

3

Kinematika Relativistik

Tujuan Perkuliahan:

Setelah mempelajari Bab 3 ini mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menjelaskan rumusan-rumusan prinsip relativitas khusus.
2. Memahami menurunkan transformasi Lorentz dan transformasi baliknya serta akibat-akibat dari transformasi Lorentz.
3. Menghitung besaran-besaran dalam transformasi Lorentz: relativitas simultan, kontraksi panjang, dan dilatasi waktu.
4. Memahami 4-vektor ruang-waktu.
5. Menyatakan transformasi Lorentz dalam notasi 4-vektor.
6. Memahami tensor dan operasi-operasinya.
7. Menyatakan 4-vektor energi-momentum.
8. Menyelesaikan persoalan tumbukan.
9. Menyelesaikan persoalan hamburan.

Fisika partikel bertujuan untuk mempelajari struktur ruang, waktu dan materi pada tingkat yang paling fundamental. Artinya kita mempelajari fisika pada skala jarak sependek mungkin. Jika kita mengingat kembali hubungan ketidakpastian Heisenberg, $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$, ini berarti bahwa kita ingin mencari dan membuktikan momentum yang sangat besar. Dengan kata lain, kita akan mengamati fenomena-fenomena hamburan partikel dengan momentum dan tentunya juga energi tinggi. Sehingga seringkali dijumpai istilah fisika partikel dan energi tinggi. Ketika momentum partikel dinaikkan sehingga melebihi dari perkalian massa dengan kecepatan cahaya, mc , maka partikel menjadi relativistik. Oleh karena itu teori relativitas adalah bagian terpadu dari fisika partikel.

Bertolak dari kenyataan ini, kajian kinematika dari partikel didasarkan pada teori medan kuantum (teori relativitas khusus dan mekanika kuantum). Teori medan kuantum adalah alat untuk mempelajari partikel yang didasarkan atas obyek-obyek yang dapat menciptakan partikel dan merusak partikel. Obyek tersebut adalah medan-medan dari teori medan kuantum. Medan-medan kuantum adalah obyek-obyek yang menyerap dimensi ruang-waktu. Partikel-partikel dapat dihasilkan atau dirusak dimana-mana dan pada setiap waktu. Sebagai contoh, sebuah elektron atau foton dapat tampak atau tidak tampak dimana-mana di dalam ruang, sesuai dengan tafsiran probabilistik.

Proses-proses kuantum mengizinkan sejumlah partikel-partikel bermuatan di alam semesta untuk berubah melalui penciptaan atau perusakan partikel. Masing-masing partikel diciptakan atau dirusak oleh medan-medan. Berbeda dengan teori elektromagnetik, dalam teori medan kuantum gaya dan interaksinya digambarkan dalam ungkapan medan-medan yang terjadi pada setiap titik dalam ruang-waktu. Konsep ruang-waktu, ruang dan waktu tidak dapat ditinjau secara bebas, berasal dari perumusan relativitas khusus Einstein untuk menggambarkan kecepatan, energi dan momentum dari partikel yang sangat tinggi, kecepatannya mendekati kecepatan cahaya. Meskipun ruang dan waktu tidak sama, ruang dan waktu jelas berbeda, pengukuran kedua besaran tersebut berdasarkan pada kecepatan dimana sistem bergerak relatif satu sama lain. Sebagai contoh, dalam dilatasi waktu (*time dilation*), waktu yang dialami oleh obyek-obyek yang bergerak cepat adalah berbeda. Pengukuran dilatasi waktu digunakan untuk mempelajari partikel-partikel elementer yang dihasilkan ketika bertumbukan dan bergerak pada kecepatan relativistik.

Dalam bahasan berikut ini, akan ditinjau ulang perumusan partikel relativistik berdasarkan pada konsep relativitas. Pertama akan dipelajari transformasi Lorentz dan akibat-akibatnya seperti kontraksi Lorentz, dilatasi waktu dan relativitas simultan. Kemudian melalui perumusan 4-vektor kita akan mempelajari hukum-hukum kekekalan relativistik dalam proses tumbukan dan hamburan partikel.

3.1 Teori Relativitas Khusus

Teori relativitas khusus Einstein adalah salah satu teori sangat penting yang merupakan deviasi dramatik dari fisika klasik dan sangat esensial dalam perkembangan teori relativitas umum dan teori medan kuantum. Teori ini didasarkan atas dua postulat:

- (1) Hukum-hukum fisika adalah sama dalam semua kerangka inersia.
- (2) Laju cahaya, c , adalah sama dalam setiap kerangka inersia.

Pada postulat pertama dinyatakan ketiadaan kerangka acuan yang universal. Bila hukum-hukum fisika berbeda untuk kerangka acuan yang berbeda dalam keadaan gerak relatif, maka kita dapat menentukan mana yang dalam keadaan “diam” dan mana yang “bergerak” dari perbedaan tersebut. Namun, karena tidak terdapat kerangka acuan universal, perbedaan tersebut tidak terdapat, sehingga muncul postulat di atas. Postulat ini mengikuti konsep intuitif mengenai ruang dan waktu yang kita bentuk dalam kehidupan sehari-hari. Contoh yang sederhana, kita mempunyai dua buah kapal, A dan

B. Kapal A diam di atas air sedangkan kapal B bergerak dengan kecepatan tetap \vec{v} . daerah tersebut diliputi kabut sehingga kedua pengamat pada masing-masing kapal tidak bisa mengetahui kapal mana yang bergerak. Pada saat B berdampingan dengan A, api dinyalakan untuk sesaat. Menurut postulat kedua dari relativitas khusus, cahaya api akan merambat kesegala arah dengan kelajuan tetap. Pengamat pada masing-masing kapal mendapatkan bola cahaya dengan ia sebagai pusat, walaupun salah satu pengamat berubah kedudukannya terhadap tempat padamnya api tersebut. Jadi, kalau kita menempatkan kerangka acuan pada masing-masing kapal maka pengamat pada kedua kapal akan melihat peristiwa yang sama karena kelajuan cahaya sama dalam kedua kerangka acuan tersebut.

Dua postulat Einstein kemudian menjadi dasar dari teori relativitas khusus. Jika kita menyakini atau setuju dengan kedua postulat tersebut, ada beberapa akibat dari postulat tersebut:

1. Waktu tidak universal.
2. Simultanitas adalah relatif.
3. Dilatasi waktu: gerak jam berjalan lambat.
4. Kontraksi panjang: benda yang bergerak akan mengkerut dalam arah geraknya.
5. Massa dan energi adalah ekuivalen.

3.2. Transformasi Lorentz

Berdasarkan teori relativitas khusus, semua hukum fisika adalah sama pada kerangka yang bergerak dengan kecepatan konstan (sistem kerangka lembam). Tinjaulah dua kerangka lembam, S dan S', dengan S' bergerak dengan kecepatan uniform v (besarnya \vec{v}) terhadap S (S, juga bergerak dengan kecepatan $-\vec{v}$ terhadap S'), lihat Gambar 3.1. Misalkan kerangka S' bergerak searah x, dan $t = t' = 0$ ketika $x = x' = 0$. Anggap, suatu peristiwa terjadi pada posisi (x,y,z) dan waktu t di kerangka S, bagaimana koordinat ruang-waktu (x',y',z') dan t' di kerangka S'? Jawabannya adalah **Transformasi Lorentz** yaitu

$$(i) \quad x' = \gamma(x - vt), \quad (3.1a)$$

$$(ii) \quad y' = y, \quad (3.1b)$$

$$(iii) \quad z' = z, \quad (3.1c)$$

$$(iv) \quad t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right), \quad (3.1d)$$

dimana

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} . \quad (3.2)$$

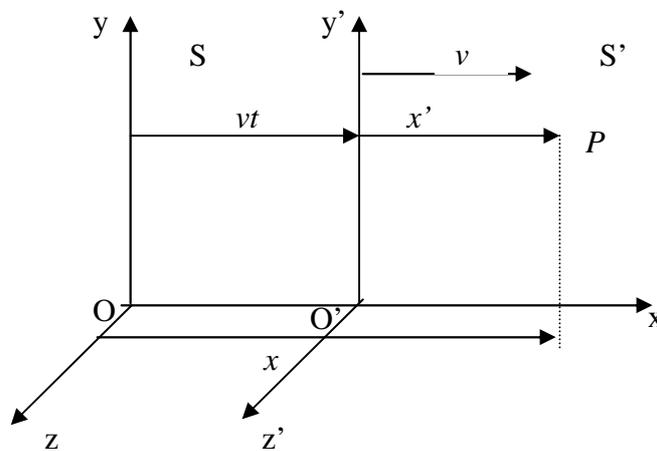
Transformasi balik Lorentz, yaitu mengubah koordinat ruang-waktu dari kerangka S' ke kerangka S dapat diperoleh dengan mengubah tanda dari kecepatan v yaitu

$$(i) \quad x = \gamma(x' + vt') , \quad (3.3a)$$

$$(ii) \quad y = y' , \quad (3.3b)$$

$$(iii) \quad z = z' , \quad (3.3c)$$

$$(iv) \quad t = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'\right) . \quad (3.3d)$$



Gambar 3.1. Dua buah kerangka acuan S dan S' bergerak relatif satu sama lain dengan kecepatan v searah sumbu- x

Sekarang kita perhatikan kedua persamaan di atas, persamaan (3.1) dan (3.3).

Ada beberapa hal yang dapat kita pahami:

1. bila kita mengambil v/c cukup kecil atau $c \rightarrow \infty$ atau $v \rightarrow 0$ sehingga $\gamma \rightarrow 1$, maka kita akan memperoleh persamaan transformasi Galileo,
2. koordinat ruang dan waktu tidak dipisahkan (x, t) ,
3. persamaannya tidak berubah bentuk dari satu kerangka acuan dengan kerangka acuan yang lain. Berarti persamaannya mengikuti postulat Einstein yang pertama.
4. hanya ada kecepatan relatif. Kerangka acuan S memiliki kecepatan relatif $(-v)$ terhadap S' atau sebaliknya.

Transformasi Lorentz di atas memiliki sejumlah akibat-akibat yang akan dipelajari pada pasal berikutnya.

3.3. Akibat-akibat dari transformasi Lorentz

3.3.1 Relativitas Simultan

Misalkan kita tinjau dua buah titik ruang-waktu (x_1, t_1) dan (x_2, t_2) dalam kerangka acuan S. Andaikan keduanya adalah simultan, sehingga dalam kerangka acuan S, $t_1 = t_2$. Akankah keduanya teramati juga simultan dalam kerangka S'? Untuk transformasi waktu dalam S', transformasi Lorentznya diberikan oleh

$$t'_1 = \gamma \left(t_1 - \frac{vx_1}{c^2} \right), \quad \text{dan} \quad t'_2 = \gamma \left(t_2 - \frac{vx_2}{c^2} \right). \quad (3.4a)$$

Maka interval waktu dalam S' antara dua peristiwa diberikan oleh

$$t'_1 - t'_2 = \gamma \frac{v(x_2 - x_1)}{c^2}, \quad (3.4b)$$

Sebagaimana $t_1 = t_2$, yakni peristiwa adalah simultan dalam S, maka simultanitas dalam S tidak mengakibatkan simultanitas dalam S'. Kecuali, jika kedua peristiwa berada pada tempat yang sama, yaitu dalam kasus $x_1 = x_2$, maka interval waktu antara dua peristiwa adalah nol. Demikian pula, jika v/c adalah kecil, yaitu v sangat kecil dibandingkan dengan laju cahaya, dua peristiwa adalah simultan dalam kedua kerangka acuan.

3.3.2 Kontraksi Panjang Lorentz.

Kita ingin melakukan suatu pengukuran pada panjang dari sebuah objek dalam kerangka acuan yang berbeda. Panjang yang dimaksud adalah jarak dari satu titik ujung ke titik ujung yang lainnya dari sebuah objek. Misalnya, kita tinjau sebuah batang yang diam dalam kerangka acuan lembam S', berada sejajar dengan sumbu-x. Satu ujungnya memiliki koordinat $(x'_1, 0, 0)$ dan ujung yang lain dengan koordinat $(x'_2, 0, 0)$. Maka dalam kerangka S', kita memiliki panjang batang adalah

$$L_0 = x'_2 - x'_1, \quad (3.5a)$$

disini L_0 dinamakan dengan panjang proper yaitu jarak antara dua titik yang diukur pada keadaan diam, panjang yang diukur pada kerangka acuan diam.

Seorang pengamat berada dalam kerangka acuan S, akan mengamati batang bergerak dengan laju v . Pada waktu yang sama t juga akan mengamati panjang batang dengan beda koordinat $(x_2 - x_1)$ antara kedua ujungnya. Koordinat-koordinat x'_2 dan x'_1 dihubungkan dengan x_2 , x_1 dan t melalui transformasi Lorentz, adalah

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \text{ dan } x'_2 = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (3.5b)$$

Maka beda koordinatnya adalah

$$\begin{aligned} L_0 = x'_2 - x'_1 &= \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ &= \frac{L}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \end{aligned}$$

atau

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} L_0, \quad (3.5c)$$

disini $L = x_2 - x_1$ adalah panjang batang dalam S. Jadi untuk $v > 0$, persamaan (3.5c) memperlihatkan bahwa $L < L_0$. Akibat ini dinamakan dengan *konstraksi panjang Lorentz*.

Contoh 3.1. Seorang astronot yang tingginya tepat 180 cm di bumi, berbaring sejajar dengan sumbu pesawat angkasa yang bergerak dengan kelajuan $0,8c$ relatif terhadap bumi. Berapakah tinggi astronot jika diukur oleh pengamat dalam pesawat tersebut? Pertanyaan yang serupa, tetapi diukur oleh pengamat di bumi.?

Jawab:

Diketahui: $L_0 = 180$ cm

$$v = 0,8c$$

Menurut pengamat yang ada di pesawat angkasa astronaut itu diam jadi tingginya tetap 180 cm (panjang proper). Tetapi menurut pengamat di bumi dia bergerak dengan laju $0,8c$ maka

$$\begin{aligned}
L &= L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
&= 180 \text{ cm} \sqrt{1 - \frac{(0,8c)^2}{c^2}} = 180 \text{ cm} \sqrt{0,36} = 108 \text{ cm}
\end{aligned}$$

Jadi, tinggi astronot menurut pengamat di dalam pesawat adalah 180 cm sedangkan tinggi astronot menurut pengamat di bumi adalah 108 cm.

3.3.3 Dilatasi Waktu.

Sekarang kita ingin mengukur waktu pada dua kerangka acuan yang berbeda. Misalkan kita menempatkan sebuah jam pada kerangka acuan S' di x' dan andaikan bahwa t_1' dan t_2' adalah dua waktu berturut-turut (yaitu $t_1' < t_2'$), diukur oleh seorang pengamat dalam kerangka acuan S'. Sehingga interval waktu yang berhubungan dalam kerangka acuan S' adalah

$$\Delta t' = t_2' - t_1' . \quad (3.6a)$$

Selanjutnya, seorang pengamat di dalam kerangka acuan S mengukur waktu tersebut sebagai t_1 dan t_2 . Waktu ini dihubungkan dengan pengukuran dalam kerangka acuan S' melalui transformasi balik Lorentz yaitu

$$t_1 = \frac{t_1' + vx_1'/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{dan} \quad t_2 = \frac{t_2' + vx_2'/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (3.6b)$$

Karena itu, interval waktu menurut pengamat di S, adalah beda antara dua waktu yang diukur dalam S:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

atau dapat ditulis kembali menjadi,

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \Delta t' . \quad (3.6c)$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa sebuah jam yang bergerak pada laju v dalam kerangka acuan S' berjalan lebih lambat terhadap seorang pengamat yang diam pada kerangka acuan S. Akibat dari transformasi Lorentz ini dinamakan *dilatasi waktu*.

Contoh 3.2. Berapa kelajuan pesawat ruang angkasa yang bergerak relatif terhadap bumi supaya 2 jam didalam pesawat sama dengan 1 jam di bumi.

Jawab:

Diketahui: $t_0 = 1$ jam

$t = 2$ jam

Kelajuan pesawat dapat dicari dengan menggunakan rumus (3.6c)

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Maka

$$2 \text{ jam} = \frac{1 \text{ jam}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$$

atau

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow v = 0,86c$$

Jadi, kelajuan pesawat ruang angkasa adalah $0,86c$.

3.3.4 Penjumlahan Kecepatan

Misalkan suatu partikel bergerak pada arah x dengan laju u' terhadap S' . Berapakah laju u terhadap S ? Partikel tersebut menempuh jarak $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\Delta t')$ dalam selang waktu $\Delta t = \gamma[\Delta t' + (v/c^2)\Delta x']$, karena $\Delta x/\Delta t = u$ dan $\Delta x'/\Delta t' = u'$ maka

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \quad (3.7a)$$

Persamaan (3.7a) dinamakan *hukum penjumlahan kecepatan relativistik*. Apabila $v/c \ll 1$ dan $u'/c \ll 1$, maka $u = u' + v$, berhubungan dengan limit klasik. Persamaan (3.7a) jelas merupakan tafsiran dari postulat (ii) relativitas khusus, yaitu dengan mengambil $u' = c$ maka $u = c$, laju cahaya adalah sama dalam sistem inersia. Namum,

bila salah satu kecepatannya mendekati c , maka penyimpangan atau koreksi relativistik kecepatan akan menjadi penting. Persamaan (3.7a) dapat ditulis dalam bentuk:

$$u = c \left[1 - \frac{(1 - v/c)(1 - w/c)}{1 + vw/c^2} \right] \quad (3.7b)$$

Dengan ungkapan ini jelas bahwa u tidak mungkin akan sama atau lebih besar daripada c , asalkan baik v dan w lebih kecil dari c .

3.4. Empat-Vektor (*Four-Vector*)

Dalam fisika klasik, kita membedakan antara koordinat ruang dan waktu. Koordinat waktu selalu bertransformasi terhadap dirinya sendiri. Oleh karena itu, interval waktu dalam tinjauan fisika klasik adalah invariant. Sedangkan dalam teori relativitas, transformasi dari koordinat waktu, dari satu koordinat ke koordinat yang lain bergantung pada waktu dan koordinat ruang dari sistem koordinat yang lain, asalkan kedua sistem yang ditinjau tidak diam relatif satu dengan yang lain. Hukum-hukum fisika klasik selalu dirumuskan sedemikian sehingga koordinat waktu terpisah dari koordinat ruang. Ini cukup beralasan karena ciri dari transformasinya terhadap hukum-hukum tersebut adalah kovarian.

Pada pembahasan sebelumnya ruang dan waktu tidak dapat ditinjau secara bebas terhadap transformasi Lorentz. Oleh karena itu, ada cara untuk meninjau ruang dan waktu berbeda dari sebuah obyek, yaitu vektor ruang-waktu dengan 4 komponen. Selanjutnya akan disebut dengan 4-vektor. Untuk menyatakan sebuah peristiwa dalam suatu sistem koordinat, kita dapat menggunakan *notasi indeks*. Misalnya sistem koordinat 4-dimensi, kita akan menuliskan dengan

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{x}) \text{ dimana } x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z. \quad (3.8)$$

Komponen nol dari notasi 4-vektor diberikan oleh $x^0 = ct$, yaitu kita membentuk perkalian c (kecepatan cahaya) x t (waktu) pada salah satu koordinat, sehingga kita memperoleh satuan jarak. Sedangkan komponen sisanya adalah ruang 3-dimensi biasa. Indeks atas (*superskrip*) hanya label saja, bukan berarti pangkat. Sehingga x^μ adalah sebuah radius 4-vektor dalam ruang vektor 4-dimensi. Dalam pembahasan selanjutnya kita sering kali akan menjumpai alfabet Yunani seperti μ (mu), ν (nu) dan seterusnya adalah sebagai sebuah indeks ruang-waktu, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$. Indeks ini adalah notasi 4-

vektor. Sehingga untuk setiap koordinat dapat ditulis $x^\mu \equiv (x^0, x^i)$ atau (x^0, \vec{x}) , dengan $\vec{x} = (x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$ adalah bagian ruang dari ruang-waktu empat-dimensi.

Dalam notasi 4-vektor, maka transformasi Lorentz menjadi

$$(i) \quad x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0), \quad (3.9a)$$

$$(ii) \quad x^{2'} = x^2, \quad (3.9b)$$

$$(iii) \quad x^{3'} = x^3, \quad (3.9c)$$

$$(iv) \quad x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1), \quad (3.9d)$$

dimana

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (3.9e)$$

Keempat persamaan (3.9a) – (3.9d) dapat dinyatakan sebagai persamaan matrik dengan x^μ sebagai sebuah matrik kolom 4 x 1,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x^{0'} \\ x^{1'} \\ x^{2'} \\ x^{3'} \end{bmatrix}}_{x^{\mu'}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\Lambda_v^\mu} \underbrace{\begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}}_{x^v}. \quad (3.10)$$

Atau secara singkat dapat ditulis

$$x^{\mu'} = \sum_{v=0}^3 \Lambda_v^\mu x^v, \quad (3.11)$$

dimana

$$\Lambda_v^\mu = \begin{bmatrix} \Lambda_0^0 & \Lambda_1^0 & \Lambda_2^0 & \Lambda_3^0 \\ \Lambda_0^1 & \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 \\ \Lambda_0^2 & \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 \\ \Lambda_0^3 & \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

Untuk menghindari banyak menulis Σ (sigma), kita akan mengikuti “konvensi penjumlahan” Einstein yaitu indeks-indeks Yunani yang berulang (yaitu indeks bawah dan indeks atas) adalah suatu penjumlahan dari 0 sampai 3 . Sehingga persamaan (3.11) menjadi

$$x^{\mu'} = \Lambda_v^\mu x^v. \quad (3.13)$$

Persamaan (3.13) dengan elemen maktrik Λ_v^μ diberikan oleh persamaan (3.12) adalah transformasi Lorentz yangmana kerangka S' bergerak sepanjang sumbu x. Sumbu S

dan sumbu S' tidak harus parallel. Persamaan (3.13) bersifat umum dengan elemen matrik Λ_v^μ berbeda bergantung arah gerak kerangka S' terhadap S . Tetapi meskipun demikian menurut persamaan (3.13) dalam transformasi S ke S' , terdapat suatu kombinasi khusus antara S dan S' yang tetap sama yaitu

$$I = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 - (x^{2'})^2 - (x^{3'})^2 . \quad (3.14)$$

Suatu kuantitas yang demikian, yaitu yang memiliki nilai yang sama di sembarang sistem inersia disebut invarian terhadap transformasi Lorentz (sama halnya dengan kuantitas $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ adalah invariant terhadap rotasi). Besaran I disini tidak lain adalah interval/jarak antara dua titik di dalam ruang-waktu.

Sekarang, kita akan menuliskan invarian ini dalam bentuk somasi $\sum_{\nu=0}^3 x^\mu x^\nu$ tetapi terdapat tanda minus (-). Untuk itu perlu dikenalkan metrik $g_{\mu\nu}$ yang komponennya dinyatakan dalam bentuk matrik $g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} . \quad (3.15)$$

Sehingga kuantitas invarian (I) dapat dituliskan sebagai penjumlahan ganda

$$I = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu . \quad (3.16)$$

Untuk langkah selanjutnya, kita definisikan 4-vektor kovarian x_μ (indeks bawah) sebagai berikut:

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu . \quad (17)$$

Dengan x^ν adalah 4-vektor kontravarian, sehingga invarian dapat dituliskan dalam bentuk

$$I = x^\mu x_\mu . \quad (3.18)$$

Kita definisikan sebuah 4-vektor, a^μ , sebagai suatu objek 4-komponen yang bertransformasi dengan cara yang sama dengan x^μ , bertransformasi dari kerangka inersia yang satu ke kerangka inersia yang lain, maka berlaku juga

$$a^\mu \rightarrow a^{\mu'} = \Lambda_v^\mu a^\nu . \quad (3.19)$$

Untuk setiap 4-vektor kontravarian, berhubungan dengan 4-vektor kovarian a_μ , yang diperoleh dengan mengubah tanda dari komponen ruang atau

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu . \quad (3.20)$$

Sebaliknya, kita juga dapat mengubah dari kovarian ke kontravarian dengan membalikkan tanda yaitu

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu , \quad (3.21)$$

dimana $g^{\mu\nu}$ adalah *inverse* dari matrik dari $g_{\mu\nu}$ atau $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$. Jadi metrik memebrikan suatu cara bagaimana sebuah vektor kontravarian dihubungkan dengan sebuah vektor kovarian. Misalkan dua buah 4-vektor a^μ dan b^μ , maka kuantitas

$$a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\nu b^\mu = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 , \quad (3.22)$$

adalah invarian (sama nilainya dalam sistem inersia sembarang). Operasi dua buah 4-vektor ini adalah perkalian skalar dari a dan b . Perkalian skalar 4-dimensi ini analog dengan perkalian skalar/titik (*dot product*) dari vektor 2-dimensi atau 3-dimensi. (tetapi tidak ada 4-vektor yang analog dengan perkalian vektor/*cross product*). Sehingga dapat dituliskan

$$a \cdot b \equiv a_\mu b^\mu . \quad (3.23)$$

Untuk membedakan perkalian skalar 4-dimensi dengan perkalian skalar 2-dimensi atau 3-dimensi, maka vektor 3-dimensi, dinyatakan dengan huruf yang diberi tanda panah pada bagian atas

$$a \cdot b = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} . \quad (3.24a)$$

Notasi a^2 adalah perkalian skalar $a \cdot a = a^\mu a_\mu = a_\mu a^\mu$ sehingga

$$a \cdot a = (a^0)^2 - (\vec{a})^2 . \quad (3.24b)$$

Nilai a^2 tidak harus bernilai positif. Semua 4-vektor dapat diklasifikasikan berdasarkan tanda dari a^2 :

$$\text{Jika } a^2 > 0, \text{ maka } a^\mu \text{ disebut serupa waktu (timelike),} \quad (3.25a)$$

$$\text{Jika } a^2 < 0, \text{ maka } a^\mu \text{ disebut serupa ruang (spacelike),} \quad (3.25b)$$

$$\text{Jika } a^2 = 0, \text{ maka } a^\mu \text{ disebut serupa cahaya (lightlike).} \quad (3.25c)$$

Dalam metrik ruang-waktu, interval (I) = 0 (serupa cahaya) jika kedua titik tersebut berada pada lintasan cahaya yaitu dengan laju $v = c$. Jika $I > 0$ (serupa waktu) artinya jika kedua titik terletak pada lintasan partikel yang memiliki laju $v < c$ dan jika $I < 0$

(serupa ruang) jika kedua titik terletak pada lintasan partikel yang memiliki laju $v > c$. Vektor adalah langkah awal menuju tensor. Sebuah tensor rank-dua $S^{\mu\nu}$ terdapat dua indek yang memiliki $4^2 = 16$ komponen dan bertransformasi dengan 2 faktor Λ

$$S^{\mu\nu'} = \Lambda_{\kappa}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} S^{\kappa\sigma} . \quad (3.26)$$

Sebuah tensor rank-tiga $t^{\mu\nu\lambda}$ memiliki $4^3 = 64$ komponen dan bertransformasi dengan 3 faktor Λ

$$t^{\mu\nu\lambda'} = \Lambda_{\kappa}^{\mu} \Lambda_{\sigma}^{\nu} \Lambda_{\tau}^{\lambda} t^{\kappa\sigma\tau} , \quad (3.27)$$

dan begitu seterusnya. Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa vektor adalah sebuah tensor rank-satu dan skalar (invarian) adalah sebuah tensor rank-nol. Kita dapat membangun tensor kovarian dan “mencampur” dengan mengubah indeks atas menjadi indeks bawah dengan menggunakan tensor metrik $g_{\mu\nu}$, sebagai contoh

$$S_{\nu}^{\mu} = g^{\mu\lambda} S_{\lambda\nu} , \quad (28a)$$

$$S_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda} g_{\nu\sigma} S^{\lambda\sigma} \text{ dan seterusnya.} \quad (28b)$$

Tensor rank-n dapat dilihat dari jumlah indeks yang berbeda. Sebagai contoh

$$S^{\mu} = \text{Tensor rank-1} ,$$

$$S^{\mu\nu} = \text{Tensor rank-2} ,$$

$$S_{\mu}^{\mu} = \text{Tensor rank-0} ,$$

$$S^{\mu\nu\kappa}_{\kappa} = \text{Tensor rank-2} .$$

Tensor rank-2 dikatakan *simetrik* jika terhadap pertukaran dua indeksnya tidak berubah $S^{\mu\nu} = S^{\nu\mu}$ dan dikatakan *antisimetrik* jika berubah tanda $a^{\mu\nu} = -a^{\nu\mu}$.

Contoh 3.3. Diketahui empat-vektor $A^{\mu} = (5, 0, 0, 2)$. Bila S' bergerak dengan laju v pada arah-x relatif terhadap S , carilah komponen-komponen empat-vektor tersebut dalam S' , dimana empat-vektor kontravarian didefinisikan sebagai suatu besaran yang memenuhi transformasi $A^{\mu} \rightarrow A'^{\mu} = L^{\mu}_{\nu} A^{\nu}$.

Jawab:

Dengan menggunakan persamaan (12) maka

$$\begin{aligned} A'^0 &= \Lambda^0_{\nu} A^{\nu} = \Lambda^0_0 A^0 + \Lambda^0_1 A^1 + \Lambda^0_2 A^2 + \Lambda^0_3 A^3 \\ &= \gamma \cdot 5 + (-\gamma v/c) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \end{aligned}$$

$$= 5\gamma.$$

Dengan cara yang sama,

$$A'^1 = \Lambda^1_{\nu} A^{\nu} = -5\gamma v/c,$$

$$A'^2 = \Lambda^2_{\nu} A^{\nu} = 0,$$

$$A'^3 = \Lambda^3_{\nu} A^{\nu} = 2.$$

Maka $A'^{\mu} = (5\gamma, -5\gamma v/c, 0, 2)$.

3.5. Energi dan Momentum

Dalam ruang tiga dimensi, kuadrat jarak dari dua buah titik dinyatakan oleh persamaan

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \quad (3.29)$$

sehingga arcus panjang didefinisikan sebagai integral garis

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \quad (3.30)$$

Dengan analogi ini, waktu proper τ juga didefinisikan sebagai integral dari elemen diferensial $d\tau$ sepanjang *world line* dari partikel. Dari persamaan (3.14), kita definisikan elemen diferensial sepanjang *world line* dari partikel adalah $ds = cd\tau$.

Maka

$$\begin{aligned} cd\tau &= ds = \sqrt{(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2} \\ &= c \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[\left(\frac{dx^1}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dt} \right)^2 \right]} dt \\ &= c \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left[(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2 \right]} dt \\ &= c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt = \frac{c}{\gamma} dt. \end{aligned}$$

Maka waktu proper didefinisikan sebagai:

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.31)$$

yangmana konsisten dengan dilatasi waktu yang telah dipelajari sebelumnya. Persamaan untuk sebuah partikel elementer yang bergerak dengan kecepatan mendekati cahaya. Tentunya untuk benda yang bergerak dengan laju $v \ll c$, dt dan $d\tau$ sama

karena $\gamma \rightarrow 1$. Penggunaan waktu yang paling tepat untuk benda yang bergerak dengan laju mendekati laju cahaya adalah waktu proper karena τ invarian.

Dalam membicarakan kecepatan partikel, dikenal kecepatan laboratorium yaitu

$$v = \frac{dx}{dt} , \quad (3.32)$$

dan juga kecepatan proper η yaitu

$$\eta = \frac{dx}{d\tau} . \quad (3.33)$$

Dari persamaan (3.1) kedua kecepatan dihubungkan dengan faktor γ

$$\eta = \gamma v . \quad (3.34)$$

Jika kita akan mengukur dari sistem laboratorium S ke sistem yang bergerak S' baik penyebut dan pembilang pada persamaan (3.33) harus ditransformasi sehingga

$$\eta^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} , \quad (3.35)$$

dimana komponen η^μ adalah

$$\begin{aligned} \eta^0 &= \frac{dx^0}{d\tau} = \frac{d(ct)}{(1/\gamma)dt} = \gamma c \\ \eta^1 &= \frac{dx^1}{d\tau} = \frac{dx}{(1/\gamma)dt} = \gamma v_x = \gamma v^1 \quad \text{dan seterusnya} \end{aligned} ,$$

sehingga

$$\eta^\mu = \gamma(c, v_x, v_y, v_z) . \quad (3.36a)$$

Dan $\eta^\mu \eta_\mu$ haruslah invariant yaitu

$$\eta^\mu \eta_\mu = \gamma^2 (c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2) = \gamma^2 c^2 (1 - \beta^2) = c^2 . \quad (3.36b)$$

Secara klasik, momentum adalah massa dikalikan dengan kecepatan. Dalam kasus relativistik, momentum adalah massa dikalikan dengan kecepatan proper. Mengapa? Karena jika menggunakan momentum secara klasik maka prinsip relativitas dilanggar, sehingga momentum relativistik ditulis

$$\vec{p} = m\vec{\eta} . \quad (3.37)$$

Karena kecepatan proper merupakan 4-vektor, maka momentum pun juga demikian sehingga

$$p^\mu = m\eta^\mu , \quad (3.38)$$

dengan

$$p^0 = m\eta^0 = \gamma mc, \quad p^1 = \gamma mv_x, \quad p^2 = \gamma mv_y, \quad p^3 = \gamma mv_z, \quad (3.39)$$

Disini $p^i (i=1,2,3)$ adalah momentum ruang dan massa m adalah massa relativistik

$$m = \gamma m_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad (3.40)$$

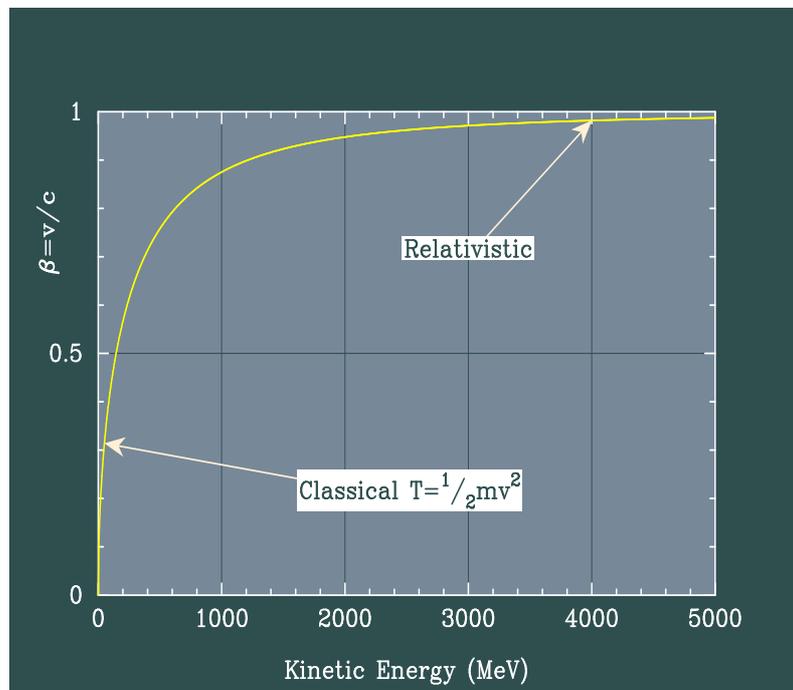
dimana m_0 adalah massa diam. Bila kedua ruas persamaan (3.40) dikalikan dengan c^2 dan ruas kanan kemudian diekspansi dalam deret Taylor maka diperoleh

$$\begin{aligned} mc^2 &= m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2 + \frac{3}{8} \beta^4 + \dots \right) \\ &= m_0 c^2 + \left(\frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \right), \end{aligned} \quad (3.41)$$

maka menurut teori relativitas khusus energi kinetik partikel diberikan oleh

$$\text{Energi kinetik} = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots = (m - m_0) c^2. \quad (3.42)$$

Suku $m_0 c^2$ menyatakan energi diam (*rest energy*), sebuah suku konstanta yang masih ada ketika $v=0$. Untuk laju $v \ll c$ maka diperoleh ungkapan energi kinetik klasik yang berarti bahwa perumusan relativistik konsisten dengan perumusan klasik. Sehingga dapat dilihat bahwa perbedaan antara mekanika klasik dan teori relativistik hanya pada ungkapan energi kinetiknya, perhatikan Gambar 3.2.



Gambar 3.2. Energi kinetik relativistik dan klasik.

ERROR: typecheck
OFFENDING COMMAND: setmatrix

STACK:

1
[1.0 0.0 0.0 -1.0 0.0 7016.67]