun *Fern*, kurva Peano, kepingan salju Koch, dan lain-lain. Transformasi affine lebih mudah dinyatakan dalam bentuk matrik:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x \cos \theta & -s_y \sin \theta \\ s_x \sin \theta & s_y \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \text{ untuk 2D} \quad (1)$$

dengan s adalah faktor skala, t adalah perpindahan atau translasi dan  $\theta$  berkaitan dengan rotasi dan

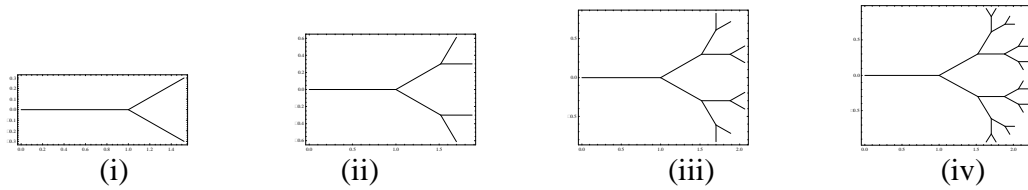
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_x k_x k_x (1-c) + c & s_y k_z k_x (1-c) - k_z s & s_z k_x k_z (1-c) - k_x s \\ s_x k_y k_x (1-c) + k_z s & s_y k_z k_x (1-c) + c & s_z k_y k_z (1-c) - k_x s \\ s_x k_z k_x (1-c) + c & s_y k_z k_x (1-c) - k_x c & s_z k_z k_z (1-c) + c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} \text{ untuk 3D} \quad (2)$$

dengan operasi rotasi terhadap sumbu sembarang k ( $k_x, k_y, k_z$ ),  $c = \cos \theta$  dan  $s = \sin \theta$ .

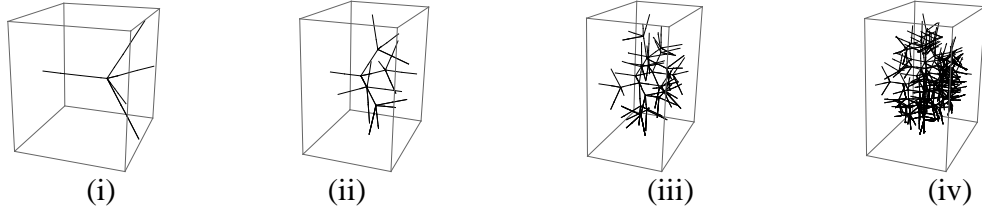
Model rekahan 2D dan 3D digenerasi dengan cara memberi input berupa garis lurus, lalu dioperasikan translasi, rotasi dan penskalaan. Sebagai contoh, model rekahan 2D digenerasi dengan mengiterasikan operasi-operasi translasi (t), rotasi terhadap sumbu z dan penskalaan (s) berbentuk matrik berikut terhadap input sebelumnya

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix} \quad (3)$$

untuk dapat menghasilkan dua cabang dengan rotasi  $\theta$  dan  $-\theta$  dan sebesar s (faktor skala) terhadap input sebelumnya yang ditempatkan (ditranslasikan) di ujung input sebelumnya. Sebagai contoh ilustrasi model rekahan 2D dan 3D untuk kasus input awal garis lurus (1,0), faktor skala 0.5 (untuk 2D) dan 1 (untuk 3D), sudut dengan cabang sebelumnya  $60^\circ$  dan jumlah cabang 2 (untuk 2D) dan 4 (untuk 3D) berbagai iterasi ditunjukkan gambar 1.



Gambar 1(a)



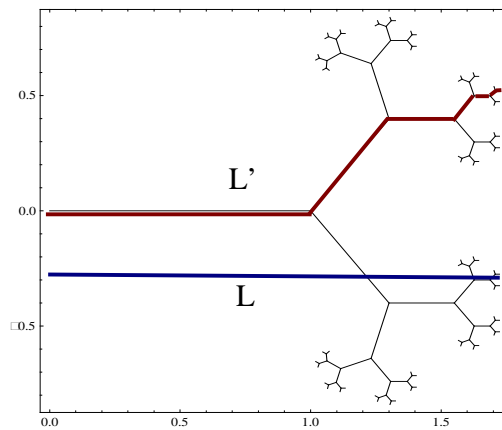
Gambar 1(b)

Gambar 1 (a) Model 2D rekahan yang digenerasi fraktal dengan input awal garis lurus (1,0),faktor skala 0.5, sudut terhadap cabang sebelumnya 60° dan jumlah cabang 2 (b) Model 3D rekahan yang digenerasi fraktal dengan input awal garis lurus (1,0,0),faktor skala 1, sudut dengan cabang sebelumnya 60° dan jumlah cabang 4 untuk iterasi ke- (i)1, (ii) 2, (iii) 3 dan (iv) 4.

Tortuositas ( $\tau$ ) didefinisikan sebagai perbandingan antara panjang jalur yang dapat dilalui fluida dari sisi satu ke sisi lainnya ( $L'$ ) dengan panjang dari sampel tersebut ( $L$ ) Secara matematis, tortuositas dapat didefinisikan sebagai berikut [Palciauskas et al.,1994] :

$$\tau = \frac{L'}{L} \tag{4}$$

Ilustrasi perhitungan tortuositas untuk model 2D rekahan ditunjukkan pada gambar 2. Panjang sampel ( $L$ ) pada paper ini tidak tetap bergantung tetapi bergantung jangkauan maksimum model rekahan yang dapat dicapai di tiap iterasinya.



Gambar 2.Perhitungan tortuositas

“  
“

3. \$mn0-yt ,p

jkjjHasil da n'n Pembahasan

P'erhitungan tortuositas sebagai fungsi iterasi (i), sudut rotasi ( $\theta$ ) dan factor skala (s) berdasarkan analisis geometri untuk kasus input awal garis lurus (1,0) didapatkan untuk jumlah iterasi genap:

$$\tau = \frac{1 + s + s^2 + \dots + s^i}{1 + s \cos \theta + s^2 + \dots}$$

$$\tau = \frac{\sum_{k=0}^i s^k}{\frac{1}{2} [(-1)^{i+1} - 1] s^{i+1} \cos \theta + (1 + s \cos \theta) \sum_{k=0}^{i/2} s^{2k}} \quad (5)$$

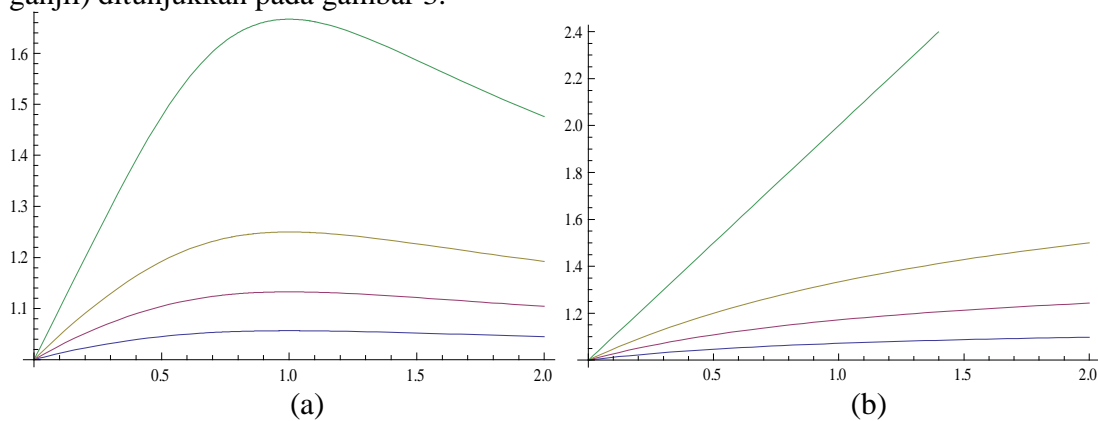
dan untuk jumlah iterasi ganjil:

$$\tau = \frac{1 + s + s^2 + s^3 \dots + s^i}{1 + s \cos \theta + s^2 + s^3 \cos \theta + \dots}$$

$$\tau = \frac{\sum_{k=0}^i s^k}{\frac{1}{2} [(-1)^{i+1} - 1] + (1 + s \cos \theta) \sum_{k=0}^{(i-1)/2} s^{2k}} \quad (6)$$

$$\tau = \frac{1+s}{1 + s \cos (\theta)}$$

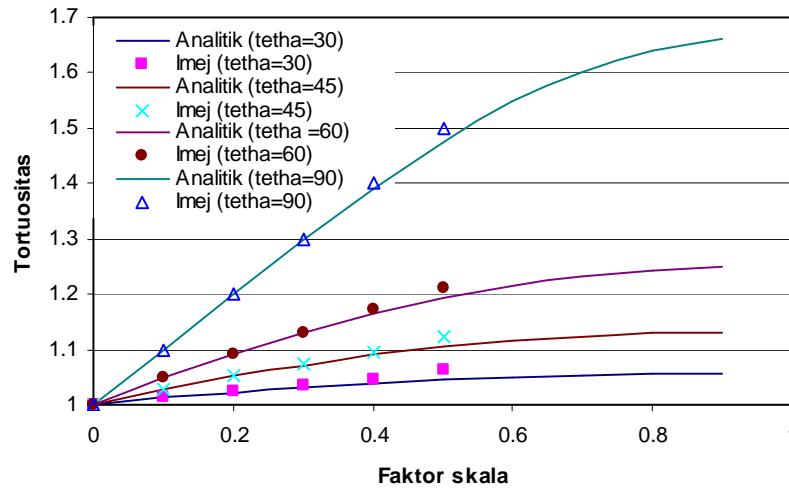
Berdasarkan persamaan (5) dan (6), tortuositas bergantung pada factor skala (s), sudut terhadap cabang sebelumnya ( $\theta$ ) dan banyaknya iterasi (i) untuk jumlah iterasi genap tetapi tidak bergantung banyaknya iterasi untuk jumlah iterasi ganjil. Grafik tortuositas sebagai fungsi factor skala hasil perhitungan analitik dalam berbagai sudut antar cabang untuk iterasi ke-4 (jumlah iterasi genap) dan iterasi ke-5 (jumlah iterasi ganjil) ditunjukkan pada gambar 3.



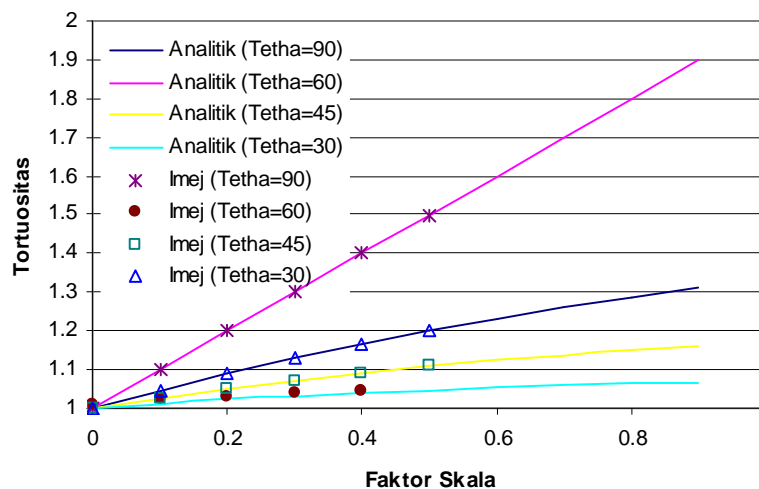
Gambar 3. Grafik Turtositas terhadap factor skala hasil perhitungan analitik dengan sudut terhadap cabang sebelumnya: 90° (hijau), 60°(kuning), 45° (merah) dan 30° (biru) untuk (a) iterasi ke-4 dan (b) iterasi ke-5

Grafik tortuositas sebagai fungsi factor skala hasil perhitungan analitik dan hasil perhitungan dari imej dalam berbagai sudut antar cabang untuk iterasi ke-4 (jumlah iterasi genap) ditunjukkan pada gambar 4 dan iterasi ke-5 (jumlah iterasi ganjil)

ditunjukkan pada gambar 5. Gambar 4 dan gambar 5 menunjukkan untuk faktor skala kecil, hasil perhitungan dari imej model sesuai dengan hasil perhitungan secara analitik



Gambar 4. Grafik Tortuositas terhadap factor skala baik hasil perhitungan analitik (garis) maupun hasil perhitungan dari imej (tanda) untuk model rekahan yang digenerasi fractal IFS pada iterasi ke-4 untuk berbagai sudut terhadap cabang sebelumnya ( $\theta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  dan  $90^\circ$ )



Gambar 5. Grafik Tortuositas terhadap factor skala baik hasil perhitungan analitik (garis) maupun hasil perhitungan dari imej (tanda) untuk model rekahan yang digenerasi fractal IFS pada iterasi ke-5 untuk berbagai sudut terhadap cabang sebelumnya ( $\theta=30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  dan  $90^\circ$ )

#### 4. Kesimpulan

Pada paper ini telah dilakukan perhitungan tortuositas secara analitik untuk model rekahan yang digenerasi fraktal IFS. Hubungan antar parameter-parameter pemodelan seperti input awal, faktor skala ( $s$ ), sudut antar cabang ( $\theta$ ) dan iterasi ( $i$ ) terhadap tortuositas diinvestigasi. Untuk kasus input awal garis lurus (1,0), tortuositas bergantung

pada factor skala, sudut antar cabang dan banyaknya iterasi untuk jumlah iterasi genap tetapi tidak bergantung banyaknya iterasi untuk jumlah iterasi ganjil. Hasil turunan perhitungan turtuositas dicek dengan perhitungan tortuositas dari imej model yang berkaitan. Untuk factor skala kecil, hasil perhitungan dari imej model sesuai dengan hasil perhitungan secara analitik.

Untuk penelitian lebih lanjut akan dilakukan perhitungan tortuositas dengan analisis geometri lebih lanjut untuk kasus lebih umum pada pemodelan rekahan 2D dan 3D yang digenerasi fractal IFS dan melakukan optimasi parameter untuk memodelkan secara realistic batuan rekahan yang sebenarnya.

## 5. Ucapan Terima Kasih

Kami berterima kasih kepada Dirjen DIKTI DEPDIKNAS Republik Indonesia atas beasiswa BPPS

## 6. Daftar Pustaka

1. Afdal, U Fauzi (2005), Karakterisasi Rekahan Batuan Dengan Analisis Citra, Thesis, ITB
2. Hongbin Sun, Manfred Koch (1998), *Fractal generation of surface area of porous media*, Stochastic Hydrology and Hydraulics 12 83±96
3. Wong Wei-Wei (2006), Heat Conduction and Characteristic size of Fraktal Porous Media., Chin Physics Letter, Vol 23 no.6 1511
4. Lay Lian Teo, B. S. Daya Sagar (2006), Modeling, Description, And Characterization Of Fractal Pore Via Mathematical Morphology, Hindawi Publishing Corporation Discrete Dynamics in Nature and Society, Volume 2006, Article ID 89280, Pages 1–24, DOI 10.1155/DDNS/2006/89280
5. Kang Wang. Renduo Zhang, Fuqin Wang, (2005), *Testing the Pore-Solid Fractal Model for the Soil Water Retention Function*, Reproduced from Soil Science Society of America Journal. Published by Soil Science Society of America. May 6, 2005
6. E. S. Mistakidis (1997), Fractal Geometry in Structural Analysis Problems: A Variational Formulation for Fractured Bodies with Non-monotone Interface Conditions., Chaos, Solitons & Fraktals Vol. 8, No. 2, pp. 269-285, ELSEVIER
7. E. Perfect, R.W. Gentry, M.C. Sukop, J.E. Lawson (2006), Multifractal Sierpinski carpets: Theory and application to upscaling effective saturated hydraulic conductivity, Geoderma 134 (2006) 240–252,
8. Xu Xin He, Ya Ling He, Hua Li(1999), Fast and Accurate Determination of The Spatial Boundary of IFS Attractor, Computer and Graphics, 23 , 547-533. [www.elsevier/locate/cag](http://www.elsevier/locate/cag)
9. Yan Qiu Cen (1997),. *3-D IFS Fractals As Real-Time Graphics Model*., Comput. & Graphics. Vol. 21, No. 3, pp. 367-370.,ELSEVIER
10. Palciauskas, V., Guéguen, Y., 1994. Introduction to the Physics of Rock, Princeton University Press.