4 Persamaan Medan Relativistik dan Rumusan Lagrange

Setelah mempelajari bab 4, mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menurunkan nilai eigen dan persamaan gelombang untuk partikel spin 0.
2. Menurunkan nilai eigen dan persamaan gelombang untuk partikel spin ½.
3. Menurunkan nilai eigen dan persamaan gelombang untuk partikel spin 1.
4. Menurunkan solusi persamaan Dirac baik solusi yang bergantung waktu maupun solusi gelombang bidang.
5. Menurunkan operator *spin up* dan *spin down*.
6. Memahami dan mengklasifikasikan bilinear dari kombinasi spinor 4-komponen ψ dan $\bar{\psi}$.
7. Menurunkan persamaan gerak dari medan vektor, medan scalar, medan Dirac dari rumusan Lagrange.

Sebagaimana telah kita pelajari dalam kinematika relativistik, persamaan-persamaannya diturunkan dari dua postulat relativitas. Dua kerangka inersia yang bergerak relatif satu dengan yang lain dengan kecepatan konstan dihubungkan melalui transformasi Lorentz. Ada suatu cara sederhana untuk memperoleh persamaan-persamaan yang konsisten secara relativitas khusus (yaitu persamaan-persamaannya tampak sama dari sudut pandang pengamat dalam gerak relatif) dengan menyatakan persamaan-persamaan tersebut dengan cara invarian Lorentz.

Pada bab ini akan dipelajari persamaan-persamaan gelombang untuk medan skalar (spin-0), medan spinor (spin-1/2) dan medan vektor (spin-1) dengan menerapkan prinsip-prinsip relativitas serta ide-ide dasar dalam mekanika kuantum yang sangat diperlukan dalam mempelajari obyek-obyek yang berukuran sangat kecil, partikel yang berukuran mikro. Kombinasi persamaan energi dan momentum relativistik dengan operator energi dan momentum menghasilkan persamaan-persamaan gelombang yang bermanfaat dalam mempelajari fisika partikel. Selanjutnya, melalui perumusan Euler-Lagrange persamaan-persamaan gerak yang diperoleh dapat pula diturunkan dengan memilih rapat Lagrangian secara tepat.

4.1 Medan Skalar: spin-0

Pasal ini akan mempelajari persamaan gelombang untuk sebuah partikel yang tidak spin-0, yaitu sebuah partikel skalar. Partikel ini diberikan simbol ϕ. Persamaan gelombang partikel skalar, dapat diperoleh dari persamaan energi-momentum relativistik dengan mensubstitusikan operator-operator diferensial untuk energi E dan momentum $\vec{p}$ yang diberikan dalam mekanika kuantum. Kita akan mengawali dengan menurunkan persamaan gelombang non relativistik.

Operator-operator diferensial dalam mekanika kuantum untuk energi E dan momentum $\vec{p}$ diberikan oleh

$$E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t} \text{ (operator energi) ,} \tag{4.1}$$

$$\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} \text{ (operator momentum) ,} \tag{4.2}$$

Dalam limit non-relativistik, energi kinetik dari sebuah partikel bebas dengan massa m dan momentum $\vec{p}$ diberikan oleh

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \; . \tag{4.3}$$

Disini E adalah energi kinetik partikel. Jika operator-operator diferensial untuk energi dan momentum disubstitusikan ke persamaan (4.3) maka diperoleh

$$\frac{1}{2m}\nabla^2\psi = -i\frac{\partial\psi}{\partial t} \qquad \text{(persamaan Schrodinger) .} \tag{4.4}$$

Analog dengan penurunan persamaan Schrodinger, sebuah persamaan kovarian (sama dalam setiap kerangka acuan) dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan energi dan momentum 4-vektor relativistik dari sebuah partikel, $p^\mu = \left(E, \vec{p}\right)$,

$$p^2 = p_\mu p^\mu = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 \quad . \tag{4.5}$$

Operator-operator diferensial persamaan (4.1) kemudian dapat dinyatakan dalam notasi 4-vektor

$$p_\mu \rightarrow i\frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\partial_\mu \quad , \tag{4.6}$$

Dalam ungkapan ini, operator energi adalah komponen ke nol persamaan (4.6). Substitusi persamaan (4.6) ke persamaan (4.5), dengan mengingat bahwa operator selalu bekerja pada suatu keadaan (state), ϕ, persamaan (4.5) menghasilkan persamaan diferensial orde-2,

$$\nabla^2\phi - \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = m^2\phi \ . \qquad \text{(persamaan Klein-Gordon)} \qquad (4.7)$$

Persamaan (4.7) dinamakan persamaan Klein-Gordon KG. Dengan memperkenalkan notasi kotak

$$\Box = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \ , \qquad (4.8)$$

persamaan (4.7) dapat ditulis kembali dalam bentuk

$$\left(\Box + m^2\right)\phi(x) = 0 \ , \qquad (4.9)$$

Operator $\Box$ adalah invarian Lorentz, jadi persamaan KG adalah persamaan kovarian relativistik jika $\phi(x)$ adalah sebuah fungsi skalar. Yaitu terhadap transformasi Lorentz $\phi(x)$ bertransformasi $x^\mu = (t,\vec{x}) \to x'^\mu = (t',\vec{x}')$ sebagai berikut

$$\phi(t,\vec{x}) \quad \to \quad \phi'(t',\vec{x}') = \phi(t,\vec{x}) \ , \qquad (4.10)$$

sehingga ϕ adalah invarian. Persamaan (4.7) adalah persamaan orde-2 dalam derivatif waktu, sehingga mudah dilihat bahwa solusi persamaan KG adalah solusi gelombang bidang,

$$\phi(x) = Ne^{-i(Et-\vec{p}\cdot\vec{x})}. \qquad (4.11)$$

dimana N adalah konstanta normalisasi. Jika kita substitusikan solusi gelombang bidang di atas ke persamaan KG maka solusi untuk energi dari persamaan ini memberikan dua buah nilai energi, yaitu energi positif dan energi negatif,

$$E = \begin{cases} +\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \ , & \textit{energi positif} \\ -\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \ , & \textit{energi negatif} \end{cases} \ . \qquad (4.12)$$

Solusi energi negatif adalah sebuah permasalahan ketika kita menafsirkan $\phi(x)$ sebagai sebuah fungsi gelombang untuk partikel tunggal. Untuk sebuah partikel bebas, energi total E sepenuhnya dinyatakan oleh energi kinetiknya sehingga energinya konstan, karenanya dapat dipilih partikel dengan keadaan energi positif dan mengabaikan keadaan energi negatif. Namun ketika partikel berinteraksi, ada pertukaran energi dengan lingkungan yang berarti ada sejumlah energi yang diemisikan dalam proses. Kemudian energi dari sebuah partikel akan menuju ke keadaan energi negatif tak berhingga dan ini tidak mungkin terjadi untuk sebuah partikel tunggal jika ϕ ditafsirkan sebagai sebuah fungsi gelombang. Namun demikian kita tidak dapat mengabaikan begitu saja solusi energi negatif sebagai solusi tidak fisis. Karena solusi ini diperlukan untuk mendefinisikan kelengkapan suatu keadaan. Berbeda halnya jika $\phi(x)$ ditafsirkan sebagai sebuah medan kuantum, kedua solusi energi bukan masalah. Solusi energi positif dan negatif terkait dengan operator-operator untuk partikel tercipta atau teranihilasi.

Permasalahan kedua dengan tafsiran fungsi gelombang yang muncul adalah ketika kita mencoba untuk merealisasikan rapat probabilitas. Dalam persamaan Schrodinger, jika ψ adalah fungsi gelombang maka rapat probabilitas, ρ, diberikan oleh

$$\rho = \psi^* \psi \ . \tag{4.13}$$

Karena probabilitas adalah kekal maka haruslah memenuhi persamaan kontinuitas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \ , \tag{4.14}$$

dimana $\vec{j}$ adalah arus probabilitas. Arus probabilitas yang memenuhi persamaan kontinuitas ini adalah

$$\vec{j} = -\frac{i}{2m}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right) \ . \tag{4.15}$$

Akan tetapi, rapat probabilitas yang didefinisikan oleh persamaan (4.13) tidak kekal dalam persamaan KG. Ini karena persamaan KG adalah persamaan orde-2 dalam derivatif waktu, serupa dengan persamaan gerak Newton dalam mekanika. Syarat awal untuk menyelesaikan persamaan gerak Newton adalah posisi awal dan kecepatan awal. Ini berarti bahwa kita perlu memberikan konfigurasi awal derivatif $\phi(\vec{x})$ dan turunannya $\partial\phi(\vec{x})/\partial t$ pada persamaan KG. Untuk kasus partikel bebas relativistik maka persamaan rapat probabilitas dan arus probabilitas haruslah melibatkan komponen waktu sehingga kedua besaran ini akan bertransformasi sebagai sebuah vektor (4-vektor). Dalam kasus ini persamaan kontinuitas dapat dinyatakan secara kovarian,

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad . \tag{4.16}$$

dimana $j^\mu(\rho, \vec{j})$. Karena itu secara relativistik, rapat probabilitas bukan sebuah kuantitas skalar tetapi komponen ke nol dari sebuah 4-vektor. Agar persamaan kontinuitas dipenuhi maka ρ dan j^μ dapat dipilih sebagai berikut

$$\rho = \frac{i}{2m}\left(\phi^* \frac{\partial \phi}{\partial t} - \phi \frac{\partial \phi^*}{\partial t}\right) \ , \tag{4.17a}$$

$$j^\mu = \frac{i}{2m}\left(\phi^* \partial^\mu \phi - \partial^\mu \phi \phi^*\right) . \tag{4.17b}$$

Tampak perbedaan yang jelas antara persamaan (4.17a) dan (4.13). Pada kasus tak relativistik rapat arus probabilitas memiliki nilai definitif positif $\rho = \phi^* \phi = |\phi|^2 = |N|^2$. sedangkan dalam kasus relativistik tidak definitif positif, $\rho = 2|N|^2 E$, karena kita masih bisa memilih *E* bernilai negatif. Akibatnya arus j^μ tidak memberikan tafsiran ρ sebagai rapat probabilitas (karena tidak definitif positif) seperti dalam persamaan Schrodinger.

Contoh 4.1.

Buktikan bahwa jika rapat probabilitas dan arus probabilitas masing-masing diberikan oleh persamaan (4.13) dan (4.15) maka persamaan kontinuitas

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \ ,$$

akan dipenuhi. Persamaan kontinuitas (4.14) ekuivalen dengan kekekalan muatan (buktikan!).

Jawab:

Persamaan (4.13) memberikan hasil

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\psi^* \psi) = \left[\left(\frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right)\psi + \psi^* \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\right]$$

dan dari persamaan (4.15) diperoleh

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} = -\frac{i}{2m}\left(\vec{\nabla}\psi^*\vec{\nabla}\psi + \psi^*\nabla^2\psi - \vec{\nabla}\psi\vec{\nabla}\psi^* - \psi\nabla^2\psi^*\right)$$

$$= -\frac{i}{2m}\left(\psi^*\left(-2im\frac{\partial\psi}{\partial t}\right) - \phi\left(2im\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)\right)$$

$$= -\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right)$$

Dengan menjumlahkan kedua persamaan di atas maka persamaan kontinuitas dipenuhi.

Dari dua kesulitan persamaan KG sebagai persamaan relativistik untuk partikel tunggal: (i) adanya solusi energi negatif (ii) arus probalitas tidak menghasilkan rapat probabilitas definitif positif, P.A.M. Dirac kemudian menurunkan sebuah persamaan yang konsisten dengan perumusan energi-momentum relativistik dan dapat menjelaskan kedua masalah persamaan KG. Persamaannya adalah persamaan orde pertama dalam turunan waktu dan berlaku untuk sebuah partikel spin-1/2. Pada pasal berikut ini akan dipelajari persamaan Dirac yang dapat pula diturunkan melalui persamaan energi-momentum namun persamaan ini harus difaktorisasi. Alternatif penurunan persamaan Dirac dapat dikerjakan melalui sifat-sifat transformasi dari spinor terhadap grup Lorentz[1].

4.2 Spinor: Partikel spin-1/2

Dalam menurunkan persmaaannya, Dirac menggunakan sebuah strategi bahwa persamaan (4.5) dapat difaktorisasi sehingga menghasilkan sebuah persamaan keadaan untuk partikel spin-1/2. Partikel ini diberikan simbol ψ (spinor 4-komponen). Misalkan persamaan (4.5) dapat difaktorisasi sebagai berikut

$$\left(p^\mu p_\mu - m^2\right) = \left(\beta^\nu p_\nu + m\right)\left(\gamma^\tau p_\tau - m\right) \ . \qquad (4.18)$$

Disini β^ν dan γ^τ adalah koefisien-koefisien yang belum diketahui. Selanjutnya, ruas kanan persamaan (4.18) diuraikan menjadi

$$\left(\beta^\nu p_\nu + m\right)\left(\gamma^\tau p_\tau - m\right) = \beta^\nu p_\nu\left(\beta^\tau p_\tau - m\right) + mc\left(\gamma^\tau p_\tau - m\right)$$

---

[1] Lihat Ryder, L.H., *Quantum Field Theory*, Bab II.

$$= \beta^{\nu}\gamma^{\tau} p_{\nu} p_{\tau} - \left(\beta^{\nu} p_{\nu} - \gamma^{\nu} p_{\nu}\right) m - m^2 \ . \qquad (4.19)$$

Koefisien-koefisien β^{ν} dan γ^{τ} ditentukan oleh suku linier dari p_{ν}. Jika suku linier dalam p_{ν} pada persamaan (4.19) diabaikan maka diperoleh

$$\beta^{\nu} p_{\nu} - \gamma^{\nu} p_{\nu} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \beta^{\nu} = \gamma^{\nu} \ . \qquad (20)$$

Akibatnya persamaan (4.18) menjadi

$$p^{\mu} p_{\mu} = \gamma^{\nu}\gamma^{\tau} p_{\nu} p_{\tau} \ , \qquad (4.21)$$

Dengan menguraikan komponen-komponen untuk masing-masing ruas persamaan (4.21), maka diperoleh

$$\begin{aligned}\left(p^0\right)^2 - \left(p^1\right)^2 - \left(p^2\right)^2 - \left(p^2\right)^2 &= \left(\gamma^0\right)^2\left(p^0\right)^2 + \left(\gamma^1\right)^2\left(p^1\right)^2 + \left(\gamma^2\right)^2\left(p^2\right)^2 + \left(\gamma^3\right)^2\left(p^3\right)^2 \\ &\quad + \left(\gamma^0\gamma^1 + \gamma^1\gamma^0\right) p_0 p_1 + \left(\gamma^0\gamma^2 + \gamma^2\gamma^0\right) p_0 p_2 + \left(\gamma^0\gamma^3 + \gamma^3\gamma^0\right) p_0 p_3 \\ &\quad + \left(\gamma^1\gamma^2 + \gamma^2\gamma^1\right) p_1 p_2 + \left(\gamma^1\gamma^3 + \gamma^3\gamma^1\right) p_1 p_3 + \left(\gamma^2\gamma^3 + \gamma^3\gamma^2\right) p_2 p_3\end{aligned} \qquad (4.22)$$

Dari persamaan ini dapat dilihat bahwa tidak ada satu himpunan skalar $\left(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\right)$ yang memenuhi ruas kanan persamaan. Persamaan tersebut hanya dipenuhi jika γ^{μ} harus merupakan bentuk-bentuk matriks, yang kemudian dikenal dengan matriks Dirac. Dirac memilih matriks-matriks γ^{μ} yang merupakan matriks 4 x 4 sebagai berikut

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{bmatrix}, \ \gamma^1 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^1 \\ -\sigma^1 & 0 \end{bmatrix}, \ \gamma^2 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^2 \\ -\sigma^2 & 0 \end{bmatrix}, \ \gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & \sigma^3 \\ -\sigma^3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (4.23)$$

dimana $\sigma^{\mu}\left(\mu = 0,1,2,3\right)$ adalah matriks 2 x 2 yang diberikan oleh matriks-matriks Pauli sebagai berikut

$$\sigma^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv 1 \ , \qquad \sigma^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma^2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (4.24)$$

Kita dapat menguji hubungan persamaan (4.22) dengan mensubstitusikan matriks-matriks (4.23). Matriks-matriks Dirac kemudian memenuhi aljabar Clifford:

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2g^{\mu\nu} \ , \qquad (4.25)$$

atau

$$\left\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right\}=2g^{\mu\nu} \quad . \tag{4.26}$$

Disini $\left\{A,B\right\}=AB+BA$ adalah hubungan anti komutator untuk kuantitas A dan B dan $g^{\mu\nu}$ adalah metrik Minkowski. Dapat dibuktikan bahwa matriks γ^{μ} memenuhi

$$\left(\gamma^{0}\right)^{2}=1, \qquad \left(\gamma^{i}\right)^{2}=-1, \qquad \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}=-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} \;\; \left(\mu\neq\nu\right) \;,$$

$$\gamma^{0\dagger}=\gamma^{0}, \qquad \gamma^{i\dagger}=-\gamma^{i} \quad . \tag{4.27}$$

Hubungan energi-momentum relativistik persamaan (4.18) kemudian menjadi

$$\left(p^{\mu}p_{\mu}-m^{2}\right)=\left(\gamma^{\nu}p_{\nu}+m\right)\left(\gamma^{\tau}p_{\tau}-m\right)=0 \quad . \tag{4.28}$$

Persamaan di atas mengandung dua solusi yaitu

$$(i)\,\gamma^{\mu}p_{\mu}-m=0, \qquad (ii) \quad \gamma^{\mu}p_{\mu}+m=0\,. \tag{4.29}$$

Dan ini mengijinkan pula dua solusi baik untuk solusi energi positif maupun negatif.

Berikut ini akan dijelaskan solusi (i), solusi (ii) dapat dikerjakan sebagai latihan. Seperti dalam penurunan persamaan Schrodinger dan persamaan KG, momentum relativistik diganti menjadi operator dalam mekanika kuantum, persamaam (4.6). Dengan mengingat kembali bahwa operator bekerja pada suatu keadaan, ψ, maka persamaan (29) untuk solusi (i) menjadi

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m\right)\psi=0\,, \qquad \text{(persamaan Dirac)} \tag{4.30}$$

Ini adalah sebuah persamaan diferensial orde pertama yang kovarian dan dikenal sebagai persamaan Dirac dengan ψ sebagai medan spinor Dirac. Persamaan (4.30) adalah persamaan matriks 4 x 4 sehingga mudah dipahami bahwa medan spinor Dirac ψ merupakan sebuah matriks kolom, 4 x 1, dengan empat komponen

$$\psi=\begin{bmatrix}\psi_{1}\\ \psi_{2}\\ \psi_{3}\\ \psi_{4}\end{bmatrix} \,. \qquad \bar{\psi}=\begin{bmatrix}\psi_{1}^{*} & \psi_{2}^{*} & \psi_{3}^{*} & \psi_{4}^{*}\end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Sebagai catatan, meskipun ψ mengandung empat komponen, ψ ini bukan sebuah 4-vektor.

Contoh 4.2:

Buktikan bahwa masing-masing komponen dari ψ memenuhi persamaan KG!

Jawab:

Mulai dari persamaan Dirac (4.30)

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\psi = 0 .$$

Kerjakan pada kedua ruas persamaan sebuah operator $i\gamma^{\nu}\partial_{\nu}$ untuk memperoleh

$$i\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\psi - m\left(\gamma^{\nu}\partial_{\nu}\psi\right) = 0 .$$

Suku kedua ruas kiri persamaan di atas adalah $\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = -(im)\psi$, sehingga menjadi

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\psi + m^2\psi = 0 .$$

Persamaan ini juga dapat ditulis dalam bentuk simetrik dengan mempertukarkan indeks $\mu \leftrightarrow \nu$

$$\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}\psi + m^2\psi = 0 .$$

Jumlahkan kedua persamaan di atas dengan mengingat $\partial_{\mu}\partial_{\nu}\psi = \partial_{\nu}\partial_{\mu}\psi$ maka diperoleh

$$\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}\psi + 2m^2\psi = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad g^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu}\psi + m^2\psi = 0$$

atau

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}\psi + m^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\psi + m^2\psi = 0$$

Ini adalah persamaan KG (4.7).

Selanjutnya, bagaimana Dirac dapat menjelaskna dua problem dalam persamaan KG. Rapat arus seperti apa yang memenuhi persamaan kontinuitas (4.16) yang dapat menghasilkan rapat probabilitas definitif positif?. Serta bagaimana menjelaskan keberadaan solusi energi negatif dan energi positif. Untuk itu, kita perlu melakukan sebuah manipulasi yang memberikan konsekuensi ini, seperti halnya contoh di atas. Dengan mengambil konjugat Hermitian persamaan Dirac maka

$$\left(\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi\right)^\dagger = \left(\left(i\gamma^0\partial_0 + i\gamma^i\partial_i - m\right)\psi\right)^\dagger$$
$$= \psi^\dagger\left(-i\gamma^{0\dagger}\overleftarrow{\partial}_0 - i\gamma^{i\dagger}\overleftarrow{\partial}_i - m\right) = 0 \quad . \tag{4.32}$$

Kalau ψ adalah matriks kolom (4.31), $\psi^\dagger$ adalah matriks baris 1 x 4. Simbol $\overleftarrow{\partial}_0$ dan $\overleftarrow{\partial}_i$ berarti beroperasi ke sebelah kiri. Dengan menggunakan sifat-sifat matriks Dirac (4.27), $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$ dan $\gamma^{i\dagger} = -\gamma^i$ maka persamaan (4.32) menjadi[2]

$$\psi^\dagger\left(-i\gamma^0\overleftarrow{\partial}_0 + i\gamma^i\overleftarrow{\partial}_i - m\right) = 0 \ . \tag{4.33}$$

Kalikan dari kanan persamaan di atas dengan γ^0

$$\psi^\dagger\left(-i\gamma^0\overleftarrow{\partial}_0 + i\gamma^i\overleftarrow{\partial}_i - m\right)\gamma^0 = 0$$
$$\Leftrightarrow \ \psi^\dagger\left(-i\gamma^0\gamma^0\overleftarrow{\partial}_0 + i\gamma^i\gamma^0\overleftarrow{\partial}_i - m\gamma^0\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ \psi^\dagger\gamma^0\left(i\gamma^0\overleftarrow{\partial}_0 + i\gamma^i\overleftarrow{\partial}_i + m\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow \ \psi^\dagger\gamma^0\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) = 0$$

Selanjutnya *spinor adjoint* $\bar{\psi}$ didefinisikan sebagai berikut

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0 \ , \tag{4.34}$$

maka diperoleh

$$\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right) = 0 \ . \tag{4.35}$$

Persamaan ψ dan persamaan $\bar{\psi}$ dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa rapat arus

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \ , \tag{4.36}$$

adalah kekal, $\partial_\mu j^\mu = 0$:

$$\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu\left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) = \left(\partial_\mu\bar{\psi}\right)\gamma^\mu\psi + \bar{\psi}\left(\gamma^\mu\partial_\mu\psi\right)$$
$$= \left(im\bar{\psi}\right)\psi + \bar{\psi}\left(-im\psi\right) = 0 \ . \tag{4.37}$$

Komponen nol dari rapat arus adalah rapat probabilitas

[2] Notasi dengan panah di atas berarti: $A\overleftrightarrow{\partial}_\mu B = A\overrightarrow{\partial}_\mu B - A\overleftarrow{\partial}_\mu B = A\left(\partial_\mu B\right) - \left(\partial_\mu A\right)B$. Sebagai contoh $\psi^\dagger\overleftarrow{\partial}_0 = \partial_0\psi^\dagger$.

$$j^0 = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi$$

$$= \begin{bmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \ , \tag{4.38}$$

ini menghasilkan rapat probabilitas positif. Dibandingkan dengan persamaan KG, persamaan Dirac memberikan lebih jelas dalam mengatasi rapat probabilitas untuk partikel. Seperti diharapkan masalah rapat probabilitas telah dapat dipecahkan. Untuk kasus energi negatif dapat dijelaskan pasal berikut ini.

Contoh 4.3.

Jika fungsi keadaan $\psi(x)$ memenuhi persamaan Dirac, peroleh kembali hubungan energi-momentum relativistik $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$!

Jawab:

Persamaan Dirac (i) dapat ditulis kembali untuk sebuah partikel dengan massa *m* yang memiliki keadaan ψ:

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - m\right)\psi = 0 \ , \tag{4.39}$$

atau

$$\left(\gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 + \gamma^2 p_2 + \gamma^3 p_3 - mc\right) \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = 0 \ . \tag{4.40}$$

Dengan menguraikan masing-masing komponen persamaan di atas maka diperoleh sebuah persamaan matriks

$$\begin{bmatrix} E-m & 0 & -p_z & -p_x + ip_y \\ 0 & E-m & p_x - ip_y & p_z \\ p_z & p_x - ip_y & -E-m & 0 \\ -p_x + ip_y & -p_z & 0 & -E-m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = 0 \ . \tag{4.41}$$

Persamaan ini memberikan empat buah persamaan yang harus diselesaikan. Dengan melakukan perkalian matriks maka diperoleh:

$$(i)\quad (E-m)\psi_1 - p_z\psi_3 - \left(p_x - ip_y\right)\psi_4 = 0\ . \tag{4.42a}$$

$$(ii)\quad (E-m)\psi_2 - \left(p_x + ip_y\right)\psi_3 + p_z\psi_4 = 0\ . \tag{4.42b}$$

$$(iii)\quad p_z\psi_1 + \left(p_x - ip_y\right)\psi_2 - (E+m)\psi_3 = 0\ . \tag{4.42c}$$

$$(iv)\quad \left(p_x + ip_y\right)\psi_1 - p_z\psi_2 - (E+m)\psi_4 = 0\ . \tag{4.42d}$$

Dari persamaan (4.42a) dan persamaan (4.42b) diperoleh

$$\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = -\frac{1}{(E-m)}\begin{bmatrix}-p_z & -\left(p_x - ip_y\right)\\ -\left(p_x + ip_y\right) & p_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{bmatrix}. \tag{4.43}$$

Sedangkan dari persamaan (4.42c) dan persamaan (4.42d) diperoleh

$$\begin{bmatrix}\psi_3\\ \psi_4\end{bmatrix} = \frac{1}{(E+m)}\begin{bmatrix}p_z & \left(p_x - ip_y\right)\\ \left(p_x + ip_y\right) & -p_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}. \tag{4.44}$$

Kombinasi persamaan (4.43) dan (4.44) memberikan hasil

$$\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = \frac{1}{\left(E^2-m^2\right)}\begin{bmatrix}p_x^2+p_y^2+p_z^2 & 0\\ 0 & p_x^2+p_y^2+p_z^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = \frac{p^2}{\left(E^2-m^2\right)}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix}. \tag{4.45}$$

Sehingga diperoleh

$$1 = \frac{p^2}{\left(E^2-m^2\right)}, \qquad \text{atau} \qquad E^2 = p^2 + m^2$$

Apakah solusi ini dapat diperoleh jika diselesaikan untuk $\left(\gamma^\mu p_\mu + mc\right)\psi = 0$?

4.2.1 Solusi Persamaan Dirac

A. Solusi bergantung waktu

Tinjau bahwa medan spinor Dirac ψ tidak bergantung pada posisi, yaitu

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^0} = \frac{\partial\psi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x^1} = \frac{\partial\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial\psi}{\partial x^3} = 0\ . \tag{4.46}$$

Kemudian elemen-elemen matrikss kolom (4 x 1) dari medan spinor Dirac disusun menjadi dua buah matriks kolom (2 x 1) sebagai berikut

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} . \tag{4.47}$$

Jelaslah disini ψ_A dan ψ_B masing-masing adalah matrikss kolom (2 x 1) dengan komponen-komponen matriksnya diberikan oleh

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \qquad \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} . \tag{4.48}$$

Maka persamaan medan Dirac menjadi

$$\begin{pmatrix} 1_{2x2} & 0 \\ 0 & -1_{2x2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \psi_A}{\partial t} \\ \dfrac{\partial \psi_B}{\partial t} \end{pmatrix} - m \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = 0 , \tag{4.49}$$

dimana 1_{2x2} adalah matriks satuan (2 x 2). Dari persamaan (4.49) ada dua buah persamaan yang harus diselesaikan

$$\frac{\partial \psi_A}{\partial t} - m\psi_A = 0 , \tag{4.50a}$$

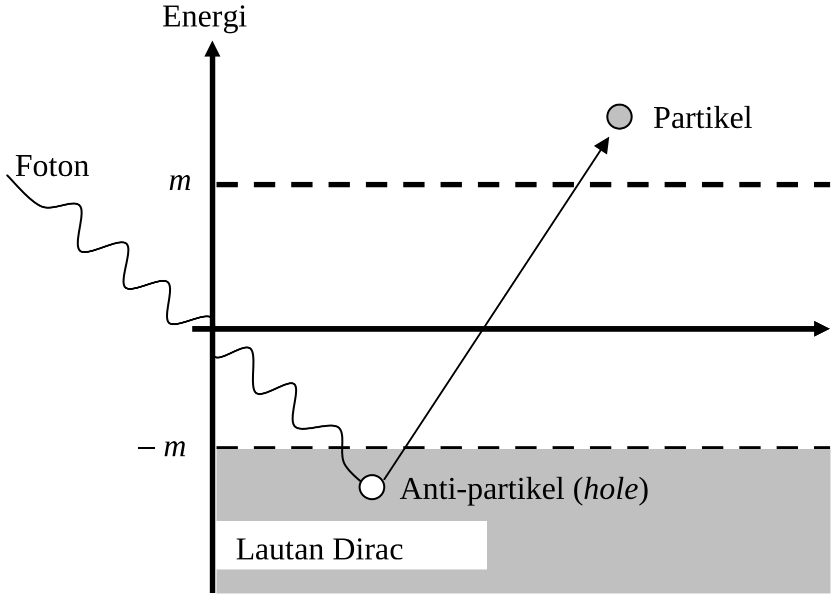
$$-\frac{\partial \psi_B}{\partial t} - m\psi_B = 0 . \tag{4.50b}$$

Dengan mengintegrasikan persamaan-persamaan di atas maka diperoleh solusi untuk masing-masing persamaan,

$$\psi_A(t) = \psi_A(0)\exp\left(-imt\right) , \quad \text{(energi positif: partikel)}, \tag{4.51a}$$

$$\psi_B(t) = \psi_B(0)\exp\left(+imt\right) . \quad \text{(energi negatif: anti partikel)}. \tag{4.51b}$$

Persamaan (4.51) adalah persamaan bergantung waktu dari partikel dalam keadaan kuantum dengan energi E. Dalam kerangka diam partikel ($\vec{p} = 0$), energi dari sebuah partikel diberikan oleh $E = m$ sehingga ψ_A adalah solusi yang mungkin. Sedangkan ψ_B menggambarkan keadaan kuantum dari sebuah partikel lain dengan energi negatif $E = -m$. Dirac kemudian memberikan tafsiran bahwa ψ_A adalah solusi untuk keadaan *partikel* (energi positif) spin-1/2 sedangkan ψ_B adalah solusi untuk keadaan *anti-partikel* (energi negatif) spin-1/2.[3] Sebagai contoh, jika ψ_A adalah keadaan kuantum elektron maka ψ_B adalah keadaan kuantum anti-elektron yaitu positron. Dari kenyataan ini dapat disimpulkan bahwa persamaan Dirac bukan persamaan yang menggambarkan persamaan untuk partikel tunggal tetapi persamaan untuk partikel dan anti partikel.



Gambar 4.1. Penciptaan pasangan partikel-antipartikel dalam tafsiran lautan Dirac.

Masalah solusi energi negatif kemudian dijelaskan dengan memperkenalkan apa yang disebut ”lautan Dirac” (*Dirac sea*). Bertolak dari prinsip larangan Pauli untuk partikel spin-1/2, Dirac mengasumsikan bahwa keadaan energi negatif terisi secara penuh (sebuah vakum stabil dimana semua keadaan energi negatif ditempati) dan prinsip Pauli mencegah setiap partikel memasuki lautan keadaan energi negatif ini. Gambaran ini juga membawa suatu kesimpulan bahwa tafsiran partikel tunggal untuk persamaan Dirac adalah tidak mungkin. Sebuah foton dengan energi $E > 2m$ dapat mengeksitasi salah satu elektron yang mengisi keadaan energi negatif akan meninggalkan sebuah lubang (*hole*) dalam lautan Dirac (Lihat Gambar 4.1). Lubang ini berperilaku seperti sebuah partikel dengan massa yang sama tetapi muatannya berlawanan yang ditafsirkan sebagai sebuah

[3] Membedakan partikel dan anti partikel hanyalah sebuah konvensi. Jadi kita juga dapat mengubah konvensi tersebut, misalnya positron adalah partikel dan elektron adalah anti partikel. Dalam hal ini kita hidup dalam dunia anti partikel.

positron. Implementasikan dari hal ini dapat dilihat ketika kita mengkuantisasi medan spin-1/2.[4]

B. Solusi gelombang bidang

Solusi gelombang bidang untuk persamaan Dirac adalah

$$\psi(x) = N \exp(-ip \cdot x) u(p) \ , \quad p^\mu = (E, \vec{p}) , \tag{4.52}$$

dimana N adalah konstanta normalisasi dan $u(p)$ adalah fungsi Dirac bebas sedemikian sehingga $\psi(x)$ memenuhi persamaan Dirac (4.30). Fungsi $u(p)$ kemudian akan menyatakan keadaan spinor 4-komponen. Karena $\psi(x)$ bergantung pada x^μ maka

$$\partial_\mu \psi = \frac{\partial \psi(x)}{\partial x^\mu} = -ip_\mu N \exp(-ip_\nu x^\nu) u(p) \ . \tag{4.53}$$

Akibatnya persamaan Dirac menjadi

$$i\gamma^\mu \left(-ip_\mu N \exp(-ip_\nu x^\nu) u(p)\right) - m\left(N \exp(-ip_\nu x^\nu) u(p)\right) = 0 \ . \tag{4.54}$$

atau

$$\left(\gamma^\mu p_\mu - m\right) u(p) = 0 \ . \tag{4.55}$$

Ini dinamakan sebagai persamaan Dirac dalam ruang momentum. Jika $u(p)$ memenuhi persamaan (4.55), maka $\psi(x)$ pada persamaan (4.52) memenuhi persamaan Dirac.

Dengan menggunakan analogi contoh 4.1, namun sekarang untuk fungsi bebas Dirac $u(p)$ (spinor 4-komponen) yang didekomposisikan sebagai berikut

$$u = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix}, \qquad u_A = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \qquad u_B = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \ . \tag{4.56}$$

Maka dapat diperoleh dua buah persamaan simultan:

$$u_A = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{(E-m)} \begin{bmatrix} -p_z & -(p_x - ip_y) \\ -(p_x + ip_y) & p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} \ . \tag{4.57a}$$

$$u_B = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{(E+m)} \begin{bmatrix} p_z & (p_x - ip_y) \\ (p_x + ip_y) & -p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \ . \tag{4.57b}$$

[4] Dalam buku ini tidak akan membahas kuantisasi medan. Untuk kuantisasi medan dapat dibaca pada buku teks teori medan kuantum, lihat referensi.

Jika kedua persamaan di atas diselesaikan maka hubungan energi-momentum relativistik juga diperoleh,

$$E = \begin{cases} +\sqrt{p^2 + m^2}, & partikel \\ -\sqrt{p^2 + m^2}, & anti - partikel \end{cases} \qquad (4.58)$$

Kembali, akar positif terkait dengan keadaan partikel dan akar negatif adalah untuk anti partikel, seperti dijelaskan sebelumnya. Karena $u(p)$ masih merupakan fungsi bebas maka pemilihan komponen-kompenen dari persamaan (4.57) akan menghasilkan empat buah solusi: dua buah untuk solusi energi positif $E = +\sqrt{p^2 + m^2}$ dan dua buah untuk solusi energi negatif $E = -\sqrt{p^2 + m^2}$, yaitu:

1. Dua solusi untuk energi positif (partikel):

(i) jika $u_1 = 1$ dan $u_2 = 0$: partikel dengan *spin up*, maka

$$u_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (4.59a)$$

dan

$$u_B = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{(E+m)} \begin{bmatrix} p_z & (p_x - ip_y) \\ (p_x + ip_y) & -p_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{(E+m)} \begin{bmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{bmatrix}. \qquad (4.59b)$$

Sehingga diperoleh

$$u(E, \vec{p}) = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x + ip_y}{E+m} \end{bmatrix}. \qquad (4.59c)$$

Untuk partikel diam $\vec{p} = 0$ fungsi keadaan spinor 4 komponen dari partikel dengan *spin up* adalah

$$u(E, \vec{0}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = \exp(-iEt) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (4.59d)$$

(ii) jika $u_1 = 0$ dan $u_2 = 1$: partikel dengan *spin down*, maka

$$u_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{4.60a}$$

dan

$$u_B = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{(E+m)} \begin{bmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{bmatrix} . \tag{4.60b}$$

Sehingga diperoleh

$$u(E,\vec{p}) = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{p_x - ip_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \end{bmatrix} . \tag{4.60c}$$

Sehingga untuk partikel diam $\vec{p} = 0$ fungsi keadaan spinor 4 komponen dari partikel dengan *spin down* adalah

$$u(E,\vec{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \psi(x) = \exp(-iEt) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{4.60d}$$

2. Dua solusi untuk energi negatif (anti partikel):

(i) jika $u_3 = 1$ dan $u_4 = 0$: anti partikel dengan *spin up*, maka

$$u_A = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{(E-m)} \begin{bmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{bmatrix} . \tag{4.61a}$$

$$u_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{4.61b}$$

Sehingga diperoleh

$$u(E,\vec{p}) = \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{p_z}{(E-m)} \\ \dfrac{p_x + ip_y}{(E-m)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{4.61c}$$

Untuk anti partikel diam $\vec{p} = 0$ fungsi keadaan spinor 4 komponen dari antipartikel dengan *spin up* adalah

$$u\left(E,\vec{0}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \psi\left(x\right)=\exp\left(+iEt\right)\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}. \tag{4.61d}$$

(ii) jika $u_3=0$ dan $u_4=1$: anti partikel dengan *spin down*, maka

$$u_A=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\frac{1}{\left(E-m\right)}\begin{bmatrix}p_x-ip_y\\-p_z\end{bmatrix}. \tag{4.62a}$$

$$u_B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}. \tag{4.62b}$$

Sehingga diperoleh

$$u\left(E,\vec{p}\right)=\begin{bmatrix}u_A\\u_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{p_x-ip_y}{\left(E-m\right)}\\ \dfrac{-p_z}{\left(E-m\right)}\\0\\1\end{bmatrix}. \tag{4.62c}$$

Untuk anti partikel diam $\vec{p}=0$ fungsi keadaan spinor 4 komponen dari antipartikel dengan *spin down* adalah

$$u\left(E,\vec{0}\right)=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix} \quad\Rightarrow\quad \psi\left(x\right)=\exp\left(+iEt\right)\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}. \tag{4.63d}$$

Fungsi Dirac bebas $u(p)$ di atas adalah funsi Dirac yang belum ternormalisasi. Maka untuk memperoleh fungsi Dirac ternormalisasi perlu diperkenalkan konstanta normalisasi N. Misalkan empat fungsi Dirac bebas (spinor Dirac 4-komponen) yang ternormalisasi dinyatakan oleh: $u^{(1)}$ dan $u^{(2)}$ adalah solusi untuk partikel, $u^{(3)}$ dan $u^{(4)}$ adalah solusi untuk anti-partikel. Kita tuliskan kembali persamaan di atas dengan melibatkan faktor normalisasi sebagai berikut:

(1) Solusi untuk partikel $E=+\sqrt{p^2+m^2}$ adalah

$$u^{(1)}(E,\vec{p}) = N\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x+ip_y}{E+m} \end{bmatrix} \text{ (spin up)}, \quad u^{(2)}(E,\vec{p}) = N\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \dfrac{-p_z}{E+m} \end{bmatrix} \text{ (spin down)}. \quad (4.64)$$

Persamaan ini berturut-turut mengambarkan persamaan keadaan elektron dengan *spin-up* dan *spin-down*.

(2) Solusi untuk anti-partikel $E = -\sqrt{p^2+m^2}$ adalah

$$u^{(3)}(E,\vec{p}) = N\begin{bmatrix} \dfrac{p_z}{(E-m)} \\ \dfrac{p_x+ip_y}{(E-m)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ (spin up)}, u^{(4)}(E,\vec{p}) = N\begin{bmatrix} \dfrac{p_x-ip_y}{(E-m)} \\ \dfrac{-p_z}{(E-m)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ (spin down)} \quad (4.65)$$

Persamaan ini berturut-turut mengambarkan persamaan keadaan antielektron dengan *spin-up* dan *spin-down*. Sifat-sifat akan dijelaskan pada pasal berikutnya.

Solusi energi *negatif* dapat pula ditafsirkan sebagai keadaan antipartikel energi *positif*. Untuk itu, ungkapan energi dan momentum fisis dari anti partikel dapat diperoleh dengan membalik tanda kedua kuantitas ini. Untuk memperjelas perbedaaan antara solusi partikel dan anti partikel yang keduanya sekarang memiliki energi dan momentum positif$\left(E = \sqrt{p^2+m^2}\right)$, untuk partikel dinyatakan dengan $u^{(s)}$ dan anti partikel dengan $v^{(s)}$ dengan s = 1, 2. Sehingga dengan membalik tanda persamaan (4.65) maka diperoleh

$$v^{(1)}(E,\vec{p}) = u^{(4)}(-E,-\vec{p}) = N\begin{bmatrix} \dfrac{p_x-ip_y}{(E+m)} \\ \dfrac{-p_z}{(E+m)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (4.66a)$$

$$v^{(2)}(E,\vec{p}) = u^{(3)}(-E,-\vec{p}) = N\begin{bmatrix} \dfrac{p_z}{(E+m)} \\ \dfrac{p_x + ip_y}{(E+m)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.66b}$$

Ini adalah solusi untuk dua keadaan spin anti partikel. Dengan demikian solusi gelombang bidang dari persamaan Dirac dapat diringkas sebagai berikut:

$$\psi^{(s)}(x) = \begin{cases} N\exp(-ip\cdot x)u^{(s)}(p), & \textit{partikel} \\ N\exp(-ip\cdot x)v^{(s)}(p), & \textit{anti partikel} \end{cases} \tag{4.67}$$

dimana s = 1, 2.

Contoh 4.4.

Carilah konstanta normalisasi N dengan menggunakan persamaan-persamaan (4.64) jika syarat normalisasi untuk spinor diberikan oleh $u^{\dagger}u = 2|E|$?

Jawab:

Dari persamaan (4.64) diperoleh

$$u^{(1)\dagger}u^{(1)} = NN^*\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{p_z}{E+m} & \dfrac{p_x - ip_y}{E+m} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x + ip_y}{E+m} \end{bmatrix}$$

$$= NN^*\left[1 + 0 + \frac{p_z^2}{(E+m)^2} + \frac{(p_x - ip_y)(p_x + ip_y)}{(E+m)^2}\right]$$

$$= NN^*\left[\frac{(E+m)^2 + p^2}{(E+m)^2}\right] = |N|^2\left[\frac{2E}{E+m}\right].$$

Dengan syarat normalisasi yang diberikan maka

$$|N|^2\left[\frac{2E}{E+m}\right]=2E \qquad \Rightarrow N=\sqrt{E+m} \quad . \tag{4.68}$$

Ini adalah konstanta normalisasi untuk keadaan partikel. Cobalah gunakan untuk spinor yang lain, serta turunkan konstanta normalisasi untuk keadaan anti-partikel?

Dengan menggunakan konstanta normalisasi (4.68) maka keempat keadaan spin dapat dinyatakan sebagai berikut

$$u^{(1)}(E,\vec{p})=\sqrt{E+m}\begin{bmatrix}1\\0\\ \dfrac{p_z}{E+m}\\ \dfrac{p_x+ip_y}{E+m}\end{bmatrix}, \qquad u^{(2)}(E,\vec{p})=\sqrt{E+m}\begin{bmatrix}0\\1\\ \dfrac{p_x-ip_y}{E+m}\\ \dfrac{-p_z}{E+m}\end{bmatrix},$$

$$v^{(1)}(E,\vec{p})=\sqrt{E+m}\begin{bmatrix}\dfrac{(p_x-ip_y)}{(E+m)}\\ \dfrac{-p_z}{(E+m)}\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad v^{(2)}(E,\vec{p})=\sqrt{E+m}\begin{bmatrix}\dfrac{p_z}{(E+m)}\\ \dfrac{p_x+ip_y}{(E+m)}\\1\\0\end{bmatrix}$$

Sifat-sifat normalisasi dari persamaan spinor di atas adalah

$$\bar{u}^{(r)}(p)u^{(s)}(p)=2m\delta^{rs} \ , \tag{4.69a}$$

$$\bar{u}^{(r)}(p)v^{(s)}(p)=\bar{v}^{(r)}(p)u^{(s)}(p)=0 \ , \tag{4.69b}$$

$$\bar{v}^{(r)}(p)v^{(s)}(p)=-2m\delta^{rs} \ . \tag{4.69c}$$

Disini r, s = 1, 2.

4.2.2 Operator spin

Kita ingin mengetahui fungsi keadaan spinor yang telah diberikan di atas. Matriks spin untuk partikel-partikel Dirac didefinisikan sebagai berikut

$$\vec{S}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{bmatrix} . \tag{4.70}$$

Dengan masing-masing komponennya adalah

$$S_x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix}, \qquad S_y = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{bmatrix}, \qquad S_z = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & \sigma_z \end{bmatrix}. \tag{4.71}$$

Andaikan kita ingin mengukur S_x, S_y dan S_z pada sebuah partikel dalam keadaan (*state*) :

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}. \tag{4.72}$$

Misalkan *spin up* dalam arah-z adalah

$$\sigma_z \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad spin\, up\, dalam\, arah - z\,. \tag{4.73}$$

dan *spin down* dalam arah-z adalah

$$\sigma_z \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \qquad spin\, down\, dalam\, arah - z\,. \tag{4.74}$$

Pertama kita dapat membentuk sebuah persamaan nilai eigen

$$\sigma_z \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}. \tag{4.75}$$

Maka nilai eigen λ dapat diselesaikan sebagai berikut

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0\,. \tag{4.76}$$

Dan persamaan yang harus diselesaikan adalah

$$(1-\lambda)\alpha = 0, \qquad (1+\lambda)\beta = 0,$$

yang memberikan solusi nilai eigen $\lambda = \pm 1$. Untuk $\lambda = 1$ maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \alpha = \alpha,\ -\beta = \beta\,. \tag{4.77}$$

Dengan mengambil $\alpha = 1$ dan $\beta = 0$ maka keadaan eigenya diberikan oleh

$$\left|\uparrow\right\rangle \equiv \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad spin\, up\,. \tag{78}$$

Keadaan eigen (4.78) adalah keadaan dari sebuah partikel dengan *spin up*. Kemudian dengan mengambil $\lambda = -1$ maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \alpha \\ -\beta \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \alpha = -\alpha,\ \beta = \beta\,. \tag{4.79}$$

maka keadaan eigenya diberikan oleh

$$\left|\downarrow\right\rangle \equiv \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad spin\,down\,. \tag{4.80}$$

Keadaan eigen (4.80) adalah keadaan dari sebuah partikel dengan *spin down* dimana kita telah memilih $\alpha = 0,\ \beta = 1$.

Contoh 4.5.

Buktikan bahwa medan spinor Dirac adalah keadaan partikel spin up dan spin down!.

Jawab:

Untuk memahami keadaan *spin-up* atau *spin-down* dari spinor-spinor Dirac $u^{(1)}$, $u^{(2)}$, $v^{(1)}$ dan $v^{(2)}$, kita tinjau salah satu darinya, yang lain silahkan dicoba.

$$u^{(1)} = N\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{p_z}{E+m} \\ \dfrac{p_x + ip_y}{E+m} \end{bmatrix}. \tag{4.81}$$

Misalkan $\vec{p}$ sejajar dengan sumbu-z dan $p_x = p_y = 0$, maka diperoleh

$$u^{(1)} = \begin{bmatrix} \sqrt{E+m} \\ 0 \\ \sqrt{E-m} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.82}$$

Selanjutnya operasikan operator spin (4.71) terhadap spinor eigen di atas maka diperoleh

$$S_z u^{(1)} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{E+m} \\ 0 \\ \sqrt{E-m} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{E+m} \\ 0 \\ \sqrt{E-m} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}u^{(1)}\,. \tag{4.83}$$

Persamaan di atas membentuk persamaan nilai eigen

$$S_z u^{(1)} = +\frac{1}{2}u^{(1)}\,. \qquad (spin\text{-}up)\,, \tag{4.84a}$$

dengan nilai eigen adalah $+1/2$ yang terkait dengan keadaan (spinor) eigen $u^{(1)}$ *spin-up*. Dengan cara yang sama dapat ditunjukan bahwa

$$S_z u^{(2)} = -\frac{1}{2} u^{(2)} \; . \qquad (\textit{spin-down}) \qquad (4.84b)$$

$$S_z u^{(3)} = +\frac{1}{2} u^{(3)} \; . \qquad (\textit{spin-up}) \qquad (4.84c)$$

$$S_z u^{(4)} = -\frac{1}{2} u^{(4)} \; . \qquad (\textit{spin-down}) \qquad (4.84d)$$

4.2.3 Kovarian Bilinier

Pada pasal ini kita akan mempelajari dan mengklasifikasikan bilinier dari kombinasi spinor 4-komponen ψ dan $\bar{\psi}$. Yang dimaksud bilinier disini yaitu obyek yang tidak membawa indeks spinor dan hanya meliputi dua buah medan spinor. Tujuan mempelajari bentuk bilinier adalah untuk mendefinisikan suatu fungsi Lagrange, yang akan kita pelajari pada pasal berikutnya.

Sifat-sifat dari spinor Dirac tidak bertransformasi seperti 4-vektor meskipun memiliki 4 buah komponen. Matriks γ^{μ} juga bukan 4-vektor karena tidak berubah ketika ditransformasikan dari kerangka S dan S'. Sehingga dapat dipahami bahwa bentuk bilinier terkait dengan sebuah matriks. Transformasi dari kerangka S kerangka S' yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ searah sumbu-x diberikan oleh

$$\psi \;\; \rightarrow \;\; \psi' = S\psi \;\; , \qquad (4.85)$$

disini S adalah sebuah matriks 4 x 4,

$$S = a_+ + a_- \gamma^0 \gamma^1 = \begin{bmatrix} a_+ & a_- \sigma_1 \\ a_- \sigma_1 & a_+ \end{bmatrix} , \qquad (86)$$

dimana

$$a_+ = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma + 1)} , \qquad a_- = -\sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma - 1)} , \qquad (4.87)$$

Andaikan kita ingin membangun sebuah kuantitas skalar dengan menggunakan sebuah spinor ψ. Pertama kita dapat membuat kombinasi $\psi^{\dagger}\psi$, apakah ini adalah sebuah skalar? Jika skalar maka tidak akan berubah terhadap transformasi (4.85). Kombinasi $\psi^{\dagger}\psi$ memberikan hasil

$$\psi^\dagger\psi = \begin{bmatrix}\psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{bmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \ . \tag{4.88}$$

Masing-masing spinor bertrasformasi sebagai berikut

$$\psi \quad \to \quad \psi' = S\psi \ . \tag{4.89a}$$

$$\psi^\dagger \quad \to \quad (\psi')^\dagger = (S\psi)^\dagger = \psi^\dagger S^\dagger \ . \tag{4.89b}$$

Sehingga persamaan (4.88) menjadi

$$\left(\psi^\dagger\psi\right) \quad \to \quad \psi'^\dagger\psi' = \psi^\dagger S^\dagger S\psi \ . \tag{4.90}$$

Jika $\psi^\dagger\psi$ adalah skalar, haruslah $S^\dagger S = 1$. Dapat dibuktikan dengan menggunakan persamaan (4.86), bahwa $S^\dagger S \neq 1$,

$$S^\dagger S = S^2 = \gamma\begin{bmatrix}1 & -\beta\sigma_1\\ -\beta\sigma_1 & 1\end{bmatrix} \neq 1 \ , \qquad\qquad \beta = v/c \tag{4.91}$$

Kemudian kita ingin mencoba untuk membuat kombinasi $\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi$, dengan cara yang sama harus pula ditransformasikan sesuai dengan kaidah transformasi (4.85),

$$\left(\bar{\psi}\psi\right) \quad \to \quad \left(\bar{\psi}\psi\right)' = \left(\psi'\right)^\dagger \gamma^0\psi' \ . \tag{4.92}$$

Dengan menggunakan persamaan (4.89b) maka transformasi di atas menjadi

$$\left(\bar{\psi}\psi\right) \quad \to \quad \left(\bar{\psi}\psi\right)' = \psi^\dagger S^\dagger\gamma^0 S\psi \ . \tag{93}$$

Dalam kasus ini haruslah dibuktikan $S^\dagger\gamma^0 S = \gamma^0$. Lihat contoh dibawah ini bahwa hubungan ini dipenuhi, sehingga $\bar{\psi}\psi$ adalah sebuah skalar.

Contoh4.6.

Bukutikan bahwa $S^\dagger\gamma^0 S = \gamma^0$ sehingga $\bar{\psi}\psi$ adalah skalar.

Jawab:

Dari persamaan (4.86) dapat diperoleh

$$S^\dagger = \begin{bmatrix}a_+^* & (a_-\sigma_1)^*\\ (a_-\sigma_1)^* & a_+^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_+^* & a_-^*\sigma_1\\ a_-^*\sigma_1 & a_+^*\end{bmatrix}$$

Dengat mengingat bahwa $a_\pm$ terdiri dari bilangan biasa maka $a_\pm^* = a_\pm$,

$$S^\dagger = \begin{bmatrix} \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma+1)} & -\sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)}\sigma_1 \\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)}\sigma_1 & \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma+1)} \end{bmatrix} = S$$

Sehingga

$$S^\dagger\gamma^0 S = \begin{bmatrix} \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma+1)} & -\sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)}\sigma_1 \\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)}\sigma_1 & \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma+1)} & -\sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)}\sigma_1 \\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)}\sigma_1 & \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma+1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma+1)}\sigma^0 & \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)}\sigma_1\sigma^0 \\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)}\sigma_1\sigma^0 & -\sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma+1)}\sigma^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma+1)} & -\sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)}\sigma_1 \\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma-1)}\sigma_1 & \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma+1)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \tfrac{1}{2}(\gamma+1)\sigma^0 - \tfrac{1}{2}(\gamma-1)\sigma_1\sigma^0\sigma_1 & -\tfrac{1}{2}\left(\gamma^2-1\right)\sigma^0\sigma_1 + \tfrac{1}{2}\left(\gamma^2-1\right)\sigma^0\sigma_1 \\ -\tfrac{1}{2}\left(\gamma^2-1\right)\sigma_1\sigma^0 + \tfrac{1}{2}\left(\gamma^2-1\right)\sigma_1\sigma^0 & \tfrac{1}{2}(\gamma-1)(\sigma_1)^2\sigma^0 - \tfrac{1}{2}(\gamma+1)\sigma^0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma^0 & 0 \\ 0 & -\sigma^0 \end{bmatrix} = \gamma^0$$

Sehingga

$$(\bar{\psi}\psi) \quad \rightarrow \quad (\bar{\psi}\psi)' = \psi^\dagger\gamma^0\psi = \bar{\psi}\psi \text{ , (skalar)}$$

Jadi kuantitas

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2, \tag{4.94}$$

adalah invarian relativistik.

Ada 16 hasil kali dengan bentuk $\psi_i^*\psi_j$ karena i dan j berjalan dari 1 sampai 4. Ragam kombinasi linier untuk membangun kuantitas-kuantitas dengan perilaku transformasi yang berbeda dapat dirangkum sebagai berikut:

$$\begin{array}{lll} (i) \ \ \bar{\psi}\psi = skalar & (1\ komponen) & \\ (ii) \ \ \bar{\psi}\gamma^5\psi = \ pseudoskalar & (1\ komponen) & \\ (iii) \ \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = vektor & (4\ komponen) & (4.95) \\ (iv) \ \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = \ pseudovektor & (4\ komponen) & \\ (iv) \ \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi = tensor\ antisimetrik & (6\ komponen) & \end{array}$$

dimana

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right). \tag{4.96}$$

Pseudoskalar dan pseudovektor dibedakan dengan skalar dan vektor oleh perlakuan terhadap transformasi paritas[5]

$$P = (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z). \qquad (4.97)$$

Pseudoskalar berubah tanda sedangkan skalar tidak berubah tanda.

Kita melihat ada 16 buah matriks yang dapat dibangun dari matriks gamma 4 x 4 membentuk himpunan matriks {1, γ^5, γ^μ, $\gamma^\mu\gamma^5$, $\sigma^{\mu\nu}$}: ada 1 buah matriks satuan, 1 buah matriks γ^5, 4 buah matriks γ^μ, 4 buah matriks $\gamma^\mu\gamma^5$ dan 6 buah matriks $\sigma^{\mu\nu}$.

4.3 Medan Vektor: Partikel spin-1

Berikut ini akan dipelajari partikel spin-1. Foton tidak memiliki massa digambarkan oleh persamaan Maxwell dan partikel bermassa dengan spin-1 (sebagai contoh boson $W^{\pm}$) digambarkan melalui persamaan Proca.

Dalam elektrodinamika klasik medan listrik $\vec{E}$ dan medan magnet $\vec{B}$ diberikan oleh 4 set persamaan yaitu persamaan Maxwell:

$$(i) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \qquad \text{(Hukum Gauss)}, \qquad (4.98a)$$

$$(ii) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \qquad \text{(Hukum Faraday)}, \qquad (4.98b)$$

$$(iii) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \qquad (4.98c)$$

$$(iv) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{j} \qquad \text{(Hukum Ampere)}. \qquad (4.98d)$$

Penjelasan persamaan di atas sebagai berikut: persamaan (i) adalah hukum Gauss yaitu muatan total di dalam sebuah permukaan tertutup dapat diperoleh dengan mengintegrasikan komponen normal $\vec{E}$ pada permukaan tersebut. Persamaan (ii) adalah hukum Faraday yaitu perubahan medan magnet akan menghasilkan medan listrik Persamaan (iii) menjelaskan tentang tidak adanya muatan magnetik dan persamaan (iv) adalah hukum Ampere yaitu perubahan medan listrik menghasilkan medan magnet. Persamaan (ii) dan (iii) dinamakan persamaan homogen sedangkan persamaan (i) dan (iv) dinamakan sebagai persamaan tak-homogen, mengandung suku sumber.

Dalam notasi relativistik, medan listrik $\vec{E}$ dan medan magnet $\vec{B}$ secara bersama-sama membentuk sebuah medan tensor kontravarian rank-2 antisimetrik (medan tensor elektromagnetik),

---

[5] J. Griffiths, D., *Introduction to Elementary Particle*, Bab IV pasal 4.6.

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix} , \tag{4.99a}$$

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} , \qquad \text{(antisimetrik)} . \tag{4.99b}$$

Medan tensor elektromagnetik kovarian antisimetrik dapat diperoleh dari tensor medan kontravarian dengan mengerjakan kontraksi indeks (menurunkan indeks):

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta} . \tag{4.100}$$

Representasi matriks untuk medan tensor elektromagnetik kovarian antisimetrik kemudian diperoleh:

$$F_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{bmatrix} . \tag{4.101}$$

Sedangkan rapat muatan ρ dan rapat arus $\vec{j}$ adalah 4-vektor:

$$j^\mu = \left(j^0, \vec{j} \right) = \left(c\rho, \vec{j} \right) . \tag{4.102}$$

Persamaan Maxwell tak-homogen kemudian dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} j^\nu . \qquad \text{(persamaan Maxwell tak-homogen)} \tag{103}$$

Persamaan ini menghubungkan tensor antisimetrik dan vektor sebagaimana ditunjukan oleh indeksnya. Bentuk eksplisit persamaan (4.103), tentunya akan diperoleh kembali persamaan Maxwell tak-homogen:

(a) dengan mengambil $\nu = 0$,

$$\frac{\partial F^{\mu 0}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial F^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{30}}{\partial x^3} = 0 + \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

$$= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{c} j^0 ,$$

yang memberikan kembali persamaan (i) dengan mengambil $j^0 = c\rho$.

(b) dengan mengambil $\nu = 1$,

$$\frac{\partial F^{\mu 1}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial F^{01}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{21}}{\partial x^2} + \frac{\partial F^{31}}{\partial x^3} = -\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} + 0 + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

$$= \frac{4\pi}{c} j^1 ,$$

atau

$$\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}j_x$$

(c) dengan mengambil $\nu=2$,

$$\frac{\partial F^{\mu 2}}{\partial x^\mu}=\frac{\partial F^{02}}{\partial x^0}+\frac{\partial F^{12}}{\partial x^1}+\frac{\partial F^{22}}{\partial x^2}+\frac{\partial F^{32}}{\partial x^3}=-\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}-\frac{\partial B_z}{\partial x}+0-\frac{\partial B_x}{\partial z}$$

$$=\frac{4\pi}{c}j^2\ ,$$

atau

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}j_y$$

(d) dengan mengambil $\nu=3$,

$$\frac{\partial F^{\mu 3}}{\partial x^\mu}=\frac{\partial F^{03}}{\partial x^0}+\frac{\partial F^{13}}{\partial x^1}+\frac{\partial F^{23}}{\partial x^2}+\frac{\partial F^{33}}{\partial x^3}=-\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}-\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}+0$$

$$=\frac{4\pi}{c}j^3\ ,$$

atau

$$-\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}j_z$$

Dari hasil (b) , (c) dan (d), ketiga persamaan ini dapat dinyatakan dalam bentuk 3-vektor. Hasilnya adalah

$$\vec{\nabla}\times B-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}\vec{j}\ , \qquad \vec{j}\left(j^1=j_x, j^2=j_y, j^3=j_z\right)$$

yang ekuivalen dengan persamaan (iv)

Dari sifat antisimetrik $F^{\mu\nu}=-F^{\nu\mu}$ maka rapat arus j^μ menjadi bebas divergensi

$$\partial_\mu j^\mu=0\ . \tag{4.104}$$

Persamaan Maxwell homogen adalah ekuivaken dengan ungkapan bahwa $\vec{B}$ dapat dinyatakan sebagai rotasi dari sebuah potensial vektor, $\vec{A}$:

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\ . \tag{4.105}$$

Sehingga persamaan Maxwell (ii) menjadi

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)=0\ . \tag{4.106}$$

Dengan memperkenal potensial 4-vektor

$$A^{\mu} = \left(\phi, \vec{A}\right) \ , \tag{4.107}$$

dengan

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} \ , \tag{4.108}$$

persamaan Maxwell homogen masih dipenuhi. Sehingga dalam notasi relativistik dapat dinyatakan sebagai berikut

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu} \ . \tag{4.109}$$

Dalam elektrodinamika klasik, medan-medan merupakan elemen-elemen fisisnya. Mengenalkan sebuah potensial 4-vektor (4.109) hanyalah konstruksi matematis yang dapat mempertahankan persamaan Maxwell homogen dan mengubah bentuk persamaan tak-homogen menjadi formulasi relativistik. Secara matematis ini dapat dibenarkan, namun apa makna fisis dari kuantitas-kuantitas ϕ dan $\vec{A}$ belumlah jelas meskipun persamaan (4.109) menentukan secara khusus medan listrik dan medan magnet dalam ungkapan ϕ dan $\vec{A}$. Ini berarti bahwa ϕ dan $\vec{A}$ dapat dipilih sembarang yang akibatnya ϕ dan $\vec{A}$ menjadi tidak unik. Andaikan ada sebuah potensial baru yang juga tidak mengubah ungkapan medan listrik $\vec{E}$ dan medan magnet $\vec{B}$,

$$\phi(x) \ \rightarrow \ \phi'(x) = \phi(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial t} \ , \tag{4.110a}$$

$$\vec{A}(x) \ \rightarrow \ \vec{A}'(x) = \vec{A}(x) - \vec{\nabla} f(x) \ . \tag{4.110b}$$

Disini $f(x)$ adalah sebuah fungsi sembarang yang kemudian dinamakan *fungsi gauge*. Maka dengan mensubstitusikan ke persamaan (4.108) diperoleh

$$\begin{aligned}
\vec{E} \ \rightarrow \ \vec{E}' &= -\vec{\nabla}\phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\vec{\nabla}\left(\phi(x) + \frac{\partial f(x)}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}(x) - \vec{\nabla} f(x)\right) \\
&= -\vec{\nabla}\phi(x) - \vec{\nabla}\left(\frac{\partial f(x)}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(x) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} f(x)\right) \\
&= -\vec{\nabla}\phi(x) - \left(\frac{\partial \vec{\nabla} f(x)}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(x) + \left(\frac{\partial \vec{\nabla} f(x)}{\partial t}\right) \\
&= -\vec{\nabla}\phi(x) - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}(x)
\end{aligned}$$

$$\vec{B} \ \rightarrow \ \vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times \left(\vec{A}(x) - \vec{\nabla} f(x)\right)$$

$$= \vec{\nabla} \times \vec{A}(x) - \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} f(x) \right)$$

$$= \vec{\nabla} \times \vec{A}(x)$$

Bandingkan hasil transformasi persamaan di atas dengan persamaan (4.108), dapat dilihat bahwa ungkapan medan listrik $\vec{E}$ dan medan magnet $\vec{B}$ masih dipertahankan oleh transformasi (4.110). Persamaan transformasi (4.110) dinamakan *transformasi gauge*. Karena itu persamaan Maxwell *invarian* terhadap transformasi gauge. Hukum-hukum fisika yang tidak berubah terhadap transformasi gauge dikatakan *invarian gauge*. Bentuk kovarian dari transformasi gauge adalah

$$A_\mu \;\rightarrow\; A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu f \;, \tag{4.111}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (4.111) ke persamaan (4.103), diperoleh ungkapan untuk potensial 4-vektor A^μ sebagai berikut

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu - \partial^\nu \left(\partial_\mu A^\mu \right) = \frac{4\pi}{c} j^\nu \,, \tag{4.112}$$

Dengan mengubah-ubah ungkapan potensial dapat dilihat bahwa perubahan potensial tidak mempengaruhi medan-medannya, maka dari persamaan (4.111) dapat dipaksakan sebuah derajat kebebasan dengan memilih *f* tertentu sedemikian sehingga transformasi A^μ memenuhi syarat *gauge Lorentz,*

$$\partial_\mu A^\mu = \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \,. \tag{4.113}$$

Sehingga persamaan (4.112) menjadi

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = \frac{4\pi}{c} j^\nu \,, \tag{114}$$

Persamaan ini kemudian memberikan dua buah persamaan gelombang

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi = 4\pi\rho, \qquad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \,, \tag{4.115}$$

Solusi dari persamaan ini memberikan potensial Lienard-Wiechert. Dalam vakum, persamaan (4.114) memberikan sebuah tafsiran A^ν dalam ungkapan fungsi gelombang untuk partikel tak bermassa (foton)

$$\partial^\mu \partial_\mu A^\nu = 0 \,, \tag{4.116}$$

Dalam hal ini, persamaan (4.115) serupa dengan persamaan KG untuk partikel tak bermassa. Serupa dengan kasus persamaan Dirac, solusi persamaan (4.116) adalah solusi untuk gelombang bidang dengan momentum $p = \left(E, \vec{p}\right)$

Ada sebuah generalisasi dari persamaan Maxwell yang memberikan sebuah persamaan untuk partikel spin-1 bermassa,[6]

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0\,. \tag{4.117}$$

Persamaan ini dinamakan dengan persamaan *proca*. Dengan mengambil divergensinya maka diperoleh

$$m^2 \partial_\nu A^\nu = 0\,. \tag{118}$$

Karena $m \neq 0$ maka $\partial_\nu A^\nu = 0$, yaitu sebuah gauge Lorentz. Sebagaiman telah dijelaskan sebelumnya, $F^{\mu\nu}$ adalah invarian gauge. Tetapi melalui persamaan (4.117), bahwa partikel spin-1 bermassa tidak invarian gauge. Dengan mensubstitusikan persamaan (4.118) ke persamaan (4.117) maka persamaan gelombang untuk partikel spin-1 bermassa adalah

$$\left(\Box + m^2\right) A^\nu = 0\,. \tag{4.119}$$

dimana $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$. Solusi dari persamaan di atas adalah

$$A_\mu\left(x\right) = \varepsilon_\mu\left(p\right) e^{\pm ip\cdot x}\,. \tag{4.120}$$

Syarat gauge Lorentz mengakibatkan $p^\mu \varepsilon_\mu\left(p\right) = 0$. Dalam kerangka diam ada tiga kemungkinan solusi bebas, misalnya $\left(0, \vec{\varepsilon}_\lambda\right)$ dimana vektor ε_λ membentuk basis untuk representasi spin-1. Oleh karena itu medan vektor A_μ menggambarkan partikel spin-1.

Contoh 4.7.

Carilah komponen tensor medan kovarian F_{12} dari tensor medan kontravarian.

Jawab:

Dengan mengingat tensor metrik $g_{\mu\nu}$ adalah diagonal maka

$$F_{12} = g_{1\alpha} g_{2\beta} F^{\alpha\beta} = g_{11} g_{22} F^{12} = -B_3$$

Komponen-komponen yang lain dapat dicari dengan mengikuti langkah ini.

[6] Ryder, L.H., *Quantum Field Theory*, Bab II hal. 67.

4.4 Lagrangian medan spin-0, spin-1/2 dan spin-1

4.4.1 Persamaan Euler-Lagrange

Dengan memilih rapat Lagrangian secara tepat, persamaan-persamaan gerak untuk medan skalar (spin-0), medan Dirac (spin-1/2) dan medan vektor (spin-1) yang telah kita pelajari sebelumnya dapat pula diturunkan melalui persamaan *Euler-Lagrange*.

Dasar kajian mekanika klasik (non-relativistik) adalah hukum II atau persamaan dinamika Newton:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \tag{4.121}$$

yang mengaitkan gaya $\vec{F}$ yang bekerja pada sebuah benda bermassa m dengan percepatan $\vec{a} = d^2\vec{r}/dt^2$ yang dialami benda, dimana $\vec{r}$ adalah vektor kedudukan benda pada saat t. Untuk gaya konservatif, terdapat sebuah besaran fungsi skalar $V(\vec{r}\,,\,t)$, yang disebut energi potensial, dimana gaya **F** diberikan oleh: $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, dengan $\vec{\nabla}$ adalah operator gradien, yang dalam sistem koordinat Kartesis $\vec{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$, adalah:

$$\vec{\nabla} \equiv \hat{\mathbf{i}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{j}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{k}}\frac{\partial}{\partial z}. \tag{4.122}$$

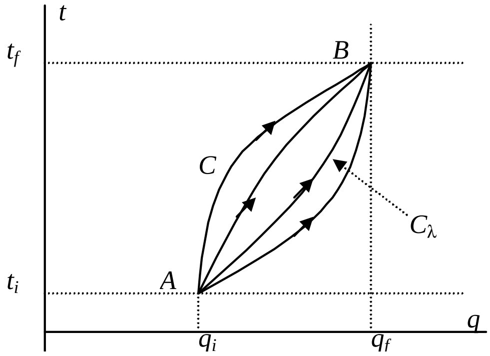
Untuk kasus ini, persamaan (4.121) menjadi:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla}V, \tag{4.123}$$

Secara matematika, (4.123) adalah suatu persamaan diferensial biasa orde-2 yang memiliki solusi *tunggal*: $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$, apabila nilai kedudukan $\vec{r}$ dan kecepatan $d\vec{r}/dt$, pada saat awal $t = t_i$ diberikan, yakni:

$$\vec{r}(t_i) = \vec{r}_i, \qquad \text{dan} \qquad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_i\,. \tag{4.124}$$

Persamaan (4.124) adalah syarat awal untuk memecahkan persamaan dinamika (4.123). Jadi, bila syarat awal (4.124) diberikan, maka kedudukan benda pada saat $t = t' > t_i$ tertentu, yakni $\vec{r}\,' = \vec{r}(t')$, tertentukan secara pasti! Artinya, dalam menempuh perjalanan dari kedudukan awal $A(\vec{r}_i, t_i)$ menuju kedudukan $B(\vec{r}', t')$, benda melewati suatu “lintasan istimewa C_λ", yang diberikan oleh solusi tunggal persamaan (4.123), yakni: $\vec{r} = \vec{r}\,(t)$, untuk sembarang waktu t. Kenyataan ini menunjukkan bahwa gerak partikel dalam pandangan mekanika klasik adalah bersifat *deterministik* atau teramalkan.



Gambar 4.2. Kemungkinan lintasan C, dimana C_λ adalah lintasan istimewa yang ditempuh benda

Alasan benda memilih suatu lintasan istimewa C_λ, dan bukan yang lainnya, dapat dikaji dari syarat *ekstrim* sebuah "fungsi yang bergantung pada lintasan C" penghubung titik A dan B dalam ruang-waktu:

$$S = S(C). \tag{4.125}$$

Dalam Gambar 4.2, diilustrasikan kemungkinan lintasan C antara A dan B, untuk kasus gerak 1-dimensi, dengan $\vec{r} = (q)$, dalam diagram ruang-waktu. Yakni, jika $C_{\lambda'}$ adalah sebuah lintasan yang berbeda secara infinitesimal dari C_λ, maka

$$S(C_{\lambda'}) = S(C_\lambda) + \delta S = S(C_\lambda)\,,$$

atau

$$\delta S = 0\,. \tag{4.126}$$

Ini adalah syarat ekstrim atau *stasioner* untuk fungsi aksi $S(C)$. Fungsi lintasan S ini didefinisikan sebagai berikut:

$$S(C) = \int_{t_i}^{t_f} L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)dt \,, \tag{4.127}$$

dengan $\dot{\mathbf{r}} = d\mathbf{r}/dt$, adalah kecepatan, dan

$$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \tfrac{1}{2} m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - V(\vec{r}, t) \,, \tag{4.128}$$

dikenal sebagai *fungsi Lagrange*. Fungsi lintasan pada persanaan (4.127) dinamakan *fungsi aksi* (*action*). Dengan menggunakan kalkulus variasi, maka dari syarat stasioner (4.126) diturunkan persamaan *Euler-Lagrange*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, \tag{4.129}$$

dimana q_α, dan $\dot{q}_\alpha$, (α = 1, 2, 3), berturut-turut adalah komponen vektor kedudukan $\vec{r}$ dan kecepatan $\dot{\vec{r}}$. Koordinat q_α lazim disebut sebagai *koordinat umum* (*generalized coordinates*). Untuk kasus dinamika sistem dengan *N*-buah benda titik, maka indeks (α = 1, 2, 3, ⋯, 3*N*). Ruang berdimensi 3*N* ini disebut ruang *konfigurasi* sistem.

Dalam teori medan Lagrangian adalah fungsi dari medan ϕ_α serta derivatif terhadap *x*, *y*, *z* dan *t*. Ruas kiri persamaan (4.129) hanya meliputi derivatif waktu maka jika waktu dan ruang diperlakukan sama (menurut teori relativistik), persamaan Euler-Lagrange menjadi

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \left(\partial_\mu \phi_\alpha \right)} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha} \;. \tag{4.130}$$

4.4.2 Medan skalar (spin 0)

Untuk menurunkan persamaan gerak dari sebuah medan skalar riil $\phi(x)$ rapat Lagrangian-nya diberikan oleh

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \,. \tag{4.131}$$

Maka persamaan geraknya dapat diperoleh dengan menggunakan persamaan Euler-Lagrange (4.129),

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu \phi\right)}\right)=\partial^\mu \phi \qquad \Rightarrow \qquad \left(\Box+m^2\right)\phi\left(x\right)=0 \tag{4.132}$$

Sedangkan untuk medan skalar kompleks, rapat Lagrangiannya adalah

$$L=\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi\,, \tag{4.133}$$

selanjutnya dapat dipandang sebagai jumlah dari rapat Lagrangian untuk dua buah medan skalar ϕ_1 dan ϕ_2 dengan $\phi=(\phi_1+i\phi_2)/\sqrt{2}$. Maka kita memperoleh dua buah persamaan gerak

$$\left(\Box+m^2\right)\phi\left(x\right)=0\ , \tag{4.134a}$$

$$\left(\Box+m^2\right)\phi^*\left(x\right)=0\ , \tag{134b}$$

4.4.3 Medan Dirac (spin-1/2)

Tinjau sekarang sebuah medan spinor ψ. Lagrangian yang tepat untuk menurunkan persamaan Dirac adalah

$$L=\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi\,. \tag{4.135}$$

Variasi terhadap $\bar{\psi}$ menghasilkan

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}\right)}\right)=0\,, \qquad \frac{\delta L}{\delta\bar{\psi}}=i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi\ . \tag{4.136}$$

Sehinga diperoleh persamaan gerak

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi=0\,, \tag{4.137}$$

yang menggambarkan sebuah partikel spin-1/2 dengan massa *m*. Sedangkan variasi terhadap ψ menghasilkan

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu \psi\right)}\right)=i\bar{\psi}\gamma^\mu\,, \qquad \frac{\delta L}{\delta\psi}=-m\bar{\psi}\ . \tag{138}$$

Sehingga diperoleh

$$i\partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi}=0\,. \tag{139}$$

4.4.4 Medan vektor (spin-1)

Tinjau sebuah Lagrangian dari sebuah medan vektor A_μ,

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}A^\mu\left[\left(\partial^2 + m^2\right)g_{\mu\nu} - (1-\lambda)\partial_\mu\partial_\nu\right]A^\nu \end{aligned} \tag{4.140}$$

Dapat diperoleh

$$\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\right) = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu - \lambda g^{\mu\nu}\left(\partial_\rho A^\rho\right) \tag{4.141}$$

Yang menghasilkan persamaan gerak

$$\left(\Box + m^2\right)A_\mu - (1-\lambda)\partial_\mu\left(\partial_\nu A^\nu\right) = 0\,. \tag{4.142}$$

Ini dinamakan persamaan *Proca* yang telah dipelajari sebelumnya yaitu menggambarkan sebuah partikel spin-1 dengan massa *m*. Akibatnya

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = 0, \qquad dan \qquad \partial_\mu A^\mu = 0 \tag{4.143}$$

Contoh 4.8.

Diberikan sebuah transformasi

$$\psi \qquad \rightarrow \qquad \psi' = e^{i\theta}\psi$$

dimana θ adalah suatu bilangan konstan. Buktikan bahwa persamaan Dirac invarian terhadap transformasi di atas.

Jawab.

Terhadap transformasi di atas maka persamaan Dirac akan bertransformasi sebagai berikut

$$L \;\rightarrow\qquad L' = \bar{\psi}'\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi'$$

dimana

$$\begin{aligned} \psi \qquad &\rightarrow \qquad \psi' = e^{i\theta}\psi \\ \bar{\psi} \qquad &\rightarrow \qquad \bar{\psi}' = e^{-i\theta}\bar{\psi} \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned} L \;\rightarrow\qquad L' &= e^{-i\theta}\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\left(e^{i\theta}\psi\right) \\ &= e^{-i\theta}\bar{\psi}i\gamma^\mu\partial_\mu\left(e^{i\theta}\psi\right) - e^{-i\theta}\bar{\psi}m\left(e^{i\theta}\psi\right) \end{aligned}$$

$$= \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} m\psi = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\right)\psi$$
$$= L$$

Jadi terhadap transformasi di atas Lagrangian tidak berubah, invarian.

Rangkuman

- Persamaan Klein-Gordon untuk partikel spin-0 : $\left(\Box + m^2\right)\phi(x) = 0$

  Solusi gelombang dari persamaan KG $:\phi(x) = Ne^{-i\left(Et - \vec{p}\cdot\vec{x}\right)}$

- Persamaan Dirac dengan ψ sebagai medan spinor Dirac untuk partikel spin-1/2

  $\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m\right)\psi = 0$,

  Solusi gelombang bergantung waktu dari persamaan Dirac partikel dalam keadaan kuantum dengan energi E

  $\psi_A(t) = \psi_A(0)\exp\left(-imt\right)$, (energi positif: partikel),

  $\psi_B(t) = \psi_B(0)\exp\left(+imt\right)$. (energi negatif: anti partikel).

  Solusi gelombang bidang dari persamaan Dirac sebagai berikut:

  $$\psi^{(s)}(x) = \begin{cases} N\exp\left(-ip\cdot x\right)u^{(s)}(p), & \textit{partikel} \\ N\exp\left(-ip\cdot x\right)v^{(s)}(p), & \textit{anti partikel} \end{cases}$$

  dimana s = 1, 2.

- Persamaan Proca untuk partikel spin 1 diberikan:

  $$\left(\Box + m^2\right)A^\nu = 0\,.$$

  dimana $\Box = \partial^\mu \partial_\mu$. Solusi dari persamaan di atas adalah

  $$A_\mu(x) = \varepsilon_\mu(p)e^{\pm ip\cdot x}\,.$$

- Kovarian bilinier yaitu obyek yang tidak membawa indeks spinor dan hanya meliputi dua buah medan spinor. Transformasi dari kerangka S kerangka S’ yang bergerak dengan kecepatan $\vec{v}$ searah sumbu-x diberikan oleh

  $$\psi \;\rightarrow\; \psi' = S\psi\ ,$$

  disini S adalah sebuah matriks 4 x 4,

$$S = a_+ + a_- \gamma^0 \gamma^1 = \begin{bmatrix} a_+ & a_- \sigma_1 \\ a_- \sigma_1 & a_+ \end{bmatrix},$$

dimana

$$a_+ = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma + 1)}, \quad a_- = -\sqrt{\tfrac{1}{2}(\gamma - 1)},$$

Ada 16 hasil kali dengan bentuk $\psi_i^* \psi_j$ karena *i* dan *j* berjalan dari 1 sampai 4. Ragam kombinasi linier untuk membangun kuantitas-kuantitas dengan perilaku transformasi yang berbeda dapat dirangkum sebagai berikut:

(i) $\bar{\psi}\psi = skalar$ $(1\ komponen)$

(ii) $\bar{\psi}\gamma^5\psi = pseudoskalar$ $(1\ komponen)$

(iii) $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = vektor$ $(4\ komponen)$

(iv) $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = pseudovektor$ $(4\ komponen)$

(iv) $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi = tensor\ antisimetrik$ $(6\ komponen)$

dimana

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right).$$

- Persamaan Euler-Lagrange relativistik dituliskan:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi_\alpha)} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi_\alpha}$$

Lagrangian dari sebuah medan medan skalar riil $\phi(x)$

$$L = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2.$$

Lagrangian dari sebuah medan spinor ψ

$$L = \bar{\psi}\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi.$$

Lagrangian dari sebuah medan vektor A_μ,

$$\begin{aligned} L &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu - \frac{\lambda}{2}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}A^\mu\left[\left(\partial^2 + m^2\right)g_{\mu\nu} - (1-\lambda)\partial_\mu\partial_\nu\right]A^\nu \end{aligned}$$

Dengan mengetahui bentuk Lagrange dari suatu medan maka akan didapat persamaan gerak dari medan-medan tersebut

Soal-soal Latihan

1. Tunjukan bahwa $\partial\phi/\partial x^{\mu}$ adalah 4-vektor kovarian (ϕ adalah sebuah fungsi skalar dari x, y, z dan t)!
2. Tunjukan bahwa persamaan (4.23) memenuhi persamaan (4.26)!
3. Buktikan persamaan (4.69)!
4. (a) Tunjukan bahwa syarat normalisasi yang diberikan dalam contoh 4, dinyatakan dalam spinor adjoint menjadi $\bar{u}u = -\bar{v}v = 2m$!

   (b) Carilah konstanta normalisasi N dengan menggunakan persamaan-persamaan (4.64) jika syarat normalisasi untuk spinor diberikan oleh $u^{\dagger}u = 1$!
5. Turunkankan persamaan (4.64) dan (4.65)!
6. Jika $u^{(1)}$ dan $u^{(2)}$ diberikan oleh persamaan (4.64) dan $v^{(1)}$ dan $v^{(2)}$ diberikan oleh persamaan (4.66). Buktikan bahwa

   (a) $\sum_{s=1,2} u^{(s)}\bar{u}^{(s)} = \left(\gamma^{\mu} p_{\mu} + m\right)$

   (b) $\sum_{s=1,2} v^{(s)}\bar{v}^{(s)} = \left(\gamma^{\mu} p_{\mu} - m\right)$
7. Apakah persamaan-persamaan (4.95) invarian terhadap persamaan (4.85)!
8. Peroleh persamaan (4.101) dari persamaan (4.100)!
9. Apakah Lagrangian (4.131) invarian terhadap transformasi $\phi \quad \rightarrow \quad \phi' = e^{i\theta}\,\phi$!
10. Dengan menggunakan persamaan Euler-Lagrange, turunkan persamaan (4.142)!