5 Grup, Simetri dan Hukum Kekekalan

Setelah mempelajari bab 5, mahasiswa diharapkan dapat:

1. Mendefinisikan grup
2. Memahami operasi-operasi grup
3. Memahami sifat-sifat grup uniter U(N) dan SU(N)
4. Memahami diagram bobot quark dan anti quark
5. Memahami diagram bobot Meson
6. Memahami diagram bobot Baryon
7. Menurunkan fungsi keadaan Meson dan Baryon
8. Memahami konsep invarian, simetri dan kekekalan
9. Memahami simetri ruang-waktu
10. Memahami simetri internal
11. Memahami kekekalan muatan warna

Perumusan Lagrange yang telah kita pelajari dalam bab 4 memegang peranan yang sangat penting dalam memahami interaksi dan simetri. Interaksi antar partikel fundamental diatur oleh prinsip simetri. Melalui prinsip simetri kita dapat memperoleh hukum-hukum kekekalan, seperti kekakalan energi, kekakalan muatan, kekakalan momentum, kekekalan warna dan lain-lain. Prinsip simetri gauge (lokal) khususnya, mengatur interaksi partikel, terkait dengan kuantitas fisis yang kekal dalam daerah lokal dari ruang. Hubungan antara simetri dan hukum kekekalan dijelaskan melalui teorema Noether dengan perumusan Lagrange untuk teori medan[1]. Untuk mempertahankan simetri lokal Lagrangian suatu sistem, diperlukan suatu medan gauge dalam mana interaksinya dengan medan materi dikendalikan secara unik.

Di dalam bab ini, kita akan mempelajari hal tersebut di atas yaitu simetri dan hukum kekekalan. Namum sebelum kita membahas hal ini terlebih dahulu akan kita pelajari diskripsi matematis dari simetri melalui teori grup. Ada 4 grup yang berperan penting dalam fisika partikel yaitu:

---

[1] Secara detil hubungan antara simetri dan hukum kekekalan dijelaskan pada bab 3 Ref. 4.

- Grup uniter N-dimensi (*N-dimensional unitary group*), U(N), adalah grup dari transformasi-transformasi

$$\phi_i \quad \to \quad \phi_i' = U_i^j \phi_i, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N, \qquad U^\dagger U = 1$$

- Grup uniter khusus N-dimensi (*N-dimensional special unitary group*), SU(N), adalah grup uniter N-dimensi U(N) dengan syarat tambahan, $\det U = 1$.
- Grup ortogonal N-dimensi (*N-dimensional orthogonal group*), O(N), adalah grup dari transformasi-transformasi yang membuat $\sum_{i=1}^{N} x_i^2$ invarian dan $O^T O = 1$.
- Grup ortogonal khusus N-dimensi (*N-dimensional special orthogonal group*), SO(N) adalah grup ortogonal N-dimensi O(N) dengan syarat tambahan $\det O = 1$.

5.1. Grup

5.1.1. Definisi Grup

Himpunan dari elemen-elemen *A*, *B*, *C*, … dikatakan membentuk sebuah grup *G* jika elemen-elemen dari grup memenuhi 4 kaidah berikut:

1. **Identitas.** Dari sekumpulan elemen-elemen tersebut ada sebuah elemen *I* yang dinamakan *elemen identitas* (atau *elemen satuan*), sedemikian sehingga untuk setiap elemen *A* memenuhi

$$A \circ I = I \circ A = A. \tag{5.1}$$

2. **Tertutup** (*closure*). Di dalam sebuah grup, hasil kali grup dari dua buah elemen grup menghasilkan sebuah elemen grup yang juga merupakan elemen dari grup.

$$\begin{aligned} &A, B, C \in G \\ &A \circ B = C \in G \end{aligned}. \tag{5.2}$$

3. ***Inverse***. Untuk setiap elemen *A* dari grup, ada sebuah elemen inverse A^{-1} sedemikian sehingga memenuhi hubungan berikut

$$A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = I. \tag{5.3}$$

4. **Asosiatif**. Jika ada tiga buah atau lebih elemen-elemen grup memenuhi sebuah perkalian grup maka perkalian grupnya memenuhi hubungan berikut

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C \,. \tag{5.4}$$

Tanda "$\circ$" adalah *perkalian grup*, secara umum bukan perkalian biasa.

Sebuah grup adalah *grup berhingga* (*finite group*), *grup takberhingga* (*infinite group*) dan *grup kontinu* (*continuous group*) jika kumpulan dari elemen-elemen grupnya berturut-turut *berhingga*, *tak berhingga* dan *kontinu*. *Orde* dari grup ditentukan oleh jumlah elemen dari grup.

Contoh 5.1.

Tunjau sebuah himpunan $\{-1,0,1\}$. Terhadap penjumlahan biasa, buktikan bahwa himpunan tersebut memenuhi kaidah grup.

Jawab:

- *Identitas*. Elemen identitasnya adalah 0, karena

$$0+1=1\,, \qquad 0+(-1)=(-1)\,, \qquad 0+0=0$$

- *Tertutup*. Penjumlahan dari elemen-elemen grup adalah elemen dari grup, yaitu

$$(-1)+0=-1, \quad -1\in\{-1,0,1\}$$

$$(-1)+1=0, \quad 0\in\{-1,0,1\}$$

$$0+1=0, \quad 1\in\{-1,0,1\}$$

- *Inverse*. Setiap elemen grup memiliki inverse yaitu

Inverse dari 1 adalah – 1 , $-1\in\{-1,0,1\}$,

Inverse dari 0 adalah – 0 = 0 , $0\in\{-1,0,1\}$,

Inverse dari – 1 adalah 1 , $1\in\{-1,0,1\}$,

- *Asosiatif*. Penjumlahan adalah asosiatif,

$$(1+0)+(-1)=1+(0+(-1))=0\,.$$

Grup ini adalah grup orde-3.

5.1.2. Representasi matriks dari grup

(A) Perkalian langsung (*Direct product*)

Jika S adalah sebuah representasi yang memiliki dimensi 2 (matriks 2 x 2), dan T adalah juga sebuah representasi yang memiliki *dimensi* 2 (matriks 2 x 2), dimensi S dan T keduanya tidak harus sama,

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}, \tag{5.5}$$

maka *perkalian langsung* dari keduanya menghasilkan matriks baru P yaitu

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} & S_{12}\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \\ S_{21}\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} & S_{22}\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S_{11}T_{11} & S_{11}T_{12} & S_{12}T_{11} & S_{12}T_{12} \\ S_{11}T_{21} & S_{11}T_{22} & S_{12}T_{21} & S_{12}T_{22} \\ S_{21}T_{11} & S_{21}T_{12} & S_{22}T_{11} & S_{22}T_{12} \\ S_{21}T_{21} & S_{21}T_{22} & S_{22}T_{21} & S_{22}T_{22} \end{bmatrix} \equiv P_{4\times 4} \tag{5.6}$$

Perkalian langsungnya dinyatakan secara simbolik dengan

$$P = S \otimes T\,. \tag{5.7}$$

(B) Jumlah langsung (*Direct sum*)

Jika S adalah sebuah representasi yang memiliki dimensi 2 (matriks 2 x 2), dan T adalah juga sebuah representasi yang memiliki dimensi 2 (matriks 2 x 2), maka jumlah langsung dari keduanya adalah

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} + \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} & S_{12} + \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \\ S_{21} + \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} & S_{22} + \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} S_{11}+T_{11} & S_{11}+T_{12} & S_{12}+T_{11} & S_{12}+T_{12} \\ S_{11}+T_{21} & S_{11}+T_{22} & S_{12}+T_{21} & S_{12}+T_{22} \\ S_{21}+T_{11} & S_{21}+T_{12} & S_{22}+T_{11} & S_{22}+T_{12} \\ S_{21}+T_{21} & S_{21}+T_{22} & S_{22}+T_{21} & S_{22}+T_{22} \end{bmatrix} \equiv P_{4\times 4}. \qquad (5.8)$$

Jumlah langsung dari dua grup dinyatakan dengan simbol

$$P = S \oplus T\ . \qquad (5.9)$$

Karena itu, sebuah representasi dapat diperoleh dengan menambahhkan dua buah representasi secara langsung. Dengan cara lain, misalkan P adalah sebuah representasi yang memiliki dimensi s + t. Asumsikan bahwa untuk setiap $x \in G$, matriks P(x) memiliki bentuk

$$P(x) = \begin{bmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & B(x) \end{bmatrix}, \qquad (x \in G)\,. \qquad (5.10)$$

Jelaslah disini, *A* adalah matriks s x s, *B* adalah matriks t x t dan **0** adalah matriks s x t.dan t x s. Definisikan matriks S dan T sebagai berikut:

$$S(x) \equiv A(x), \qquad T(x) \equiv B(x), \qquad \forall x \in G\,. \qquad (5.11)$$

Dengan menggunakan sifat-sifat grup $P(x,y) = P(x)P(y)$, maka

$$\begin{aligned} P(x,y) = \begin{bmatrix} A(x,y) & 0 \\ 0 & B(x,y) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A(x) & 0 \\ 0 & B(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A(y) & 0 \\ 0 & B(y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A(x)A(y) & 0 \\ 0 & B(x)B(y) \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (5.12)$$

Karena $S(x,y) = S(x)S(y)$ dan $T(x,y) = T(x)T(y)$ maka S dan T adalah dua buah representasi. Suatu representasi matriks P dikatakan *representasi tereduksi* (*reducible representation*) jika representasi tersebut ekuivalen dengan bentuk matriks

$$P(x) = \begin{bmatrix} A(x)_{s\times s} & 0_{s\times t} \\ E(x)_{t\times s} & B(x)_{t\times t} \end{bmatrix}, \qquad (x \in G)\,. \qquad (5.13)$$

Dan dikatakan *representasi tereduksi penuh* (*fully reducible representation*) jika $E(x) = 0$. Jika representasinya tidak memenuhi kedua hal di atas maka dikatakan *representasi tak tereduksi* (*irreducible representation*).

5.2. Grup Uniter U(N)

Tinjau sebuah vektor ϕ_i (i = 1, 2, ..., N) dalam ruang vektor N-dimensi. Sebuah transformasi sembarang dalam ruang vektor ini diberikan oleh

$$\phi_i \quad \rightarrow \quad \phi_i' = A_i^j \phi_i, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N\,, \tag{5.14}$$

dimana A_i^j adalah matriks N x N. Maka grup uniter (*unitary group*) U(N) dalam N-dimensi adalah grup yang memenuhi transformasi-transformasi persamaan (5.14) dengan syarat uniternya adalah

$$A_i^{*k} A_j^k = \left(A^\dagger\right)_k^i A_j^k = \delta_i^j \text{, atau} \quad A^\dagger A = 1 \tag{5.15}$$

Sedangkan grup uniter khusus (*special unitary group*) N-dimensi, SU(N), adalah grup uniter U(N) dengan determinan dari matriks A_i^j sama dengan satu,

$$\det A = 1\,. \tag{5.16}$$

Berikut ini akan dipelajari sifat-sifat generator dari grup uniter di atas. Transformasi infinitesimal dari vektor ϕ_i dinyatakan oleh

$$\phi_i' = \left[\delta_i^j + \varepsilon_i^j\right]\phi_j\,, \tag{5.17}$$

dimana ε adalah parameter infinitesimal. Dengan menerapkan persamaan (5.15) dan persamaan (5.16) parameter infinitesimal ε memenuhi hubungan berikut

$$\varepsilon_i^{*j} = -\varepsilon_i^j\,, \qquad \varepsilon_i^i = 0\,, \tag{5.18}$$

Dengan demikian transformasi uniter dari grup U(N) yang berhubungan dengan persamaan (5.15) diberikan oleh

$$U(a) = 1 - \varepsilon_i^j\, G_j^i + O(\varepsilon^2)\,. \tag{5.19}$$

Disini G_j^i dinamakan generator dari grup uniter U(N). Sedangkan U(a) adalah matriks uniter N x N dengan elemen-elemen kompleks dan membentuk representasi dari grup uniter U(N). Karena setiap kuantitas kompleks mengandung dua kuantitas riil maka untuk grup uniter U(N) ada N^2 parameter riil sembarang sehingga ada N^2 generator dari grup U(N). Maka untuk U(1), jumlah generatornya adalah satu buah generator grupnya, N = 1. Untuk grup uniter khusus SU(N) yang dibatasi oleh syarat determinan sama dengan satu, maka ada (N^2 – 1) generator grupnya. Matriks U(a) kemudian memenuhi sifat-sifat grup sebagai berikut

$$U(a)\,U(b) = U(c)\,, \tag{5.20a}$$

$$U(a) = U(a)\,U(1), \qquad U(1) = 1\,, \tag{5.20b}$$

$$U^{-1}(a)\,U(b)\,U(a) = U(a^{-1}ba)\,, \tag{5.20c}$$

$$U^{\dagger}(a)\;U(a) = 1\,. \tag{20d}$$

Dengan menggunakan syarat persamaan (5.20d), untuk persamaan (5.19) dan dengan menerapkan syarat pameter infinitesimal persamaan (5.18), generator dari grup uniter U(N) menghasilkan hubungan

$$\left(G^i_j\right)^{\dagger} = G^j_i\,. \tag{5.21}$$

Selanjutnya, hubungan komutasi dari generator grup uniter ini dapat diperoleh dengan menggunakan sifat-sifat grup persamaan (5.20c) yaitu

$$\left[G^j_i, G^l_k\right] = \delta^j_k G^l_i - \delta^l_i G^j_k\,. \tag{5.22}$$

Transformasi uniter untuk persamaan (5.17) adalah

$$\begin{aligned} \phi'_k = U^{-1}(a)\phi_k U(a) &= \left(1 + \varepsilon^j_i\, G^i_j\right)\phi_k \left(1 - \varepsilon^j_i\, G^i_j\right) \\ &= \phi_k + \varepsilon^j_i\left[G^i_j \phi_k - \phi_k\, G^i_j\right] \\ &= \phi_k + \varepsilon^j_i\left[G^i_j, \phi_k\right]. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Disamping itu dapat pula dituliskan transformasi dari sebuah vektor ϕ_k yang menghasilkan representasi N dari grup uniter U(N) untuk representasi fundamental ϕ_k dengan cara sebagai berikut

$$\phi_k \quad \rightarrow \quad \phi'_k = U^l_k \phi_l = \left(\delta^l_k + \varepsilon^j_i \left(M^i_j\right)^l_k\right)\phi_l\,. \tag{5.23}$$

Disini M^i_j adalah sebuah matriks dari reprpresentasi fundamental tersebut, tentunya memenuhi sifat uniter

$$\left(M^i_j\right)^{\dagger} = M^j_i\,. \tag{5.24}$$

Bandingkan persamaan (5.24) dengan persamaan (5.17) maka diperoleh

$$\left(M^i_j\right)^l_k = \delta^i_k \delta^l_j\,. \tag{5.25}$$

Sehingga hubungan komutasi pada suku kedua ruas kanan persamaan (5.23) menjadi

$$\left[G^i_j , \phi_k \right] = \left(M^i_j \right)^l_k \phi_l = \delta^i_k \delta^l_j \phi_l = \delta^i_k \phi_j . \quad (5.26)$$

Sekarang kita pelajari representasi bagian konjugat dari medan vektor ϕ_i yang memiliki representasi $\bar{N}$ dari grup uniter U(N). Untuk itu definisikan telebih dahulu konjugat dari medan vektor ϕ_i:

$$\phi^i = \phi_i^* . \quad (5.27)$$

Dengan transformasi infinitesimalnya adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} \phi^i \quad \rightarrow \quad \phi'^i = \phi_i'^* &= \left(\delta_i^j - \varepsilon_i^{*j} \right) \phi_j'^* \\ &= \left(\delta^i_j - \varepsilon^i_j \right) \phi^j \end{aligned} . \quad (5.28)$$

Sehingga hubungan komutasi dengan generator grup uniter menjadi

$$\left[G^i_j , \phi^k \right] = -\delta^k_j \phi^i . \quad (5.29)$$

Selanjutnya tinjau sebuah tensor campuran rank-2, T^k_l, yang bertransformasi sebagai perkalian dari dua buah vektor $\phi^k \phi_l$ maka akan diperoleh

$$\left[G^i_j , T^k_l \right] = \delta^i_l T^k_j - \delta^k_j T^i_l . \quad (5.30)$$

Dapat dilihat bahwa tensor campuran rank-2, T^k_l, bertransformasi dengan cara yang serupa seperti generator G^i_j.

5.2.1. Grup Uniter Khusus SU(N)

Sekarang kita batasi pada grup uniter khusus N-dimensi SU(N). Grup uniter khusus N-dimensi SU(N) adalah grup uniter N-dimensi U(N) dengan syarat determinan dari matriks uniternya sama dengan satu, yaitu U =1. Grup ini memiliki (N^2 – 1) generator. Kita definisikan generator dari grup uniter N-dimensi, F^i_j, sebagai berikut

$$F^i_j = G^i_j - \frac{1}{N} \delta^i_J G^k_k . \quad (5.31)$$

Sedemikian sehingga

$$\begin{aligned} &U(a) = 1 - \varepsilon_j^i F_i^j \\ &\left(F_j^i\right)^\dagger = F_i^j \qquad . \\ &F_i^i = 0 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Hubungan komutasi untuk F_j^i tetap sama seperti persamaan (5.22)

$$\left[F_i^{\ j}, F_k^{\ l}\right] = \delta_k^j F_i^{\ l} - \delta_i^l F_k^{\ j} . \tag{5.33}$$

Sifat *tracelees* (penjumlahan pada komponen-komponen diagonalnya sama dengan nol) dari generator grup uniter khusus N-dimensi SU(N), $F_i^i = 0$, juga mensyaratkan bahwa matriks $M_{\ j}^{i}$ juga harus tracelees

$$\left(M_{\ j}^{i}\right)_l^k = \delta_l^i \delta_j^k - \frac{1}{N}\delta_J^i \delta_l^k . \tag{5.34}$$

Terhadap generator F_j^i, vektor ϕ_i dan konjugatnya akan memenuhi hubungan komutasi sebagai berikut

$$\left[F_j^i, \phi_k\ \right] = \delta_k^i \phi_j - \frac{1}{N}\delta_j^i \phi_k . \tag{5.35a}$$

$$\left[F_j^i, \phi^k\ \right] = -\delta_j^k \phi^i + \frac{1}{N}\delta_j^i \phi^k . \tag{5.35b}$$

5.2.1.a. Grup Uniter Khusus SU(3)

Untuk grup uniter khusus 3-dimensi (N = 3) maka indeks i = 1, 2, 3 dan jumlah generatornya adalah $3^2 - 1 = 8$ buah generator. Kita dapat menyatakan delapan buah generator F_j^i, dalam ungkapan operator-operator hermitian F_A (A = 1, 2 ...8) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} &F_2^1 = F_1 - iF_2, \quad F_1^2 = F_1 + iF_2, \quad \frac{1}{2}\left(F_1^1 - F_2^2\right) = F_3, \quad F_3^1 = F_4 - iF_5, \\ &F_1^3 = F_4 + iF_5, \quad F_3^2 = F_6 - iF_7, \quad F_2^3 = F_6 + iF_7, \quad F_3^3 = -\frac{2}{\sqrt{3}}F_8. \end{aligned} \tag{5.36}$$

Dari hubungan komutasi (5.33) dapat ditunjukan bahwa operator hermitian F_A memenuhi hubungan komutasi dari sebuah grup Lie:

$$\begin{aligned}[F_A, F_B] &= C_{AB}^{C} F_C \\ &= i\, f_{ABC}\, F_C\end{aligned} . \tag{5.37}$$

Disini konstanta struktur f_{ABC} adalah riil dan antisimetrik. Selanjutnya operator hermitian F_A juga memenuhi identitas Jacobi,

$$\left[F_A,[F_B,F_C]\right]+\left[F_B,[F_C,F_A]\right]+\left[F_C,[F_A,F_B]\right]=0 . \tag{5.38}$$

Transformasi infinitesimal yang dihasilkan oleh generator F_A adalah sebagai berikut

$$U = 1 - i\,\varepsilon_A\, F_A . \tag{5.39}$$

Disini ε_A adalah parameter riil infinitesimal. Transformasi infinitesimal dari vektor ϕ_i dan ϕ^i kemudian diberikan oleh

$$\begin{aligned}\phi_i \quad \rightarrow \quad \phi_i' &= U_i^{\,j}\phi_j \\ &= \left[\delta_i^j + \frac{i}{2}\varepsilon_A \left(\lambda_A\right)_i^{\,j}\right]\phi_j\end{aligned} , \tag{5.40a}$$

$$\begin{aligned}\phi^i \quad \rightarrow \quad \phi'^i &= U_i^{*j}\phi^j \\ &= \left[\delta_j^i - \frac{i}{2}\varepsilon_A \left(\lambda_A\right)_j^{\,i}\right]\phi^j\end{aligned} . \tag{5.40b}$$

Disini kita telah memperkenalkan sebuah matriks hermitian λ_A yang memberikan representasi grup SU(3) untuk representasi dari vector ϕ_i dan ϕ^i. Matriks hermitian λ_A dihubungkan dengan matriks $M_i^{\,j}$ sebagai berikut (analog dengan persamaan (5.36) dengan mengambil $F_A = \lambda_A / 2$:

$$\begin{aligned}&M_2^1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - i\lambda_2), \quad M_1^2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2), \quad M_1^1 - M_2^2 = \lambda_3, \quad M_3^1 = \frac{1}{2}(\lambda_4 - i\lambda_5), \\ &M_1^3 = \frac{1}{2}(\lambda_4 + i\lambda_5), \quad M_3^2 = \frac{1}{2}(\lambda_6 - i\lambda_7), \quad M_2^3 = \frac{1}{2}(\lambda_6 + i\lambda_7), \quad M_3^3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8.\end{aligned} \tag{5.41}$$

Selanjutnya dengan mengambil N = 3 untuk SU(3) maka persamaan (5.34) menjadi

$$\left(M_i^{\,j}\right)_l^k = \delta_l^j \delta_i^k - \frac{1}{3}\delta_i^j \delta_l^k . \tag{5.42}$$

Dengan menggunakan hubungan ini maka dapat diperoleh matriks 3 x 3, λ_A, secara eksplisit. Lihat contoh dibawah ini.

Contoh 5.2.

Carilah elemen-elemen matriks dari λ_A untuk SU(3).

Jawab:

Disini kita tidak akan menghitung seluruh matriks tersebut. Misalnya kita hitung untuk λ_3 dan λ_7. Dengan menngunakan persamaan (5.42) maka diperoleh

$$\left(M_1^1\right)_l^k = \delta_l^1\delta_1^k - \frac{1}{3}\delta_1^1\delta_l^k$$

Elemen-elemen matriks dari M_1^1 adalah

$$\left(M_1^1\right)_1^1 = \delta_1^1\delta_1^1 - \frac{1}{3}\delta_1^1\delta_1^1 = \frac{2}{3}.$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\left(M_1^1\right)_2^2 = \left(M_1^1\right)_3^3 = -\frac{1}{3}, \qquad \left(M_1^1\right)_1^2 = \left(M_1^1\right)_1^3 = \left(M_1^1\right)_2^1 = \left(M_1^1\right)_2^3 = \left(M_1^1\right)_3^1 = \left(M_1^1\right)_3^2 = 0$$

Maka matriks M_1^1 adalah

$$\left(M_1^1\right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Elemen-elemen matriks dari M_2^2 adalah : $\left(M_2^2\right)_l^k = \delta_l^2\delta_2^k - \frac{1}{3}\delta_l^k$

$$\left(M_2^2\right)_1^1 = \left(M_2^2\right)_3^3 = -\frac{1}{3}, \; \left(M_2^2\right)_2^2 = \frac{2}{3}, \quad \left(M_2^2\right)_1^2 = \left(M_2^2\right)_1^3 = \left(M_2^2\right)_2^1 = \left(M_2^2\right)_2^3 = \left(M_2^2\right)_3^1 = 0$$

Sehingga

$$\left(M_2^2\right)=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Untuk memperoleh λ_3 kita gunakan hubungan $\left(M_1^1\right)-\left(M_2^2\right)=\lambda_3$, diperoleh

$$\lambda_3=\left(M_1^1\right)-\left(M_2^2\right)=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Untuk mencari elemen-elemen matriks λ_7 digunakan hubungan

$$M_3^2=\frac{1}{2}(\lambda_6-i\lambda_7),\qquad M_2^3=\frac{1}{2}(\lambda_6+i\lambda_7)$$

Dari kedua persamaan ini maka

$$\lambda_7=i\left[\left(M_3^2\right)-\left(M_3^2\right)\right]$$

Dimana $\left(M_3^2\right)_l^k=\delta_l^2\delta_3^k$ dan $\left(M_2^3\right)_l^k=\delta_l^3\delta_2^k$. Dengan menggunakan hubungan ini diperoleh

$$\left(M_3^2\right)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\qquad \left(M_2^3\right)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\lambda_7=i\left[\left(M_3^2\right)-\left(M_3^2\right)\right]=i\left\{\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{bmatrix}$$

Dengan cara yang sama seperti contoh di atas maka akan diperoleh delapan buah matriks Gell-Mann, λ_A,

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \qquad (5.43)$$

Matriks-matriks Gell-Mann adalah *traceless* dan memenuhi sifat-sifat sebagai berikut

- $$\left[\frac{\lambda_A}{2}, \frac{\lambda_B}{2}\right] = i\ f_{ABC} \lambda_C, \qquad (5.44a)$$
- $$Tr\left(\lambda_A \lambda_B\right) = 2\delta_{AB}, \qquad (5.44b)$$
- $$\left\{\lambda_A, \lambda_B\right\} = 2\ d_{ABC}\ \lambda_C + \frac{4}{3}\delta_{AB}. \qquad (5.44c)$$

Dalam persamaan di atas penjumlahan pada C adalah dari 1 sampai 8. Kuantitas if_{ABC} dinamakan konstanta struktur dari grup dan antisimetrik pada pertukaran indeksnya. Sedangkan d_{ABC} adalah riil dan simetrik. Dengan mendefinisikan $\lambda_0 = \sqrt{2/3}I$, dengan I adalah matriks satuan 3 x 3, maka persamaan di atas dapat ditulis kembali sebagai berikut:

- $$\left[\frac{\lambda_A}{2}, \frac{\lambda_B}{2}\right] = i\ f_{ABC} \lambda_C, \qquad (5.45a)$$
- $$Tr\left(\lambda_A \lambda_B\right) = 2\delta_{AB}, \qquad (5.45b)$$
- $$\left\{\lambda_A, \lambda_B\right\} = 2\ d_{ABC}\ \lambda_C, \qquad (5.45c)$$
- $d_{0BC} = \sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{BC}, \quad f_{0BC} = 0,$ dimana $A, B, C = 0, 1, ..., 8$. (5.45d)

Tabel 5.1. Nilai dari f_{ABC} dan d_{ABC}

ABC	f_{ABC}	ABC	d_{ABC}
123	1	118	$1/\sqrt{3}$
147	1/2	146	1/2
156	-1/2	157	1/2
246	1/2	228	$1/\sqrt{3}$
257	1/2	247	-1/2
347	1/2	256	1/2
367	-1/2	338	$1/\sqrt{3}$
458	$\sqrt{3}/2$	344	1/2
678	$\sqrt{3}/2$	355	1/2
		366	-1/2
		377	-1/2
		448	$-1/\left(2\sqrt{3}\right)$
		558	$-1/\left(2\sqrt{3}\right)$
		668	$-1/\left(2\sqrt{3}\right)$
		778	$-1/\left(2\sqrt{3}\right)$
		888	$-1/\sqrt{3}$
		d_{0AB}	$\sqrt{2/3}\delta_{AB}$

Matriks λ_1, λ_3, λ_4, λ_6 dan λ_8 adalah matriks-matriks simetrik sedangkan λ_2, λ_5 dan λ_7 adalah matriks-matriks antisimetrik sehingga dapat diyatakan secara ringkas sebagai berikut

$$\lambda_A^T = \eta_A \lambda_A \text{, (tidak ada penjumlahan),} \tag{5.46}$$

dengan $\eta_A = +1$ untuk A = 0, 1, 3, 4, 6, 8 dan $\eta_A = -1$ untuk A = 2, 5, 7. Dari persamaan (5.45d) dan (5.46) dapat diperoleh identitas:

$$\eta_A \eta_B \eta_C f_{ABC} = -f_{ABC}, \tag{5.47a}$$

$$\eta_A \eta_B \eta_C d_{ABC} = d_{ABC}. \tag{5.47b}$$

Nilai-nilai dari f_{ABC} dan d_{ABC} diberikan oleh Tabel 5.1. Misalkan kita definisikan matriks-matriks hermitian baru sebagai berikut

$$\begin{array}{l} T_\pm \equiv \frac{1}{2}(\lambda_1 \pm i\lambda_2), \quad T_z \equiv \frac{1}{2}\lambda_3, \quad V_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_4 \pm i\lambda_5), \\ U_\pm = \frac{1}{2}(\lambda_6 \pm i\lambda_7), \quad Y = \frac{1}{\sqrt{3}}\lambda_8 \end{array}. \tag{5.48}$$

Maka dapat diturunkan hubungan komutasi generator grup SU(3) seperti diberikan pada Tabel 5.2.

Tabel 5.2. Hubungan komutasi generator grup SU(3)

$[A,B]$	T_+	T_-	T_z	U_+	U_-	V_+	V_-	Y
T_+	0	$2T_z$	$-T_+$	V_+	0	0	$-U_-$	0
T_-	$-2T_z$	0	T_-	0	$-V_-$	U_+	0	0
T_z	T_+	$-T_-$	0	$-\frac{1}{2}U_+$	$\frac{1}{2}U_-$	$\frac{1}{2}V_+$	$-\frac{1}{2}V_-$	0
U_+	$-V_+$	0	$\frac{1}{2}U_+$	0	$\frac{2}{3}Y - t_z$	0	T_-	$-U_+$
U_-	0	V_-	$-\frac{1}{2}U_-$	$-\frac{2}{3}Y + t_z$	0	$-T_-$	0	U_-
V_+	0	U_+	$-\frac{1}{2}V_+$	0	T_-	0	$\frac{2}{3}Y + t_z$	$-V_+$
V_-	U_-	0	$\frac{1}{2}V_-$	$-T_-$	0	$-\frac{2}{3}Y - t_z$	0	V_-
Y	0	0	0	U_+	$-U_-$	V_+	$-V_-$	0

5.2.1.b. Grup Uniter Khusus SU(2)

Untuk grup uniter khusus 2-dimensi (N = 3) maka indeks i = 1, 2 dan jumlah generatornya adalah $2^2 - 1 = 3$ buah generator. Kita dapat menyatakan tiga buah generator, dalam ungkapan operator-operator hermitian F_A (A = 1, 2 ...8) yang didefinisikan sebagai berikut:

$$F_2^1 = F_1 - iF_2, \quad F_1^2 = F_1 + iF_2, \quad \frac{1}{2}\left(F_1^1 - F_2^2\right) = F_3. \tag{5.49}$$

Hubungan komutasi dari ketiga generator sekarang diberikan oleh

$$[F_A, F_B] = i\ F_C\ . \tag{5.50}$$

Dengan cara yang sama seperti pasal sebelumnya dengan N = 2, maka untuk SU(2) kita memiliki persamaan

$$\left(M_i^{\ j}\right)_l^k = \delta_l^j \delta_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^j \delta_l^k\ , \tag{5.51}$$

dimana generator yang baru diberikan oleh

$$M_2^1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - i\lambda_2), \qquad M_1^2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + i\lambda_2), \qquad M_1^1 - M_2^2 = \lambda_3\ . \tag{5.52}$$

Sehingga ketiga buah generator untuk SU(2) diperoleh (lihat contoh 5.2 untuk memperolehnya)

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \sigma_1\,, \qquad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \equiv \sigma_2\,, \qquad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \equiv \sigma_3\,. \tag{5.53}$$

Bila kita ingat kembali, bahwa matriks-matriks *traceless* di atas adalah matriks-matriks Pauli. Jadi matriks-matriks Pauli membentuk representasi SU(2). Hubungan komutasinya diberikan oleh

$$\left[\frac{\lambda_A}{2}, \frac{\lambda_B}{2}\right] = i\ \frac{\lambda_C}{2}, \qquad A = 1,2,3\ . \tag{5.54}$$

Ini berarti bahwa simetri SU(2) adalah simetri rotasi dan besaran yang kekal adalah besaran vektor sama seperti momentum sudut, $[J_1, J_2] = i\ J_3$, sehingga berhubungan dengan *isospin*.

Matriks uniter 2 x 2 dari representasi SU(2) memiliki determinan sama dengan satu dan dapat dinyatakan dalam bentuk

$$M = \exp\left(i\frac{\lambda_A}{2}.\theta_A\right). \tag{5.55}$$

Disini $\theta_A = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ adalah tiga buah parameter sembarang. Sehingga grup SU(2) sama seperti grup rotasi O(3), grup matriks ortogonal dalam 3 dimensi dan θ_A adalah sudut rotasi dalam ruang *isospin.*

Contoh 5.3.

Carilah bentuk matriks umum dari grup SU(2)!

Jawab:

Untuk grup SU(2) maka kita memiliki matriks 2 x 2. Secara umum matriks ini dapat dituliskan sebagai berikut

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

dimana *a*, *b*, *c*, *d* adalah elemen-elemen kompleks. Konjugat hermitian dari matriks di atas adalah

$$U^\dagger = \begin{bmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{bmatrix}$$

Sehingga

$$UU^\dagger = \begin{bmatrix} |a|^2 + |b|^2 & ac^* + bd^* \\ a^*c + b^*d & |c|^2 + |d|^2 \end{bmatrix}$$

Syarat uniter $UU^\dagger = 1$ menghasilkan

$$a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2 = 1$$

dan syarat determinan menghasilkan

$$ad - bc = 1$$

Selesaikan kedua persamaan di atas maka diperoleh

$$c = -b^*, \qquad d = a^*$$

Jadi bentuk umum dari matriks SU(2) adalah

$$U = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix}$$

5.2.2. Representasi Partikel dalam Flavor SU(3)

Sebagaimana kita telah menurunkan delapan generator tensor dari grup SU(3), ada himpunan dari generator tersebut mengandung generator-generator grup SU(2), yaitu operator-operator matriks Pauli, lihat persamaan (5.53) dan persamaan (5.43). Masing-masing memiliki komponen nol pada baris dan kolom ketiga. Dengan kata lain, didalam sebuah representasi SU(3) terdapat isospin. Selain itu, komponen ketiga dari isospin berhubungan dengan muatan listrik yang merupakan representasi dari U(1). Sehingga dalam bahasa matematis kita dapat menuliskan $SU(3) \supset SU(2) \times U(1) \supset SU(2)$. Sehingga untuk kasus SU(3), generator dari subgrup $SU(2) \times U(1)$ terkait dengan *isospin* dan *hypercharge* dan dapat diidentifikasi sebagai berikut

$$\text{Isospin}: \qquad I_+ = F_1^2, \quad I_- = F_2^1, \quad I_3 = \frac{1}{2}\left(F_1^1 - F_2^2\right), \tag{5.56a}$$

$$\text{Hypercharge}: Y = F_1^1 + F_2^2 = -F_3^3 . \tag{5.56b}$$

Jika muatan listrik didefinisikan oleh

$$Q = F_1^1 \qquad \textit{dalam } SU(3), \tag{5.57}$$

dan menghasilkan hubungan Gell-Mann-Nishijima

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2} . \tag{5.58}$$

Hypercharge Y yang didefinisikan di atas dapat tersusun dari *strangeness* S dan bilangan baryon B, $Y = B + S$.

Misalkan q_i adalah sebuah vektor (operator medan) yang dapat dinyatakan sebagai

$$q_i = \left(q_1, q_2, q_3\right) = \left(\bar{u}, \bar{d}, \bar{s}\right) \; : \; \mathbf{3} \tag{5.59}$$

Dimana q_i dapat menciptakan sebuah *u*-quark, *d*-quark dan *s*-quark dengan cara berikut

$$\bar{u}\left|0\right\rangle = u , \qquad \bar{d}\left|0\right\rangle = d , \qquad \bar{s}\left|0\right\rangle = s . \tag{5.60}$$

Kemudian operator medan q_i memiliki representasi yang diberikan oleh simbul **3** (angka 3 yang ditebalkan) dari SU(3). Sedangkan operator medan

$$q^i = q_i^* = \left(q^1, q^2, q^3\right) \equiv \left(u, d, s\right) \; : \; \bar{\mathbf{3}} , \tag{5.61}$$

memiliki representasi yang diberikan oleh simbul $\bar{\mathbf{3}}$ dari SU(3), yaitu representasi konjugat dari $\mathbf{3}$. Operator medan q^i mencitakan antiquark atau anihilasi quark. Dari persamaan (5.35) diperoleh

$$\left[F^i_j, q_k\right] = \delta^i_k q_j - \frac{1}{3}\delta^i_j q_k, \tag{5.62a}$$

$$\left[F^i_j, q^k\right] = -\delta^k_j q^i + \frac{1}{3}\delta^i_j q^k \;. \tag{5.62b}$$

Dalam notasi matriks, kita dapat menuliskan operator-operator medan q_i dan q^i sebagai matriks kolom dan matriks baris[2]:

$$q = \begin{bmatrix} u \\ d \\ s \end{bmatrix} \;:\; \mathbf{3} \text{ (quark)}, \qquad \bar{q} = \begin{bmatrix} \bar{u} & \bar{d} & \bar{s} \end{bmatrix} \;:\; \bar{\mathbf{3}} \text{ (antiquark)}, \tag{5.63}$$

yang memenuhi hubungan komutasi

$$[F_A, q] = -\frac{1}{2} q\lambda_A, \qquad [F_A, \bar{q}] = \frac{1}{2}\bar{q}\lambda_A . \tag{5.64}$$

Pasal berikut ini kita akan mempelajari representasi SU(3) yang dapat digambarkan dengan diagram bobot (*weight diagram*) dalam ruang *isospin-hypercharge*.

5.3. Diagram Bobot (*Weight Diagram*): Quark dan Anti-Quark

Kita sekarang membuat sebuah diagram masing-masing keadaan dari representasi triplet SU(3). Pertama kita akan menggambar representasi fundamental triplet **3**. Diagram ini dinamakan Diagram Bobot (*Weight Diagram*). Dengan menggunakan persamaan (5.62) maka diperoleh

$$\left[F^i_j, q_k\right]|0\rangle = \delta^i_k q_j|0\rangle - \frac{1}{3}\delta^i_j q_k|0\rangle . \tag{5.65}$$

Maka

$$\left[F^1_1, q_k\right]|0\rangle = \delta^1_k q_1|0\rangle - \frac{1}{3} q_k|0\rangle = \delta^1_k|u\rangle - \frac{1}{3} q_k|0\rangle . \tag{5.66}$$

sehingga

$$F^1_1|u\rangle = \frac{2}{3}|u\rangle, \qquad F^1_1|d\rangle = -\frac{1}{3}|d\rangle, \qquad F^1_1|s\rangle = -\frac{1}{3}|s\rangle . \tag{5.67}$$

Dengan cara yang sama pula,

[2] Disini kita akan menggunakan notasi indeks atas adalah indeks baris dan indeks bawah adalah indeks kolom.

$$F_2^2|u\rangle = -\frac{1}{3}|u\rangle, \qquad F_2^2|d\rangle = \frac{2}{3}|d\rangle, \qquad F_2^2|s\rangle = -\frac{1}{3}|s\rangle,$$
$$F_1^2|u\rangle = 0, \qquad F_1^2|d\rangle = |u\rangle, \qquad F_1^2|s\rangle = 0, \tag{5.68}$$
$$F_2^1|u\rangle = |d\rangle, \qquad F_2^1|d\rangle = 0, \qquad F_2^1|s\rangle = 0$$

Sedangkan F_3^3 dapat diperoleh dari F_1^1 dan F_2^2 :

$$F_3^3|u\rangle = -\left(F_1^1 + F_2^2\right)|u\rangle = -\left(\frac{2}{3}|u\rangle - \frac{1}{3}|u\rangle\right) = -\frac{1}{3}|u\rangle \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{1}{3}, \tag{5.69a}$$

$$F_3^3|d\rangle = -\left(F_1^1 + F_2^2\right)|d\rangle = -\left(-\frac{1}{3}|d\rangle + \frac{2}{3}|d\rangle\right) = -\frac{1}{3}|d\rangle \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{1}{3}, \tag{5.69b}$$

$$F_3^3|s\rangle = -\left(F_1^1 + F_2^2\right)|s\rangle = -\left(-\frac{1}{3}|s\rangle - \frac{1}{3}|s\rangle\right) = +\frac{2}{3}|s\rangle \quad \Rightarrow \quad Y = -\frac{2}{3}. \tag{5.69c}$$

Dengan menggunakan hubungan (5.68) diperoleh

$$I_3|u\rangle = \frac{1}{2}\left(F_1^1|u\rangle - F_2^2|u\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}|u\rangle + \frac{1}{3}|u\rangle\right) = \frac{1}{2}|u\rangle \quad \Rightarrow \quad I_3 = +\frac{1}{2}, \tag{5.70a}$$

$$I_3|d\rangle = \frac{1}{2}\left(F_1^1|d\rangle - F_2^2|d\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}|d\rangle - \frac{2}{3}|d\rangle\right) = -\frac{1}{2}|d\rangle \quad \Rightarrow \quad I_3 = -\frac{1}{2}, \tag{5.70b}$$

$$I_3|s\rangle = \frac{1}{2}\left(F_1^1|s\rangle - F_2^2|s\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}|s\rangle + \frac{1}{3}|s\rangle\right) = 0|s\rangle \quad \Rightarrow \quad I_3 = 0. \tag{5.70c}$$

Untuk muatan listrik:

$$Q|u\rangle = F_1^1|u\rangle = \frac{2}{3}|u\rangle \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{2}{3}, \tag{5.71a}$$

$$Q|d\rangle = F_1^1|d\rangle = -\frac{1}{3}|d\rangle \quad \Rightarrow \quad Q = -\frac{1}{3}, \tag{5.71b}$$

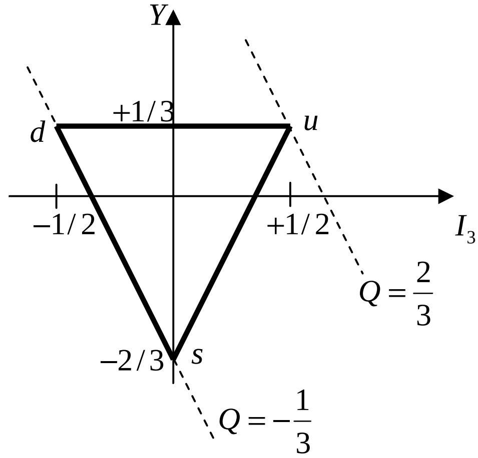
$$Q|s\rangle = F_1^1|s\rangle = -\frac{1}{3}|s\rangle \quad \Rightarrow \quad Q = -\frac{1}{3}. \tag{5.71c}$$

Dari perhitungan di atas dapat dibuat Tabel 5.3.

Tabel 5.3. Quark

q	B	I	I_3	Y	Q	S
u	1/3	1/2	+1/2	1/3	2/3	0
d	1/3	1/2	– 1/2	1/3	– 1/3	0
s	1/3	0	0	– 2/3	– 1/3	–1

Masing-masing keadaan dari representasi triplet diplot dalam sumbu $I – Y$ (Gambar 5.1.).



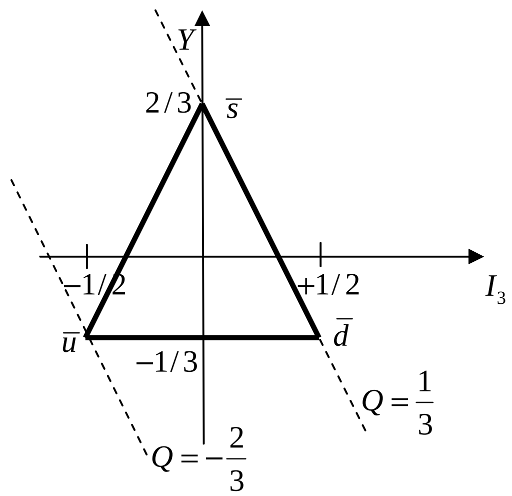
Gambar 5.1. Representasi fundamental quark **3** dari SU(3). Panjang sisi-sisi segitiga adalah satu satuan panjang.

Representasi fundamental anti quark $\overline{\mathbf{3}}$ dari SU(3) tidak ekuivalen dengan quark **3** dari SU(3) . Ini dibedakan oleh *hypercharge*-nya dan dapat ditransformasikan satu dengan yang lain dengan melalui kombinasi matriks Gell-mann. Untuk anti quark kita akan memperoleh hasil perhitungan seperti Tabel 5.4.

Tabel 5.4. Anti quark

$\bar{q}$	B	I	I_3	Y	Q	S
$\bar{u}$	– 1/3	1/2	– 1/2	– 1/3	– 2/3	0
$\bar{d}$	– 1/3	1/2	1/2	– 1/3	1/3	0
$\bar{s}$	– 1/3	0	0	2/3	1/3	1

Diagram Bobot (Weight Diagram) untuk $\overline{\mathbf{3}}$ diberikan pada Gambar 5.2.



Gambar 5.2. Representasi fundamental antiquark $\overline{\mathbf{3}}$ dari SU(3). Panjang sisi-sisi segitiga adalah satu satuan panjang.

5.3.1. Meson

Sebagaimana telah dijelaskan pada bab 1, setiap quark memiliki bilangan baryon B = 1/3 dan setiap antiquark memiliki bilangan baryon B = –1 /3. Sehingga meson memiliki B = 0,

$$\begin{array}{llll} quark: & q_i\,|0\rangle, & B=1/3, & \mathbf{3} \\ antiquark: & q^i\,|0\rangle, & B=-1/3, & \overline{\mathbf{3}} \end{array} \tag{5.72}$$

Meson dibangun dari quark dan antiquark, untuk itu kita tinjau hasilkali tensor antara quark dan antiquark sebagai berikut:

$$q_i\, q^j = \left(q_i\, q^j - \frac{1}{3}\delta_i^j\, q_k\, q^k \right) + \frac{1}{3}\delta_i^j\, q_k\, q^k\,. \tag{5.73}$$

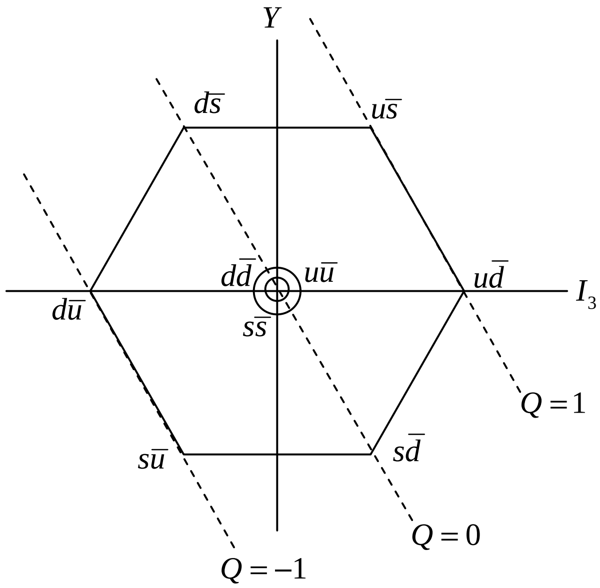
Suku pertama ruas kanan persamaan di atas (bagian *traceless*) memiliki delapan (8) komponen bebas kemudian ini didefinisikan sebagai representasi oktet dengan simbul representasi SU(3) dinyatakan oleh **8** (angka delapan yang ditebalkan),

$$P_i^{\;j} = q_i \; q^j - \frac{1}{3}\delta_i^j \, q_k \; q^k \, . \tag{5.74}$$

Sedangkan suku kedua ruas kanannya (bagian *trace* yaitu sebuah tensor rank-nol) memiliki satu (1) komponen bebas dan didefinisikan sebagai representasi singlet dengan simbol representasi SU(3) dinyatakan oleh **1** (angka satu yang ditebalkan). Secara simbolik dekomposisi dituliskan sebagai

$$\mathbf{3} \otimes \overline{\mathbf{3}} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} \, . \tag{5.75}$$

Diagram bobot untuk meson diberikan pada Gambar 5.3.



Gambar 5.3 : Isi quark dari representasi SU(3) meson.
Panjang sisi-sisi dari heksagonal adalah satu satuan panjang.

Keadaan Meson (*Meson State*)

Pada persamaan (5.74), $P_i^{\;j}$ adalah sebagai operator untuk meson pseudo skalar. Sehingga bekerja pada keadaan $|0\rangle$ dinyatakan oleh

$$P_i^{\;j}\,|0\rangle \equiv \left|P_i^{\;j}\right\rangle = \left(q_i \; q^j - \frac{1}{3}\delta_i^j \, q_k \; q^k \right)|0\rangle \, . \tag{5.76}$$

Ungkapan dari persamaan (5.76) selanjutnya diberikan oleh Tabel 5.4. Untuk memperolehnya perhatikan contoh 5.4 dibawah ini.

Contoh 5.4. Buktikan bahwa

$$\left|K^0\right\rangle = \left|d\ \bar{s}\right\rangle$$

dimana $\left|K^0\right\rangle \equiv \left|P_2^3\right\rangle$.

Jawab:

Dengan menggunakan persamaan (5.76) maka diperoleh

$$\begin{aligned}\left|P_2^3\right\rangle &= \left(q_2\ q^3 - \frac{1}{3}\delta_2^3 q_k\ q^k\right)\left|0\right\rangle = q_2\ q^3\left|0\right\rangle \\ &= d\ \bar{s}\left|0\right\rangle \equiv \left|d\ \bar{s}\right\rangle\end{aligned}$$

Sehingga

$$\left|P_2^3\right\rangle = \left|K^0\right\rangle = \left|d\ \bar{s}\right\rangle \tag{5.77}$$

Untuk baris-baris yang lainnya pada kolom pertama Tabel 5.5 dapat diperoleh dengan cara yang sama.

Operator P_i^j menyatakan representasi dari meson pseudo skalar: π, K dan η yang dinyatakan oleh

$$P_i^j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_A\right)_i^j \pi_A . \tag{5.78}$$

Dari persamaan di atas maka meson pseudoskalar oktet $J^P = 0^-$ dapat dinyatakan dalam notasi matriks

$$\left(P\right)_i^j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 + \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & \frac{1}{\sqrt{6}}\eta_8 - \frac{1}{\sqrt{2}}\pi^0 & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\eta_8 \end{pmatrix}. \tag{5.79}$$

Untuk meson pseudoskalar singlet η_1 diberikan oleh

$$|\eta_1\rangle = \frac{u\,\bar{u} + d\,\bar{d} + s\,\bar{s}}{\sqrt{3}}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|u\,\bar{u} + d\,\bar{d} + s\,\bar{s}\right\rangle : |1,0,0,0\rangle\,. \tag{5.80}$$

Selain itu ada juga representasi oktet dari boson yaitu vektor meson $J^P = 1^-$ yang diberikan oleh:

$$\rho^+\rho^0\rho^- \qquad I = 1, \qquad Y = 0, \tag{5.81a}$$

$$K^{*+}K^{*0} \qquad I = 1/2, \qquad Y = 1, \tag{5.81b}$$

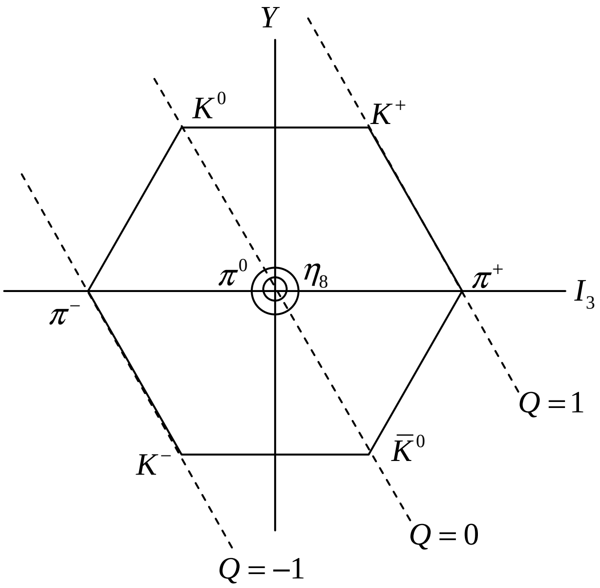
$$\bar{K}^{*0}K^{*-} \qquad I = 1/2, \qquad Y = -1, \tag{5.81c}$$

$$\omega_8 \qquad I = 0, \qquad Y = 0. \tag{5.81d}$$

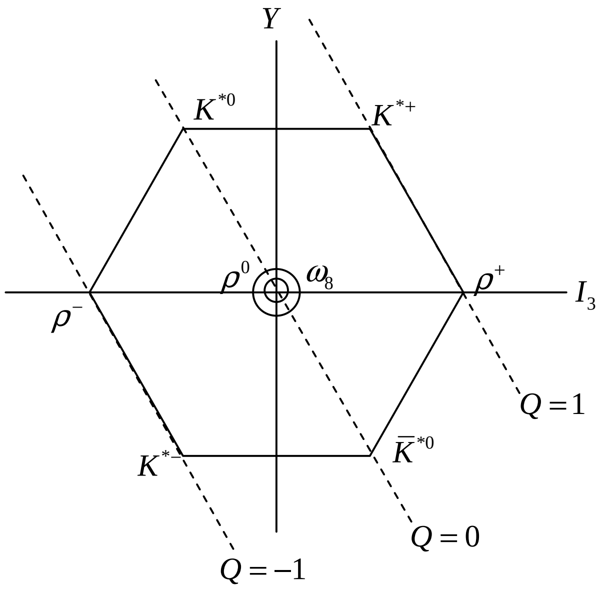
Tabel 5.5. Meson Pseudo skalar $J^P = 0^-$.

State dan isi quark	$\vert D, Y, I, I_3\rangle$
$\vert P_1^2\rangle = \vert\pi^+\rangle = \vert u\ \bar{d}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\vert\pi_1 + i\pi_2\rangle : -\vert 8,0,1,1\rangle$
$\frac{1}{\sqrt{2}}\vert P_1^1 - P_2^2\rangle = \vert\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\vert u\bar{u} - d\bar{d}\rangle$	$\vert\pi_3\rangle : \vert 8,0,1,0\rangle$
$\vert P_2^1\rangle = \vert\pi^-\rangle = \vert d\ \bar{u}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\vert\pi_1 - i\pi_2\rangle : \vert 8,0,1,-1\rangle$
$\vert P_1^3\rangle = \vert K^+\rangle = \vert u\ \bar{s}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\vert\pi_4 + i\pi_5\rangle : \vert 8,1,1/2,1/2\rangle$
$\vert P_2^3\rangle = \vert K^0\rangle = \vert d\ \bar{s}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\vert\pi_6 + i\pi_7\rangle : \vert 8,1,1/2,-1/2\rangle$
$\vert P_3^2\rangle = \vert\bar{K}^0\rangle = \vert s\ \bar{d}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\vert\pi_6 - i\pi_7\rangle : \vert 8,-1,1/2,1/2\rangle$
$\vert P_3^1\rangle = \vert K^-\rangle = \vert s\ \bar{u}\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\vert\pi_4 - i\pi_5\rangle : \vert 8,-1,1/2,-1/2\rangle$
$-\frac{3}{\sqrt{6}}\vert P_3^3\rangle = \vert\eta_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\vert u\bar{u} + d\ \bar{d} - 2s\bar{s}\rangle$	$\vert\pi_8\rangle : \vert 8,0,0,0\rangle$
Catatan: D adalah dimensi dari representasi SU(3) dalam kasus ini adalah D = 8.	

Dengan vektor boson singletnya disimbolkan oleh ω_1. Dalam perusakan SU(3), sebuah meson singlet dapat bercampur dengan komponen ke-8 dari sebuah oktet. Sebagai contoh, ω_8 dan ω_1 dapat bercampur dan partikel-partikel fisisnya adalah campuran dari keduannya yang diberikan oleh simbul ω dan ϕ. Gambar 5.4 dan gambar 5.5 berturut-turut adalah diagram bobot untuk meson oktet dan vektor meson.



Gambar 5 4: Oktet meson pseudo skalar dan bilangan kuantum flavor. Panjang sisi-sisi dari heksagonal adalah satu satuan panjang.



Gambar 5.5: Vektor meson dan bilangan kuantum flavor. Panjang sisi-sisi dari heksagonal adalah satu satuan panjang.

5.3.2. Baryon

Prosedur untuk baryon adalah sama namun dalam hal ini baryon memiliki B = 1 sehingga dibangun dari tiga quark, diagram bobotnya diberikan pada Gambar 5.6. Pertama kita tinjau hasilkali dua tensor untuk dua quark

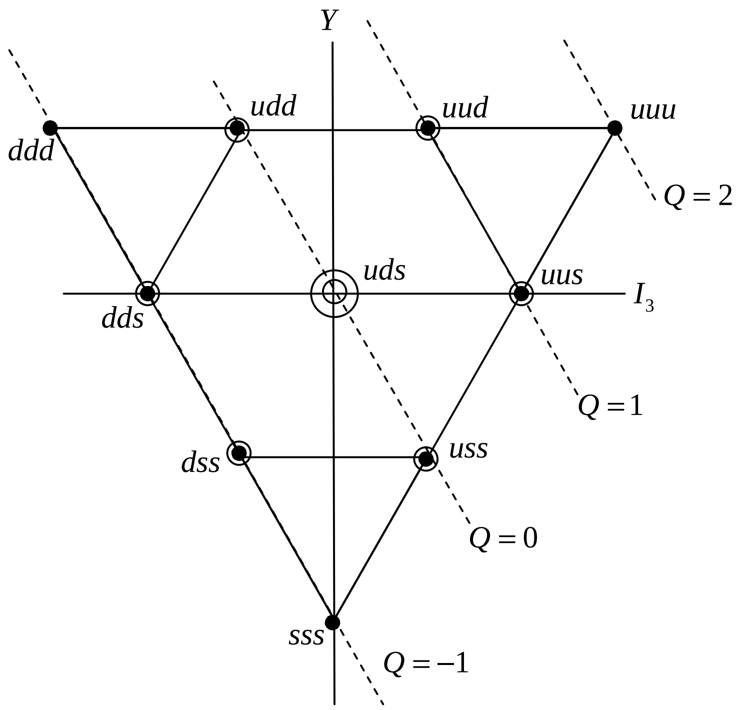
$$\begin{aligned} q_i\, q_j &= \frac{1}{2}\left(q_i\, q_j + q_j\, q_i\right) + \frac{1}{2}\left(q_i\, q_j - q_j\, q_i\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} S_{ij} + \frac{1}{\sqrt{2}} A_{ij} \end{aligned} \qquad (5.82)$$

Dimana suku pertama pada ruas kanan persamaan di atas adalah bagian tensor simetrik yaitu

$$S_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q_i\, q_j + q_j\, q_i\right), \qquad S_{ij} = S_{ji}\,. \qquad (5.83)$$

Sedangkan suku kedua adalah bagian tensor anti-simetrik:

$$A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(q_i\, q_j - q_j\, q_i\right), \qquad A_{ij} = -A_{ji}\,. \qquad (5.84)$$



Gambar 5.6: Representasi SU(3) untuk baryon. Panjang sisi-sisi dari heksagonal adalah tiga satuan panjang.

Untuk tensor simetrik ada enam (6) komponen bebas yaitu

$$S_{ij} = S_{ji} \rightarrow \begin{cases} S_{11},\ S_{22},\ S_{33} \\ S_{12} = S_{21},\ \ S_{13} = S_{31},\ S_{23} = S_{32} \end{cases} : \quad \mathbf{6} \tag{5.85}$$

Untuk 6 komponen bebas dari tensor simetrik kita nyatakan simbol representasi SU(3) adalah **6** (angka 6 yang ditebalkan). Untuk tensor anti-simetrik kita memiliki tiga (3) komponen bebas:

$$\begin{gathered} A_{ij} = -A_{ji} \rightarrow \{ A_{12} = -A_{21},\ \ A_{13} = -A_{31},\ A_{23} = -A_{32} : \quad \overline{\mathbf{3}} \\ A_{11} = A_{22} = A_{33} = 0 \end{gathered} \tag{5.86}$$

Untuk 3 komponen bebas dari tensor anti-simetrik kita nyatakan dengan simbul representasi SU(3) adalah $\overline{\mathbf{3}}$ (angka 3 yang ditebalkan dan diberi "garis" di atasnya, baca "3 bar"). Sebuah vektor T^i memiliki representasi $\overline{\mathbf{3}}$ dapat dinyatakan dalam ungkapan tensor anti-simetrik sebagai berikut

$$T^i = \varepsilon^{ijk} A_{jk}, \qquad atau \qquad A_{jk} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} T^i \tag{5.87}$$

Sehingga dekomposisi grup untuk dua quark adalah

$$q_i\ q_j = \frac{1}{\sqrt{2}} S_{ij} + \frac{1}{\sqrt{2}} A_{ij} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{6} \oplus \overline{\mathbf{3}} \tag{5.88}$$

Untuk tiga quark maka kita harus mencari representasi:

$$q_i\ q_j\ q_k = \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3}. \tag{5.89}$$

Segera kita memperoleh,

$$\begin{aligned} \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} &= (\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}) \otimes \mathbf{3} = \left(\mathbf{6} \oplus \overline{\mathbf{3}}\right) \otimes \mathbf{3} \\ &= (\mathbf{6} \otimes \mathbf{3}) \oplus \left(\overline{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}\right) \end{aligned} \tag{5.90}$$

Masing-masing suku pada ruas kanan persamaan di atas dapat dicari dengan cara berikut. Pertama kita tinjau untuk $\overline{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3}$:

$$T^i\ q_j = \left(T^i\ q_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\ T^k\ q_k \right) + \frac{1}{3}\delta^i_j\ T^k\ q_k. \tag{5.91}$$

Seperti sebelumnya, persamaan (75), representasi ini memiliki dekomposisi:

$$\overline{\mathbf{3}} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}. \tag{5.92}$$

Sekarang kita tuliskan operator oktet untuk baryon sebagai berikut

$$\bar{B}^i_j = T^i\, q_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\, T^k\, q_k\,. \tag{5.93}$$

Yaitu suku pertama ruas kanan persamaan (5.91) dan T^i diberikan oleh persamaan (5.87) yang dapat dinyatakan kembali menjadi

$$T^i = \frac{1}{2\sqrt{2}}\varepsilon^{ijk}\left(q_j\ q_i - q_i\ q_j\right). \tag{5.94}$$

Untuk representasi singlet-nya, suku kedua ruas kanan persamaan (5.91), kita memiliki

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{3}}T^k\ q_k &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\varepsilon^{kji}\, A_{ji}\ q_k \\ &= \frac{1}{2\sqrt{6}}\varepsilon^{kji}\left(q_j\ \ q_i - q_i\ q_j\right)q_k \end{aligned} \tag{5.95}$$

Selanjutnya kita tinjau untuk $\mathbf{6}\otimes\mathbf{3}$, ini diberikan oleh

$$\begin{aligned} S_{ij}\, q_k &= S_{ij}\, q_k + S_{jk}\, q_i + S_{ki}\, q_j - S_{jk}\, q_i - S_{ki}\, q_j \\ &= \tilde{T}_{\{ijk\}} - S_{jk}\, q_i - S_{ki}\, q_j \end{aligned} \tag{5.96}$$

dimana

$$\tilde{T}_{\{ijk\}} = S_{ij}\, q_k + S_{jk}\, q_i + S_{ki}\, q_j\,. \tag{5.97}$$

Disini $\tilde{T}_{\{ijk\}}$ adalah tensor simetrik lengkap dan memiliki sepuluh komponen bebas yaitu sebuah representasi *decuplet*, **10**. Jelaslah pula suku sisa persamaan (5.96) memiliki delapan komponen bebas yaitu sebuah representasi *oktet*, **8**. Persamaan (5.96) dapat dinyatakan kembali dalam bentuk

$$\begin{aligned} S_{ij}\, q_k &= \frac{1}{3}\tilde{T}_{\{ijk\}} + \frac{1}{3}\left[\varepsilon_{kjl}\varepsilon^{lmn}\, S_{in}\, q_m + \varepsilon_{kil}\varepsilon^{lmn} S_{jn}\, q_m\right] \\ &= \frac{1}{3}\tilde{T}_{\{ijk\}} + \frac{1}{3}\left[\varepsilon_{kjl}\, \delta^r_i + \varepsilon_{kil}\, \delta^r_j\right]\varepsilon^{lmn}\, S_{rn}\, q_m\,. \end{aligned} \tag{5.98}$$

Maka dekomposisi grupnya adalah

$$\mathbf{6}\otimes\mathbf{3} = \mathbf{10}\oplus\mathbf{8}\,. \tag{5.99}$$

Kita dapat pula menuliskan representasi *decuplet* dalam ungkapan

$$\bar{T}_{\{ijk\}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{T}_{\{ijk\}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(S_{ij}\, q_k + S_{jk}\, q_i + S_{ki}\, q_j\right). \tag{5.100}$$

Dan representasi oktet yang lain kita sebut **8’** sebagai berikut

$$\bar{B}'^{i}_{j} = \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon^{ikl} \; S_{jl} \; q_k , \qquad \bar{B}'^{i}_{i} = 0 . \tag{5.101}$$

Hasil akhir dari dekomposisi subgrup untuk baryon adalah

$$\mathbf{3} \otimes \mathbf{3} \otimes \mathbf{3} = \mathbf{10} \oplus \mathbf{8'} \oplus \mathbf{8} \oplus \mathbf{1} . \tag{5.102}$$

Keadaan Baryon (*Baryon State*)

Langkah selanjutnya adalah mencari keadaan baryon untuk masing-masing representasi. Untuk representasi oktet **8** maka dari persamaan (5.93) kita memiliki

$$\begin{aligned} \bar{B}^{i}_{j} |0\rangle &= \left| \bar{B}^{i}_{j} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\varepsilon^{ikl} \left(q_k \; q_l - q_l \; q_k \right) q_j - \frac{1}{3} \delta^{i}_{j} \, \varepsilon^{mkl} \left(q_k \; q_l - q_l \; q_k \right) q_m \right] |0\rangle \end{aligned} \tag{5.103}$$

Sedangkan untuk representasi oktet **8’** maka dari persamaan (5.101) kita memiliki

$$\bar{B}'^{i}_{j} |0\rangle = \left| \bar{B}'^{i}_{j} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \varepsilon^{ikl} \; S_{jl} \; q_k |0\rangle , \qquad \bar{B}'^{i}_{i} |0\rangle = \left| \bar{B}'^{i}_{i} \right\rangle = 0 |0\rangle . \tag{5.104}$$

Contoh 5.5.

Carilah isi quark untuk representasi oktet **8** dari keadaan baryon $\bar{B}^{3}_{2}$!

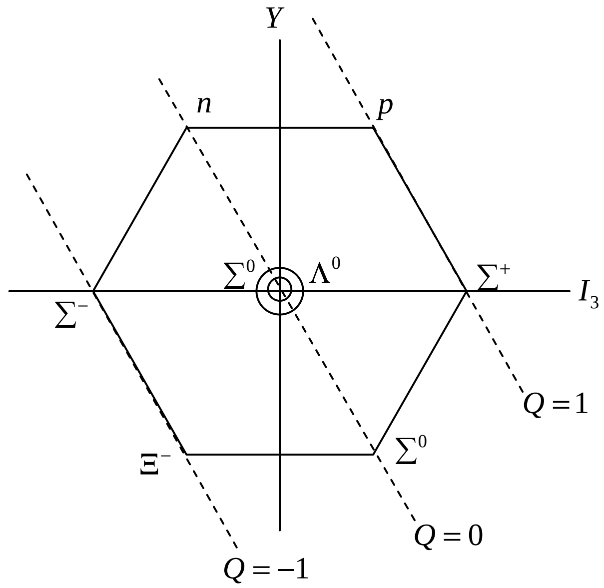
Jawab:

Dengan menggunakan persamaan (5.103) diperoleh

$$\begin{aligned} \bar{B}^{3}_{2} |0\rangle &= \left| \bar{B}^{3}_{2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[\varepsilon^{3kl} \left(q_k \; q_l - q_l \; q_k \right) q_2 - \frac{1}{3} \delta^{3}_{2} \, \varepsilon^{mkl} \left(q_k \; q_l - q_l \; q_k \right) q_m \right] |0\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \varepsilon^{3kl} \left(q_k \; q_l - q_l \; q_k \right) q_2 |0\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\varepsilon^{312} \left(q_1 \; q_2 - q_2 \; q_1 \right) q_2 \right) |0\rangle \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(u \; d - d \; u \right) d |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [u, d] \; d |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| [u, d] \; d \right\rangle \end{aligned}$$

Dimana hubungan komutasi adalah $[u, d] = \frac{1}{2}(u\ d - d\ u)$. Keadaan baryon $\overline{B}_2^3|0\rangle$ diberikan simbol

$$\overline{B}_2^3|0\rangle \equiv |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big|\,[u, d]\ d\big\rangle .$$



Gambar 5.7: Baryon oktet $J^P = \frac{1}{2}^+$ dan bilangan kuantum flavor.
Panjang sisi-sisi dari heksagonal adalah satu satuan panjang.

Dengan menggunakan cara seperti contoh 4, maka dapat diperoleh isi quark dari keadaan baryon yang lain. Representasi oktet **8** dan **8’** berturut-turut diberikan oleh Tabel 5.6 dan Tabel 5.7. Notasi matrik untuk keadaan baryon oktet $J^P = \frac{1}{2}^+$ diberikan oleh

$$\left(\overline{B}\right)_i^j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & \frac{1}{\sqrt{6}}\Lambda^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Sigma^0 & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}}\Lambda^0 \end{pmatrix} \quad : \mathbf{8} \qquad (5.105)$$

$$\left(\bar{B}'\right)_i^j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda}^0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 & \bar{\Sigma}^- & \bar{\Xi}^- \\ \bar{\Sigma}^+ & \frac{1}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda}^0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\Sigma}^0 & \bar{\Xi}^0 \\ p & \bar{n} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\bar{\Lambda}^0 \end{pmatrix} \quad : \mathbf{8'} \qquad (5.106)$$

Tabel 5.6. Baryon $J^P = \frac{1}{2}^+$.

State: **8** dan isi quark	Q	I	I$_3$	Y
$\bar{B}_1^3\|0\rangle \equiv \|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\|[u,d]\ u\rangle$	1	1/2	1/2	1
$\bar{B}_2^3\|0\rangle \equiv \|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\|[u,d]\ d\rangle$	0	1/2	– 1/2	1
$\bar{B}_1^2\|0\rangle \equiv \|\Sigma^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\|[u,s]\ u\rangle$	1	1	1	0
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{B}_1^1 - \bar{B}_2^2\right)\|0\rangle \equiv \|\Sigma^0\rangle = \frac{1}{2}\|[d,s]\ u + [u,s]\ d\rangle$	0	1	0	0
$\bar{B}_2^1\|0\rangle \equiv \|\Sigma^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\|[d,s]\ d\rangle$	–1	1	–1	0
$-\frac{3}{\sqrt{6}}\bar{B}_3^3\|0\rangle \equiv \|\Lambda^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}\|\ 2[u,d]\ s - [d,s]\ u - [s,u]\ d\rangle$	0	0	0	0
$\bar{B}_3^1\|0\rangle \equiv \|\Xi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\|[d,s]\ s\rangle$	–1	1/2	– 1/2	– 1
$\bar{B}_3^2\|0\rangle \equiv \|\Xi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\|[s,u]\ s\rangle$	0	1/2	1/2	– 1

Kedua persamaan di atas memenuhi hubungan

$$\bar{B}'^j_i = \bar{B}^{*j}_i \gamma^0 . \qquad (5.107)$$

Disini simbul bintang ”*” berarti konjugat kompleks terhadap SU(3) dan konjugat hermitian untuk operator medan. Diagram bobot untuk representasi baryon oktet diperlihatkan pada Gambar 5.7.

Tabel 5.7. Baryon $J^P = \frac{1}{2}^+$.

State: **8'** dan isi quark	Q	I	I_3	Y
$\bar{B}_1^{'3}\|0\rangle \equiv \|\bar{\Xi}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\|\{u, d\}\ u - 2uud\rangle$	1	1/2	1/2	1
$\bar{B}_2^{'3}\|0\rangle \equiv \|\bar{\Xi}^0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{6}}\|\{u, d\}\ d - 2ddu\rangle$	0	1/2	– 1/2	1
$\bar{B}_1^{'2}\|0\rangle \equiv \|\bar{\Sigma}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\|\{u, s\}\ u - 2uus\rangle$	1	1	1	0
$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\bar{B}_1^{'1} - \bar{B}_2^{'2}\right)\|0\rangle \equiv \|\bar{\Sigma}^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{12}}\|-2\{u, d\}s + \{u, s\}d + \{d, s\}u\rangle$	0	1	0	0
$\bar{B}_2^{'1}\|0\rangle \equiv \|\bar{\Sigma}^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\|\{d, s\}\ d - 2dds\rangle$	–1	1	–1	0
$-\frac{3}{\sqrt{6}}\bar{B}_3^{'3}\|0\rangle \equiv \|\bar{\Lambda}^0\rangle = -\frac{1}{2}\|\{s, d\}\ u - \{s, u\}d\rangle$	0	0	0	0
$\bar{B}_3^{'1}\|0\rangle \equiv \|\bar{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\|2ssd - \{d, s\}\ s\rangle$	–1	1/2	– 1/2	– 1
$\bar{B}_3^{'2}\|0\rangle \equiv \|\bar{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\|\{s, u\}\ s - 2ssu\rangle$	0	1/2	1/2	– 1

Untuk representasi singlet **1** dari baryon, maka dengan definisi $\frac{1}{2\sqrt{3}}T^k\ q_k|0\rangle \equiv |\Lambda_1^0\rangle$ diperoleh

$$|\Lambda_1^0\rangle = \frac{1}{2\sqrt{6}}\varepsilon^{kji}\left(q_j\ \ q_i - q_i\ \ q_j\right)q_k|0\rangle$$

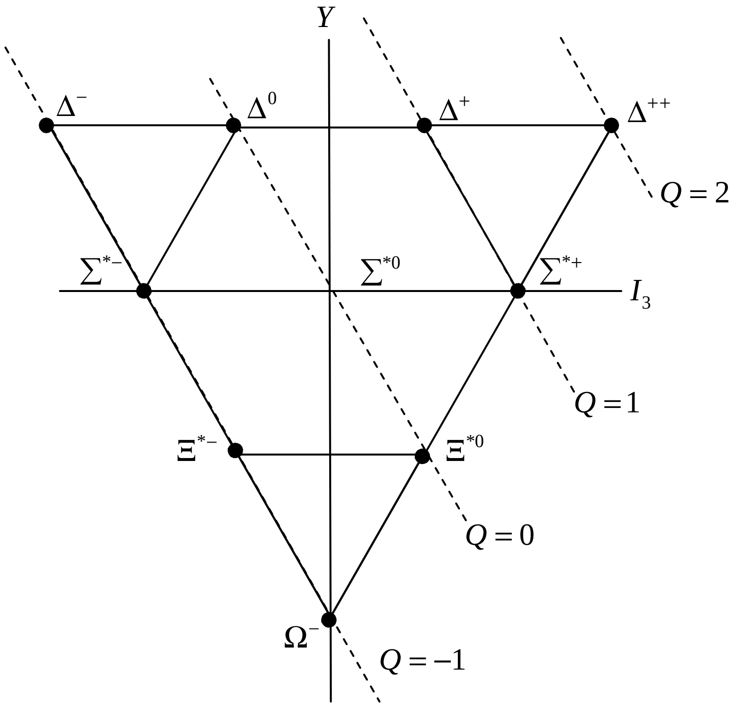
$$= \frac{2}{2\sqrt{6}}\left(\left[\bar{d}, \bar{s}\right]\ \bar{u} + \left[\bar{s}, \bar{u}\right]\bar{d} + \left[\bar{u}, \bar{d}\right]\bar{s}\right)|0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}}\left|[d, s]\,u + [s, u]\ d + [u, d]\ s\right\rangle \tag{5.108}$$

Dan terakhir untuk representasi decuplet **10** diperoleh dari persamaan (5.100):

$$|T_{ijk}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(S_{ij}\,q_k + S_{jk}\,q_i + S_{ki}\,q_j\right)|0\rangle\,. \tag{5.109}$$

Keadaan untuk representasi decuplet diberikan dalam Tabel 5.8. Dan diagram bobot untuk decuplet baryon diberikan pada Gambar 5.8.



Gambar 5.8: Baryon decuplet dan bilangan quantum *flavor*.
Panjang sisi-sisi dari heksagonal adalah tiga satuan panjang.

Tabel 5.8. Baryon $J^P = \frac{3}{2}^+$.

State: **10** dan isi quark	Q	I	I_3	Y
$\frac{1}{\sqrt{6}}\lvert T_{111}\rangle \equiv \lvert \Lambda^{++}\rangle = \lvert uuu\rangle$	2	3/2	3/2	1
$\frac{1}{\sqrt{2}}\lvert T_{112}\rangle \equiv \lvert \Delta^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\lvert udu + duu + uud\rangle$	1	3/2	1/2	1
$\frac{1}{\sqrt{2}}\lvert T_{122}\rangle \equiv \lvert \Delta^{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\lvert udd + ddu + dud\rangle$	0	3/2	1	1
$\frac{1}{\sqrt{2}}\lvert T_{222}\rangle \equiv \lvert \Delta^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\lvert ddd\rangle$	–1	3/2	–3/2	1
$\frac{1}{\sqrt{2}}\lvert T_{113}\rangle \equiv \lvert \Sigma^{*+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\lvert uus + usu + suu\rangle$	1	1	1	0
$\frac{1}{\sqrt{2}}\lvert T_{123}\rangle \equiv \lvert \Sigma^{*0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\lvert uds + dus + dsu + sdu + sud + usd\rangle$	0	1	0	0
$\frac{1}{\sqrt{2}}\lvert T_{322}\rangle \equiv \lvert \Sigma^{*-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\lvert sdd + dds + dsd\rangle$	–1	1	–1	0
$\frac{1}{\sqrt{2}}\lvert T_{133}\rangle \equiv \lvert \Sigma^{*0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\lvert uss + ssu + sus\rangle$	0	1/2	1/2	– 1
$\frac{1}{\sqrt{2}}\lvert T_{233}\rangle \equiv \lvert \Xi^{*-}\rangle = \lvert dss + ssd + sds\rangle$	– 1	1/2	– 1/2	– 1
$\frac{1}{\sqrt{6}}\lvert T_{333}\rangle \equiv \lvert \Omega^{-}\rangle = \lvert sss\rangle$	– 1	0	0	– 2

5.4. Simetri Ruang-waktu

Simetri selalu tergandeng dengan ungkapan transformasi simetri, yaitu suatu manipulasi matematis yang kita terapkan terhadap sebuah sistem tanpa mengubah sifat-sifat *observabel*-nya. Jika suatu sistem fisis tidak berubah oleh sebuah transformasi maka sistem dikatakan invarian terhadap transformasi tersebut. Suatu prinsip invarian menggambarkan suatu simetri dasar dan selalu berhubungan dengan hukum kekekalan, Tabel 5.9. Sebagai contoh sebuah lilin invarian atau simetri terhadap sumbu vertikal karena lilin dapat diputar terhadap sumbu itu tanpa mengubah rupa dan keistimewaan lainnya.

Tabel 5.9 Simetri dan hukum kekekalan

Simetri		Hukum kekekalan
Translasi waktu	$\longleftrightarrow$	Energi
Translasi Ruang	$\longleftrightarrow$	Momentum
Rotasi	$\longleftrightarrow$	Momentum Sudut
Transformasi Gauge	$\longleftrightarrow$	Muatan

Jika sebuah sistem memiliki simetri *rotasi* dan simetri *translasi* maka hukum-hukum fisika diterapkan dengan cara yang sama dalam *semua arah* dan *semua ruang*. Setiap eksperimen akan memberikan hasil yang sama meskipun kita merotasikan peralatannya atau mengulang pengukurannya dalam ruang yang berbeda atau dalam tempat yang berbeda.

5.4.1. Konsep Invarian

Dalam mekanika kuantum, Hamiltonian yang menggambarkan sistem adalah invarian terhadap transformasi uniter. Sebagai contoh, tinjau sebuah transisisi dari keadaan awal $|i\rangle$ ke keadaan akhir $|f\rangle$ yang digambarkan oleh elemen matriks $\langle f|H|i\rangle$ atau $\langle f|S|i\rangle$. Jika kita mengubah atau mentransformasikan transisi ini,

$$|i\rangle \;\rightarrow\; |i'\rangle = U|i\rangle, \qquad |f\rangle \;\rightarrow\; |i'\rangle = U|i\rangle, \tag{5.110}$$

maka invarian berarti

$$\langle f|S|i\rangle = \langle f'|H|i'\rangle = \langle f|U^{\dagger}HU\dagger|i\rangle, \tag{5.11}$$

Atau

$$H = U^{\dagger} H U, \qquad [H, U] = 0, \qquad [S, U] = 0 . \tag{5.112}$$

Kita melihat bahwa invarian terhadap transformasi uniter berarti bahwa Hamiltonian *H* komut dengan *U*.

(A) *U* adalah kontinu

Tinjau sebuah transformasi infinitesimal,

$$U = 1 - i\varepsilon \hat{G}, \tag{5.113}$$

dimana ε adalah parameter yang sangat kecil (infinitesimal) dan $\hat{G}$ adalah sebuah operator hermitian yaitu sebuah observabel sistem, misalnya, momentum sudut. $\hat{G}$ juga dinamakan generator dari tarnsformasi yang dinyatakan oleh *U*. Menurut persamaan (5.112) kita memperoleh

$$\left[H, \hat{G}\right] = 0 . \tag{5.114}$$

Misalkan $|i\rangle$ dan $|f\rangle$ adalah keadaan eigen dari $\hat{G}$,

$$\hat{G}|i\rangle = g_i |i\rangle, \qquad \hat{G}|f\rangle = g_f |f\rangle, \tag{5.115}$$

Maka dari persamaan (5.114) kita memiliki

$$\langle f|\left[H, \hat{G}\right]|i\rangle = 0 . \tag{5.116a}$$

atau

$$\left(g_i - g_f\right)\langle f|H|i\rangle = 0 . \tag{5.116b}$$

Jika $\langle f|H|i\rangle$ tidak sama dengan nol $\langle f|H|i\rangle \neq 0$, maka kita memperoleh

$$g_i = g_f . \tag{5.117}$$

Ini berarti bahwa dalam transisi dari $|i\rangle$ ke $|f\rangle$, $\hat{G}$ adalah kekal (nilai eigen $\hat{G}$ kekal) dan dikatakan sebagai konstanta gerak.

(B) *U* adalah diskrit

Jika *U* adalah diskrit, misalnya refleksi ruang, maka dengan mengulang operasinya dua kali, akan kembali ke keadaan semula,

$$U^2 = 1 . \tag{5.118a}$$

Dengan nilai eigen dari U adalah

$$U = \pm 1 . \tag{5.118b}$$

Jadi U tidak saja uniter tetapi juga hermitian, sehingga U dipandang sebagai observabel.

Pasal berikut ini akan menggunakan konsep di atas untuk memperoleh kuantitas-kuantitas yang kekal dalam fisika.

5.4.2. Operasi Simetri dan Kuantitas Kekal

A. Invarian Translasi

Beberapa prinsip invarian klasik berhubungan dengan ruang dan waktu. Jika Hamiltonian (= operator untuk energi total) invariant terhadap suatu translasi dalam sistem tertutup, maka sistem multi partikelnya akan memiliki kekekalan momentum total sistem. Ini dapat dibuktikan secara klasik, dan kita akan menggunakan pendekatan mekanika kuantum. Tinjau sebuah translasi infinitesimal

$$\vec{x}_i \quad \rightarrow \quad \vec{x}_i' = \vec{x}_i + \delta\vec{x} . \tag{5.119}$$

Maka Hamiltonian sistem bertransformasi sebagai berikut

$$\hat{H}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots \vec{x}_n\right) = \hat{H}\left(\vec{x}_1 + \delta\vec{x}, \vec{x}_2 + \delta\vec{x}, \cdots \vec{x}_n + \delta\vec{x}\right). \tag{5.120}$$

Untuk menyederhanakan kasus ini kita tinjau Hamiltonian dari sebuah partikel bebas

$$\hat{H} = -\frac{1}{2m}\vec{\nabla}^2 = -\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right). \tag{5.121}$$

Dari persamaan (5.120) jelaslah bahwa

$$\hat{H}\left(\vec{x}_1', \vec{x}_2', \cdots \vec{x}_n'\right) = \hat{H}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots \vec{x}_n\right), \tag{5.122}$$

yaitu sebuah sistem tertutup. Kita definisikan operator translasi $\hat{D}$ yang didefinisikan sebagai sebuah aksi yang bekerja pada suatu fungsi sembarang ψ,

$$\hat{D}\psi\left(\vec{x}\right) = \psi\left(\vec{x} + \delta\vec{x}\right). \tag{5.123}$$

Untuk partikel tunggal kita memiliki $\psi'\left(\vec{x}\right) = \hat{H}\left(\vec{x}\right)\psi\left(\vec{x}\right)$, dengan menggunakan definisi (5.123) maka diperoleh

$$\hat{D}\psi'\left(\vec{x}\right) = \psi'\left(\vec{x} + \delta\vec{x}\right) = \hat{H}\left(\vec{x} + \delta\vec{x}\right)\psi\left(\vec{x} + \delta\vec{x}\right). \tag{5.124}$$

Selanjutnya, karena Hamiltonian adalah invarian terhadap translasi, maka

$$\hat{D}\psi'(\vec{x}) = \hat{H}(\vec{x})\psi(\vec{x}+\delta\vec{x}). \qquad (5.125)$$

Gunakan definisi (5.123) kembali maka

$$\hat{D}\hat{H}(\vec{x})\psi(\vec{x}) = \hat{H}(\vec{x})\hat{D}\psi(\vec{x}). \qquad (5.126)$$

Ini berarti bahwa $\hat{D}$ komut dengan Hamiltonian,

$$\left[\hat{D},\ \hat{H}\right] = 0. \qquad (5.127)$$

Karena $\delta\vec{x}$ adalah besaran yang sangat kecil maka translasi (5.123) dapat diekspansi menjadi

$$\psi(\vec{x}+\delta\vec{x}) = \psi(\vec{x}) + \delta\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\psi(\vec{x}). \qquad (5.128)$$

Jika ingat kembali bahwa operator momentum, $\hat{p} = -i\vec{\nabla}$, persamaan (5.128) menjadi

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}+\delta\vec{x}) &= \psi(\vec{x}) + i\delta\vec{x}\cdot\hat{p}\,\psi(\vec{x}) \\ &= (1+i\delta\vec{x}\cdot\hat{p})\psi(\vec{x})\end{aligned}. \qquad (5.129)$$

Sehingga operator translasi, bandingkan dengan persamaan (123), diberikan oleh

$$\hat{D} = 1 + i\delta\vec{x}\cdot\hat{p}. \qquad (5.130)$$

Substitusikan (5.130) ke persamaan (5.127), maka diperoleh hubungan komutasi antara momentum dan Hamiltonian,

$$\left[\hat{p},\ \hat{H}\right] = 0. \qquad (5.131)$$

Persamaan di atas tidak lain adalah hukum kekekalan momentum untuk keadaan partikel tunggal yang mana Hamiltoniannya adalah invarian translasi.

Persamaan (5.130) dan (5.131) dapat diperumum untuk kasus keadaan multi partikel dan menghasilkan hukum kekekalan momentum umum untuk momentum total,

$$\hat{p} = \sum_{i=1}^{n}\hat{p}_i. \qquad (5.132)$$

Dari hasil diatas, maka dapat dinyatakan bahwa:

- Momentum kekal dalam sistem tertutup.
- Hamilton invarian terhadap translasi ruang.
- Operator momentum komut dengan operator Hamiltonian

B. Invarian Rotasi

Besaran-besaran lain yang kekal adalah momentum sudut. Ketika sebuah sistem partikel tertutup dirotasikan disekitar pusat massa-nya, sifat-sifat fisisnya tetap tidak berubah, *invarian rotasi*.

Terhadap rotasi disekitar sumbu-z (sebagai contoh) sebesar sudut θ, koordinat-koordinat x_i , y_i dan z_i bertransformasi menjadi koordinat-koordinat baru sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i \cos\theta - y_i \sin\theta \\ y_i' &= x_i \sin\theta + y_i \cos\theta \\ z_i' &= z_i \end{aligned} \tag{5.133}$$

Hasil dari Hamiltonian baru dari sistem yang dirotasikan adalah tetap sama dengan Hamiltonian sistem semula

$$\hat{H}\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \cdots \vec{x}_n\right) = \hat{H}\left(\vec{x}_1', \vec{x}_2', \cdots \vec{x}_n'\right), \tag{5.134}$$

Sekarang kita tinjau rotasi untuk sudut yang sangat kecil $\delta\theta$, maka persamaan (5.133) menjadi

$$\begin{aligned} x' &= x - y\,\delta\theta \\ y' &= y + x\;\delta\theta \\ z' &= z \end{aligned} \tag{5.135}$$

Sebuah operator rotasi didefinisikan analog dengan operator translasi,

$$\hat{R}_z \psi\left(\vec{x}\right) \equiv \psi\left(\vec{x}'\right) = \psi\left(x - y\,\delta\theta, y + x\;\delta\theta, z\right). \tag{5.136}$$

Ekspansi orde pertama dalam $\delta\theta$ menghasilkan

$$\begin{aligned} \psi\left(\vec{x}'\right) &= \psi\left(\vec{x}\right) - \delta\theta\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi\left(\vec{x}\right). \\ &= \left[1 - \delta\theta\left(y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}\right)\right]\psi\left(\vec{x}\right) \\ &= \left[1 + i\,\delta\theta\,\hat{L}_z\right]\psi\left(\vec{x}\right) \end{aligned} \tag{5.137}$$

Disini $\hat{L}_z$ adalah komponen ke-z dari operator momentum sudut orbital $\hat{L}$,

$$\hat{L}_z = -i\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \tag{5.138}$$

Untuk kasus umum dengan rotasi pada arah sembarang, ditentukan oleh sebuah vektor satuan $\hat{n}$ dan $\hat{L}_z$ diganti dengan proyeksi dari $\hat{L}$ dalam arah vektor satuan, $\hat{L} : \hat{L} \cdot \hat{n}$ dan diperoleh

$$\hat{R}_n = 1 + i\,\delta\theta\left(\hat{L} \cdot \hat{n}\right). \tag{5.139}$$

Sekarang kita tinjau $\hat{R}_n$ bekerja pada keadaan partikel tunggal $\psi'(\vec{x}) = \hat{H}(\vec{x})\psi(\vec{x})$ dan dengan mengulangi langkah yang sama untuk translasi maka diperoleh

$$\left[\hat{R}_n, \hat{H}\right] = 0\,. \tag{5.140}$$

$$\left[\hat{L}, \hat{H}\right] = 0\,. \tag{5.141}$$

Persamaan di atas berlaku untuk partikel spin-0 yang bergerak dalam sebuah potensial pusat, yaitu dalam sebuah medan yang tidak bergantung pada arah tetapi bergantung pada jarak absolut.

Apabila sebuah partikel memiliki spin yang tidak nol, momentum sudut totalnya adalah jumlah dari momentum sudut orbital dan spin,

$$\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}\,, \tag{5.142}$$

dan fungsi gelombangnya adalah produk dari fungsi gelombang ruang, $\psi(\vec{x})$, dan fungsi gelombang spin, χ.

$$\Psi = \psi(\vec{x})\,\chi\,. \tag{5.143}$$

Untuk kasus partikel spin-1/2, operator spin-nya dinyatakan oleh matriks-matriks Pauli, lihat kembali bab 4. Maka untuk kasus partikel spin-1/2, persamaan (5.139) menjadi

$$\hat{R}_n = 1 + i\,\delta\theta\left(\hat{J} \cdot \hat{n}\right). \tag{5.144}$$

Ketika operator rotasi $\hat{R}_n$ bekerja pada fungsi gelombang $\Psi = \psi(\vec{x})\,\chi$ komponen $\hat{L}$ dan $\hat{S}$ dari $\hat{J}$ bekerja saling bebas pada masing-masing fungsi gelombangnya,

$$\hat{J}\Psi = \left(\hat{L} + \hat{S}\right)\psi(\vec{x})\,\chi = \left(\hat{L}\psi(\vec{x})\right)\chi + \psi(\vec{x})\left(\hat{S}\,\chi\right). \tag{5.145}$$

Ini berarti bahwa momentum sudut total juga harus kekal

$$\left[\hat{J}, \hat{H}\right] = 0\,. \tag{5.146}$$

Akan tetapi, invarian rotasi secara umum tidak menghasilkan kekekalan $\hat{L}$ dan $\hat{S}$ secara terpisah,

$$\left[\hat{L}+\hat{S},\,\hat{H}\right]=0 \to \left[\hat{L},\,\hat{H}\right]=-\left[\hat{S},\,\hat{H}\right]\neq 0\,. \tag{5.147}$$

Dengan menganggap bahwa gaya hanya mengubah orientasi spin, bukan besaran absolutnya maka besaran momentum sudut orbital dan spin akan menghasilkan hukum kekekalan,

$$\left[\hat{H},\,\hat{L}^2\right]=0, \qquad \left[\hat{H},\,\hat{S}^2\right]=0\,. \tag{5.148}$$

Contoh 5.6.

Andaikan kita inging mengukur S_x^2 pada sebuah partikel dalam keadaan $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$. Carilah nilai-nilai eigen yang mungkin diperoleh dan probabilitas dari masing-masing!

Jawab:

Representasi matriks dari S_x^2 adalah kuadrat dari representasi matriks S_x,

$$S_x^2=\frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Maka kita memperoleh

$$\frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

Masing-masing spinor adalah vektor eigen dari S_x^2 dengan nilai eigen $\hbar^2/4$. Sehingga untuk memperoleh nilai $\hbar^2/4$, probabilitasnya adalah 1. Ini sama juga untuk S_y^2 dan S_z^2. Jadi spinor adalah vektor eigen dari $\hat{S}^2=\hat{S}_x^2+\hat{S}_y^2+\hat{S}_z^2$ dengan nilai eigen ($\hbar^2/4$ + $\hbar^2/4$ + $\hbar^2/4$) = $3\hbar^2/4$. Untuk spin sembarang s diperoleh $S^2=s\left(s+1\right)\hbar^2$. Mudah dibuktikan untuk spin-1/2 kita memperoleh nilai eigen

$$S^2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2=\frac{3}{4}\hbar^2\,.$$

5.4.3. Paritas

Transformasi paritas atau juga dinamakan inversi paritas adalah sebuah transformasi yang mengubah tanda semua koordinat ruang. Terhadap transformasi paritas, ruang dan waktu bertransformasi sebagai berikut:

$$P: \quad \begin{cases} \vec{x} & \rightarrow \quad \vec{x}' = -\vec{x} \\ t & \rightarrow \quad t' = t \end{cases} . \tag{5.149}$$

Maka sebuah operator uniter $\hat{P}$ yang bekerja pada sebuah fungsi gelombang akan menghasilkan

$$\hat{P}\Psi(\vec{x},t) = \Psi(-\vec{x},t) . \tag{5.150}$$

Dengan syarat uniter dari operator $\hat{P}$, $\hat{P}^2 = 1$ maka nilai eigen dari $\hat{P}$ adalah ± 1. Secara umum operator $\hat{P}$ tidak komut dengan semua jenis Hamiltonian. Misalnya Hamiltonian interaksi lemah H_w tidak komut dengan $\hat{P}$,

$$\left[H_w, \hat{P} \right] \neq 0 . \tag{5.151}$$

Yaitu paritas tidak kekal dalam interaksi lemah. Terhadap operator paritas ruang dan momentum bertransformasi sebagai,

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x} , \qquad\qquad \vec{p} \rightarrow -\vec{p} . \tag{5.152}$$

Sedangkan momentum sudut orbital

$$\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p} \rightarrow \vec{L} . \tag{5.153}$$

sehingga

$$\vec{J} \rightarrow \vec{J}, \qquad \vec{\sigma} \rightarrow \vec{\sigma} . \tag{5.154}$$

Sifat-sifat vektor seperti persamaan (5.154) dinamakan *vektor aksial*. Kemudian terhadap transformasi paritas, skalar-skalar berikut ini bertransformasi sebagai

$$\vec{x} \cdot \vec{p} \quad \rightarrow \quad \vec{x} \cdot \vec{p} \ , \tag{5.155a}$$

$$\left(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \right) \cdot \vec{p}_3 \quad \rightarrow \quad -\left(\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \right) \cdot \vec{p}_3 \ , \tag{5.155b}$$

$$\vec{J} \cdot \vec{p} \quad \rightarrow \quad -\vec{J} \cdot \vec{p} . \tag{5.155c}$$

Skalar-skalar yang berubah tanda terhadap paritas dinamakan *pseudoscalar*. Persamaan (5.155a – 5.155c) adalah invarian rotasi tetapi (5.155b) dan (5.155c) memiliki perilaku berbeda terhadap operator paritas, $\hat{P}$. Perilaku skalar dan vektor terhadap transformasi paritas diberikan pada Tabel 5.10.

Tabel 5.10.
Perilaku skalar dan vektor terhadap transformasi paritas

Skalar, s	$\hat{P}(s) = s$
Pseudoskalar, p	$\hat{P}(p) = -p$
Vektor, $\vec{v}$	$\hat{P}(\vec{v}) = -\vec{v}$
Pseudovektor, $\vec{a}$	$\hat{P}(\vec{a}) = \vec{a}$

5.4.4. Paritas Intrinsik

Partikel-partikel dapat dibedakan satu dengan yang lain melalui sifat-sifat intrinsiknya. Salah satu sifat intrinsik tersebut adalah *paritas*. Sifat-sifat intrinsik tersebut didefinisikan oleh bilangan kuantum[3]. Untuk mempelajari hal ini, pertama kita tinjau medan elektromagnetik kuantum dari sebuah foton yang dinyatakan oleh sebuah potensial vektor,

$$\vec{A}(\vec{x}) = \vec{\varepsilon}\ f(x), \tag{5.156}$$

dimana $\vec{\varepsilon}$ adalah vektor polarisasi dan $f(x)$ adalah sebuah fungsi skalar. Interaksi dari sebuah partikel bermuatan dan medan elektromagnetik dengan invarian gauge diberikan dengan substitusi

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\ \vec{A}(\vec{x}), \tag{5.157}$$

Karena $\vec{x}$ dan $\vec{p}$ berubah tanda terhadap transformasi paritas maka $\vec{A}(\vec{x}) \rightarrow -\vec{A}(-\vec{x})$,

$$\hat{P}\ \vec{A}(\vec{x})\ \hat{P}^{-1} = -\ \vec{A}(-\vec{x}), \tag{5.158}$$

dimana $\vec{A}(\vec{x})$ diberikan oleh persamaan (5.156). Sehingga terhadap transformasi paritas

$$\hat{P}\ \vec{\varepsilon}\ \ f(x)\ \hat{P}^{-1} = -\ \vec{\varepsilon}\ \ f(-x) \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\varepsilon} \rightarrow -\ \vec{\varepsilon}\ , \tag{5.159}$$

[3] Contohnya, bialngan kuantum *a* didefinisikan oleh persamaan nilai eigen $\hat{A}|\Psi\rangle = a|\Psi\rangle$.

Perlakuan dari vektor polarisasi $\vec{\varepsilon}$ adalah sebuah karakteristik dari *paritas intrinsik* foton. Jadi paritas intrinsik dari foton adalah ganjil.

Secara umum untuk setiap partikel α yang direpresentasikan oleh sebuah vektor keadaan (*state vector*) $|\alpha, \vec{p}\rangle$, dapat dinyatakan oleh

$$\hat{P}\ |\alpha, \vec{p}\rangle = \eta_\alpha^P |\alpha, \vec{p}\rangle, \tag{5.160}$$

disini η_α^P menyatakan paritas intrinsik dari partikel α dimana $\eta_\alpha^P = \pm 1$. Dalam sebuah reaksi kekekalan paritas menghasilkan hukum kekekalan bersifat perkalian (*multiplicative*). Sebuah reaksi yang diberikan oleh $a + b \to c + d$, keadaan awalnya dapat dinyatakan dengan:

$$|i\rangle = |a\rangle\ |b\rangle\ |gerak\, relatif\rangle \tag{5.161}$$

Disini $|a\rangle$ dan $|b\rangle$ menggambarkan keadaan internal dari *a* dan *b*, sedangkan $|gerak\, relatif\rangle$ menggambarkan gerak relatifnya. Sebagai contoh fungsi gelombang dari sebuah partikel dapat dinyatakan oleh $\Psi = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi)$. Jika $|i\rangle$ dan $|f\rangle$ berturut-turut menyatakan keadaan eigen awal dan akhir dari operator paritas $\hat{P}$ dengan nilai eigen η_i^P dan η_f^P maka nilai eigen untuk masing-masing keadaan diberikan oleh

$$\begin{aligned} \eta_i^P &= \eta_a^P\ \eta_b^P\ (-1)^l \\ \eta_f^P &= \eta_c^P\ \eta_d^P\ (-1)^{l'} \end{aligned} \tag{5.162}$$

dimana η_a^P, η_b^P, η_c^P dan η_d^P berturut-turut merupakan paritas intrinsik dari *a*, *b*, *c* dan *d*. Sedangkan $(-1)^l$ dan $(-1)^{l'}$ berturut-turut merupakan paritas orbital dalam keadaan awal dan akhir. Kekekalan paritas untuk proses $a + b \to c + d$ adalah

$$\eta_i^P = \eta_f^P \tag{5.163a}$$

atau

$$\eta_a^P\ \eta_b^P\ (-1)^l = \eta_c^P\ \eta_d^P\ (-1)^{l'} \tag{5.163b}$$

Jadi kekekalan paritas memenuhi hukum kekekalan bersifat perkalian. Hukum kekekalan paritas tidak universal, misalnya dalam interaksi lemah ini tidak berlaku, $\left[H_w, \hat{P}\right] \neq 0$.

Sehingga kita tidak dapat mencari keadaan eigen $|\Psi\rangle$ secara serentak[4]. Jadi jika partitas tidak kekal, keadaa eigen energi $|\Psi\rangle$ tidak dapat dipandang sebagai keadaan eigen dari paritas. Namun kita dapat menyatakannya sebagai berikut:

$$|\Psi\rangle = |\Psi_{regular}\rangle + A_{mp}|\Psi_{irregular}\rangle \tag{5.164}$$

Disini $|\Psi_{regular}\rangle$ dan $|\Psi_{irregular}\rangle$ adalah keadaan eigen yang memiliki paritas berlawanan. A_{mp} dinamakan *amplitudo campur paritas* (*parity mixing amplitude*) yang menyatakan derajat ketidakkekalan paritas. Suatu pelanggaran terhadap paritas (*parity violation*) dikatakan maksimum jika $|A_{mp}|^2 = 1$. Dalam beberapa eksperimen yang meliputi hadron ada pelanggaran paritas $|A_{mp}|^2 < 10^{-13}$, untuk interaksi elektromagnetik $|A_{mp}|^2 < 10^{-14}$. Sedangkan dalam intraksi lemah, pelanggaran paritas adalah maksimum $|A_{mp}|^2 = 1$. Ini berarti bahwa untuk menentukan paritas intrinsik dari sebuah partikel kita tidak dapat menggunakan interaksi lemah, tetapi dapat ditentukan dengan meninjau reaksi-reaksi yang meliputi interaksi kuat (hadronik) atau interaksi elektromagnetik. Karena paritas intrinsik tidak dapat ditetapkan secara unik untuk setiap partikel, biasanya digunakan sebuah konvensi. Misalnya, paritas intrinsik dari sebuah proton adalah +1, $\eta(proton) = +1$. Karena proton dan neutron membentuk sebuah *doublet isospin* maka kita mengambil paritas intrinsik neutron juga +1, $\eta(neutron) = +1$.

5.4.5. Pembalikan Waktu (*Time Reversal*)

Terhadap pembalikan waktu (*time reversal*), waktu dan ruang bertransformasi sebagai berikut:

$$T: \quad \begin{cases} t & \rightarrow \quad t' = -t \\ \vec{x} & \rightarrow \quad \vec{x}' = \vec{x} \end{cases}. \tag{5.165}$$

Sehingga besaran-besaran fisis momentum, momentum sudut dan spin bertransformasi,

$$\vec{p} \rightarrow -\vec{p}, \qquad \vec{L} \rightarrow -\vec{L}, \qquad \vec{\sigma} \rightarrow -\vec{\sigma}. \tag{5.166}$$

[4] Dalam mekanika kuantum, jika dua buah operator adalah komut maka keadaan eigennya dapat diperoleh secara serempak dari salah satu operatornya..

Misalkan $\hat{\Pi}$ adalah operator terhadap transformasi di atas, yaitu menyatakan sebuah operasi yang mentrasformasikan keadaan kuantumnya. Pertama kita tinjau bahwa terhadap $\hat{\Pi}$, hubungan komutasi berikut tidak invarian,

$$\left[\hat{q}_i,\ \hat{p}_j\right] = i\hbar\delta_{ij} \quad \rightarrow -i\hbar\delta_{ij}\,, \tag{5.167}$$

sehingga operator $\hat{\Pi}$ bukan sebuah operator uniter, *anti uniter*. Kita ingin membuat bahwa hubungan komutasi (5.167) invarian terhadap operator $\hat{\Pi}$. Maka terhadap $\hat{\Pi}$ kita harus mentransformasikan

$$\begin{cases} \hat{q}_i \rightarrow \Pi\ \hat{q}_i\ \Pi^{-1} = \hat{q}_i \\ \hat{p}_i \rightarrow \Pi\ \hat{p}_i\ \Pi^{-1} = -\hat{p}_i\,, \\ i \rightarrow -i \end{cases} \tag{5.168}$$

Sehingga hubungan komutasi (5.167) tetap invarian.

Contoh 5.7.

Tinjau sebuah transisisi dari keadaan awal $|i\rangle$ ke keadaan akhir $|f\rangle$ yang digambarkan oleh elemen matriks transisi $\langle f|T|i\rangle$ dimana

$$T = -V - V\frac{1}{E_a - H + i\varepsilon}V$$

Jika Hamiltonian tak terganggu H_0 dan Hamiltonian gangguan V ($H = H_0 + V$) invarian terhadap pembalikan waktu, apakah transisi tersebut juga invarian terhadap pembalikan waktu?

Jawab:

Jika Hamiltonian tak terganggu H_0 dan Hamiltonian gangguan V invarian terhadap pembalikan waktu maka kita memiliki

$$\hat{\Pi}\ H_0\ \hat{\Pi}^{-1} = H_0, \qquad \hat{\Pi}\ V\ \hat{\Pi}^{-1} = V \quad \rightarrow \hat{\Pi}\ H\ \hat{\Pi}^{-1} = H$$

Maka

$$\hat{\Pi}\, T\, \hat{\Pi}^{-1} = \hat{\Pi}\left(-V - V\frac{1}{E_a - H + i\varepsilon}V \right)\hat{\Pi}^{-1}$$

$$= -V - V\frac{1}{E_a - H - i\varepsilon}V = T^{\dagger}$$

Akibatnya transisisi dari keadaan awal $\left|i\right\rangle$ ke keadaan akhir $\left|f\right\rangle$,

$$\left\langle f\right|T\left|i\right\rangle = \left\langle f\right|\hat{\Pi}^{-1}\hat{\Pi}\,T\,\hat{\Pi}^{-1}\hat{\Pi}\left|i\right\rangle$$

$$= \left\langle f\right|\hat{\Pi}^{-1}T^{\dagger}\hat{\Pi}\left|i\right\rangle$$

$$= \left\langle f\right|T^{\dagger}\left|i\right\rangle = \left\langle f^{t}\right|T\left|i^{t}\right\rangle$$

Dimana keadaan yang ditransformasikan adalah

$$\left|i^{t}\right\rangle = T^{\dagger}\left|i\right\rangle = T\left|i\right\rangle \text{ dan } \left|f^{t}\right\rangle = T^{\dagger}\left|f\right\rangle = T\left|f\right\rangle$$

Contoh 5.8.

Tinaju sebuah proses hamburan dengan keadaan masuk dan keadaan keluar berturut-turut diberikan oleh

$$\left|a^{+}\right\rangle = \left|a\right\rangle + \frac{1}{E_a - H + i\varepsilon}V\left|a\right\rangle$$

$$\left|a^{-}\right\rangle = \left|a\right\rangle + \frac{1}{E_a - H - i\varepsilon}V\left|a\right\rangle$$

dimana keadaan tidak terganggu $\left|a\right\rangle$ diketahui memiliki momentum $\vec{p}$, komponen spin arah-z m_a dan semua keadaan kuantum lainya dinyatakan oleh α. Diketahui pula Hamiltonian tidak terganggu H_0 dan Hamiltonian gangguan V invarian terhadap pembalikan waktu, yaitu $\hat{\Pi}\,H_0\,\hat{\Pi}^{-1} = H_0$, $\hat{\Pi}\,V\,\hat{\Pi}^{-1} = V$. Jelaskan bagaimana transisi keadaan hamburan terhadap pembalikan waktu!

Jawab:

Pertama kita tentukan keadaan kuantum $\left|a\right\rangle$, $\left|a^{+}\right\rangle$ dan $\left|a^{-}\right\rangle$ sebagai berikut

$$\left|a\right\rangle \ = \left|\alpha,\ \vec{p}_\alpha,\ m_a\right\rangle$$

$$\left|a^+\right\rangle = \left|\alpha,\ \vec{p}_\alpha,\ m_a\right\rangle_{masuk}$$

$$\left|a^-\right\rangle = \left|\alpha,\ \vec{p}_\alpha,\ m_a\right\rangle_{keluar}$$

Maka terhadap $\hat{\Pi}$ kita memilki

- $\hat{\Pi}\left|a\right\rangle \ = \hat{\Pi}\left|\alpha,\ \vec{p}_\alpha,\ m_a\right\rangle = \left|\alpha,\ -\vec{p}_\alpha,\ -m_a\right\rangle$
- $\hat{\Pi}\left|a^+\right\rangle \ = \hat{\Pi}\left|\alpha,\ \vec{p}_\alpha,\ m_a\right\rangle_{masuk}$

$$= \left|\alpha,\ -\vec{p}_\alpha,\ -m_a\right\rangle_{masuk}$$

$$= \left|\alpha,\ -\vec{p}_\alpha,\ -m_a\right\rangle + \frac{1}{E_a - H - i\varepsilon} V \left|\alpha,\ -\vec{p}_\alpha,\ -m_a\right\rangle$$

- $\hat{\Pi}\left|a^-\right\rangle \ = \hat{\Pi}\left|\alpha,\ \vec{p}_\alpha,\ m_a\right\rangle_{keluar}$

$$= \left|\alpha,\ -\vec{p}_\alpha,\ -m_a\right\rangle_{keluar}$$

$$= \left|\alpha,\ -\vec{p}_\alpha,\ -m_a\right\rangle + \frac{1}{E_a - H + i\varepsilon} V \left|\alpha,\ -\vec{p}_\alpha,\ -m_a\right\rangle$$

Dari hasil di atas dapat dilihat bahwa

$$\hat{\Pi}\left|\alpha,\ \vec{p}_\alpha,\ m_a\right\rangle_{masuk} \ = \left|\alpha,\ -\vec{p}_\alpha,\ -m_a\right\rangle_{keluar}$$

$$\hat{\Pi}\left|\alpha,\ \vec{p}_\alpha,\ m_a\right\rangle_{keluar} \ = \left|\alpha,\ -\vec{p}_\alpha,\ -m_a\right\rangle_{masuk}$$

Misalkan kita tentukan keadaan awal dan keadaan akhir sebagai berikut

$$\left|i\right\rangle = \left|\alpha,\ \vec{p}_i,\ m_i\right\rangle, \qquad \left|f\right\rangle = \left|\beta,\ \vec{p}_f,\ m_f\right\rangle$$

Maka keadaan yang ditransformasikan adalah

$$\left|i^t\right\rangle = \hat{\Pi}\left|i\right\rangle = \left|\alpha,\ -\vec{p}_i,\ -m_i\right\rangle, \qquad \left|f^t\right\rangle = \hat{\Pi}\left|f\right\rangle = \left|\beta,\ -\vec{p}_f,\ -m_f\right\rangle$$

Dengan menggunakan contoh sebelumnya maka diperoleh

$$\begin{aligned} \left\langle f\right|T\left|i\right\rangle &= \left\langle \beta,\ \vec{p}_f,\ m_f\right| T \left|\alpha,\ \vec{p}_i,\ m_i\right\rangle \\ &= \left\langle \beta,\ -\vec{p}_i,\ -m_i\right| T \left|\alpha,\ -\vec{p}_f,\ -m_f\right\rangle \end{aligned} \tag{5.169}$$

Ungkapan di atas merupakan persamaan dua proses hamburan yang dapat diperoleh dengan cara membalik momentum dan komponen spin dan mempertukarkan keadaan awal dan akhir. Hubungan di atas dinamakan dengan *hubungan timbal-balik* (*reciprocity relation*) sebagai sebuah akibat dari invariansi terhadap pembalikan waktu.

5.5. Simetri Internal

Simetri dalam dunia fisika tidak selamanya dapat digambarkan secara lengkap dan jelas. Ketika simetri tidak teramati atau merupakan suatu perkakas teoritis, simetri biasanya akan memudahkan perumusan-perumusan hukum-hukum fisika. Simetri yang kita bahas sebelumnya adalah simetri dalam dunia eksternal, seperti rotasi dan translasi. Sekarang kita masuk ke bagian internalnya dan mempelajari jenis lain dari simetri yang dikenal sebagai *simetri internal*.

5.5.1. Kekekalan Muatan

(A) Kekalan Muatan Listrik

Peluruhan $e^- \to \nu + \gamma$ adalah tidak teramati (waktu hidupnya $\tau_e > 4.3\times 10^{23}$ tahun). Ini adalah sebuah konsekuensi dari kekekalan muatan listrik, muatan listrik adalah kekal dalam setiap proses. Ini merupakan konsekuensi dari invariansi Hamiltonian terhadap transformasi gauge global, $U_Q(1)$,

$$|\Psi\rangle \quad \to \quad |\Psi'\rangle = e^{i\hat{Q}\Lambda}|\Psi\rangle, \qquad \left[\hat{Q}, H\right] = 0 \tag{5.170}$$

Muatan listrik $\hat{Q}$ adalah generator dari grup gauge global $U_Q(1)$. Jika faktor fasa berubah pada setiap titik dalam ruang-waktu yaitu Λ sekarang sebagai fungsi dari ruang waktu $\Lambda = \Lambda(\vec{r}, t)$ maka transformasi gauge global berubah menjadi transformasi gauge lokal.

$$|\Psi\rangle \quad \to \quad |\Psi'\rangle = e^{i\hat{Q}\Lambda(\vec{r},t)}|\Psi\rangle \tag{5.171}$$

Jika transformasi gauge lokal kita terapkan pada suatu Lagrangian, maka setiap Lagrangian yang mengandung derivatif tidak invarian terhadap transformasi gauge lokal, mengganggu invarian gauge. Untuk menjaga tetap invarian maka perlu dikenalkan sebuah vektor A_μ yang terkopel dengan medan materi Ψ. Kopling universalnya adalah muatan listrik yang direpresentasikan oleh medan Ψ.

Pada level partikel, quantisasi dari muatan listrik dinyatakan oleh $q = N_q e$, yaitu muatan listrik q dari setiap hadron atau lepton adalah kelipatan integral dari muatan elementer e.

(B) Kekekalan Muatan Baryon

Tinjau dua buah proses peluruhan berikut ini

$$p \rightarrow e^- + \gamma$$
$$p \rightarrow e^- + \pi^0$$

Meskipun kedua proses tersebut diperbolehkan oleh hukum kekekalan muatan namun proses tersebut tidak teramati secara eksperimen ($\tau_p > 10^{32}$ tahun). Hal ini dapat dipahami dengan menyatakan muatan baryon B sebagai berikut:

$$B = \begin{cases} +1 \;\; untuk \;\; baryon \\ -1 \;\; untuk \;\; antibaryon \\ 0 \;\;\; untuk \;\; lepton \, dan \; meson \end{cases} \tag{5.172}$$

Serta memaksakan bahwa muatan baryon tersebut adalah memenuhi hukum kekekalan bersifat penambahan dalam setiap reaksi

$$\Delta B = B_f - B_i = 0 . \tag{5.173}$$

Sehingga proses peluruhan di atas diijinkan

$$\begin{array}{lccccccl} & p & \rightarrow & e^- & + & \pi^0 & & \\ B: & 0 & & 0 & & 0 & \rightarrow & \Delta B = B_f - B_i = 0 \end{array}$$

Transformasi gauge global pada mana Hamiltonian adalah invarian diberikan oleh

$$|\Psi\rangle \quad \rightarrow \quad |\Psi'\rangle = e^{i\hat{B}\Lambda} |\Psi\rangle, \qquad \left[\hat{B}, H\right] = 0 . \tag{5.174}$$

(C) Kekalan Muatan Lepton

Ada beberapa peluruhan lepton tidak teramati, ini akibat dari ketidakkekalan muatan lepton. Seperti muatan baryon, muatan lepton diberikan oleh

$$L = \begin{cases} +1 \;\; untuk \;\; lepton \\ -1 \;\; untuk \;\; antilepton \\ 0 \;\;\; untuk \;\; semua \; partikel \, lainnya \end{cases} \tag{5.175}$$

Untuk setiap reaksi juga harus dipaksakan bahwa muatan lepton L memenuhi hukum kekakalan bersifat penambahan

$$\Delta L = L_f - L_i = 0\,. \tag{5.176}$$

Sebagai contoh peluruhan netron menjadi proton, elektron dan antineutrino adalah diijinkan,

$$\begin{array}{llllllllll} & n & \rightarrow & p & + & e^- & + & \bar{\nu}_e & & \\ L: & 0 & & 0 & & 1 & & -1 & \rightarrow & \Delta L = L_f - L_i = 0 \end{array} \quad \text{(diijinkan)}$$

Contoh yang tidak diijinkan adalah

$$\begin{array}{llllllllll} & \bar{\nu}_e & + & (Z,A) & \rightarrow & (Z+1,A) & + & e^- & & \\ L: & -1 & & 0 & & 0 & & 1 & \rightarrow & \Delta L = 1-(-1) = 2 \end{array}$$

Transformasi gauge global pada mana Hamiltonian adalah invarian diberikan oleh

$$|\Psi\rangle \quad \rightarrow \quad |\Psi'\rangle = e^{i\hat{L}\Lambda}|\Psi\rangle, \qquad \left[\hat{L}, H\right] = 0\,. \tag{5177}$$

(D) *Strangeness* dan *Hypercharge*

Hadron dengan spin dan paritas yang sama terdapat di alam sebagai multiplet. Sebagai contoh tinjau meson $J^P = 0^-$. Kita membedakan triplet dari pions (π^+, π^0, π^-), doublet (K^+, K^0) dan $(\bar{K}^0, K^-)$ melalui sebuah bilangan kuantum baru yang dinamakan *strangeness S*, yaitu $S(\pi) = 0$, $S(K) = +1$ dan $S(\bar{K}) = -1$. Singlet η dan η' memiliki strangeness S = 0. Untuk baryon $J^P = \frac{1}{2}^+$ bilangan kuantum *strangeness*-nya diberikan sebagai berikut: untuk doublet (p, n), S = 0, untuk triplet $(\Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-)$, S = – 1, untuk singlet Λ^0, S = – 1 dan untuk doublet (Ξ^0, Ξ^-), S = – 2. *Strangeness* beserta atribiut baryon kemudian dinyatakan oleh *hypercharge* $Y = B + S$.

Dalam interaksi hadronik, bilangan kuantum S kekal secara penjumlahan, yaitu dalam setiap proses yang meliputi interaksi hadronik ΔS harus sama dengan nol,

$$\Delta S = S_f - S_i = 0\,. \tag{5.178}$$

Ini memberikan gambaran bahwa dalam tumbukan hadronik, *partikel strange* dihasilkan berpasangan. Oleh karena bilangan kuantum B dan S adalah kekal jelaslah pula *hypercharge* Y juga kekal. Transformasi gauge global pada mana Hamiltonian adalah invarian diberikan oleh

$$|\Psi\rangle \quad \to \quad |\Psi'\rangle = e^{i\hat{Y}\Lambda}|\Psi\rangle, \qquad \left[\hat{Y},\, H\right] = 0. \tag{5.179}$$

Sebagai catatan bahwa *hypercharge* dari sebuah multiplet sama dengan dua kali muatan rata-rata multiplet tersebut, yaitu

$$Y = 2\,\langle Q\rangle = 2\langle q/e\rangle. \tag{5.180}$$

Sebagai contoh untuk *triplet* pion (π^+,π^0,π^-), $\langle Q\rangle = 0$ dan $Y = 0$, untuk *doublet* (p,n), $\langle Q\rangle = 1/2$ dan $Y = 1$, sedangkan untuk doublet $(\bar{K}^0,K^-)$ atau (Ξ^0,Ξ^-), $\langle Q\rangle = 1/2$ dan $Y = -1$.

(E) *Isospin*

Ada sifat-sifat internal yang lain dimana partikel dapat dibedakan satu dengan yang lain, dinamakan *isospin*. Sebagai contoh, bilangan kuantum *isospin* untuk *triplet* pion (π^+,π^0,π^-), I = 1, I_3 = +1, 0, –1, untuk doublet (p,n), I = ½, I_3 = +1/2 dan –1/2. Konsep *isospin* sangat penting ketika dalam interaksi hadronik, *isospin* adalah kekal.

Dalam ruang *isospin* $\vec{I} \equiv (I_1,I_2,I_3)$, operator $\hat{I}$ memenuhi hubungan komutasi sebagai berikut

$$\left[\hat{I}_i,\, \hat{I}_j\right] = i\varepsilon_{ijk}\hat{I}_k, \qquad i,j,k = 1,2,3. \tag{5.181}$$

Konsekuensi dari hubungan komutasi ini, kita dapat mencari sebuah himpunan lengkap dari keadaan eigen $|I\ I_3\rangle$ dari $\hat{I}^2$ dan $\hat{I}_3$. Persamaan nilai eigennya adalah

$$\hat{I}^2\,|I\ I_3\rangle = I(I+1)\,|I\ I_3\rangle, \tag{5.182a}$$

$$\hat{I}_3\,|I\ I_3\rangle = I_3\,|I\ I_3\rangle. \tag{5.182b}$$

Operator $\hat{I}_3$ memiliki (2I + 1) nilai eigen: $-I,\cdots,+I$ dan nilai eigen yang mungkin untuk I adalah $I = 0,1/2,1,3/2,2,\cdots$. Sebagai contoh nukleon memiliki isospin I = ½ dan komponen ketiga, I_3, memiliki nilai eigen +1/2 untuk proton(p) dan –1/2 untuk neutron (n) sehingga dapat dituliskan keadaan eigen dari proton dan netron dinotasikan sebagai berikut:

$$|p\rangle = |\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle, \qquad |n\rangle = |\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle. \tag{5.183}$$

Proton adalah *isospin up* dan neutron adalah *isospin down*. Untuk pion dinyatakan sebagai berikut:

$$|\pi^+\rangle = |1\,1\rangle, \qquad |\pi^0\rangle = |1\;0\rangle, \qquad |\pi^-\rangle = |1\;-1\rangle. \tag{5.184}$$

Muatan dari suatu keadaan (state) diberikan oleh hubungan Gell-Mann-Nishijima,

$$Q = (q/e) = I_3 + \frac{Y}{2}. \tag{5.185}$$

Akibat dari muatan yang tidak bergantung pada gaya hadronik, gaya ini tidak berubah arahnya dalam ruang isospin. Ini berarti bahwa ineraksi hadronik adalah invarian terhadap rotasi sehingga Hamiltonian hadronik H_h komut dengan operator rotasi

$$U_I = e^{-i\hat{\alpha}\cdot\hat{I}}, \qquad \hat{\alpha} = \omega\hat{n}. \tag{5.186a}$$

dalam ruang isospin,

$$[H_h, U_I] = 0. \tag{5.186b}$$

Dalam hal ini $\hat{I}$ adalah generator dari sebuah grup rotasi dalam ruang isospin. Rotasi infinitesimal-nya adalah

$$U_I = 1 - i\hat{\alpha}\cdot\hat{I}. \tag{5.187}$$

Sehingga kita memperoleh

$$\left[H_h, \hat{I}\right] = 0. \tag{5.188}$$

Yakni isospin adalah kekal dalam setiap proses yang meliputi interaksi hadronik. Jadi kaidah seleksi adalah

$$\Delta|I|^2 = 0, \qquad \Delta I_3 = 0. \tag{5.189}$$

Contoh 5.9.

Tinjau hamburan hadronik pion dengan proton sebagai berikut

$$\pi^- + p \begin{cases} \to K^0 + \Lambda^0 \\ \to K^- + \Sigma^+ \\ \to K^- + p \\ \to n + K^+ + K^- \end{cases}$$

Manakah dari reaksi tersebut diijinkan?

Jawab:

Tumbukan di atas diijinkan bila bilangan kuantum S kekal secara penjumlahan $\Delta S = 0$. Untuk reaksi pertama kita memiliki

$$\begin{array}{lccccc} & \pi^- + p & \to & K^0 + \Lambda^0 \\ S: & 0 \quad\; 0 & & +1 \quad -1 \end{array}$$

Sehinga $\Delta S = 0$ (diijinkan). Untuk reaksi kedua

$$\begin{array}{lcccc} & \pi^- + p & \to & K^- + \Sigma^+ & \\ S: & 0 \quad\; 0 & & -1 \quad -1 & \to \Delta S = -2\,(tidak\, diijinkan) \end{array}$$

Untuk reaksi ketiga

$$\begin{array}{lcccc} & \pi^- + p & \to & K^- + p & \\ S: & 0 \quad\; 0 & & -1 \quad 0 & \to \Delta S = -1\,(tidak\, diijinkan) \end{array}$$

Untuk reaksi keempat

$$\begin{array}{lcccc} & \pi^- + p & \to & n + K^+ + K^- & \\ S: & 0 \quad\; 0 & & 0 \quad +1 \quad -1 & \to \Delta S = 0\,(diijinkan) \end{array}$$

5.5.2. Konjugasi Muatan (*Charge Conjugation*)

Semetri internal lain yang akan kita pelajari sekarang adalah konjugasi muatan, C. Simetri ini terkait dengan simetri partikel-antipartikel, dimana terhadap operasi konjugasi muatan, muatannya berubah tanda. Dan tentunya mengubah masing-masing partikel menjadi anti partikelnya. Sebuah operator uniter U_C yang mengubah partikel menjadi anti partikelnya bekerja sebagai berikut:

$$C: \quad |p\rangle \quad \to \quad U_C|p\rangle = |\bar{p}\rangle, \tag{5.190}$$

dimana $|p\rangle$ adalah keadaan dari partikel dan $|\bar{p}\rangle$ adalah keadaan dari anti partikelnya. Secara umum, untuk sebuah partikel tunggal yang memiliki muatan Q, momentum $\vec{p}$ dan $\vec{s}$, terhadap operator uniter U_C keadaan partikel tunggal tersebut $|Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle$ bertransformasi sebagai berikut:

$$C: \quad |Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle \quad \to \quad U_C|Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle = |-Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle. \tag{5.191}$$

Sekarang kita tinjau persamaan nilai eigen dimana sebuah operator $\hat{Q}$, bekerja pada U_C keadaan partikel tunggal $|Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle$,

$$\hat{Q}|Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle = q|Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle. \qquad (5.192)$$

Disini q adalah nilai eigen dari operator $\hat{Q}$ yang terkait dengan keadaan eigen $|Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle$. Maka terhadap operator uniter U_C kita memiliki

$$U_C\,\hat{Q}|Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle = q\left(U_C|Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle\right) = q|-Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle. \qquad (5.193a)$$

$$\hat{Q}U_C|Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle = \hat{Q}|-Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle = -q\,|-Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle. \qquad (5.193b)$$

Dari kedua persamaan di atas diperoleh

$$\left(U_C\,\hat{Q} + \hat{Q}\,U_C\right)|Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle = 0|-Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle$$

Maka untuk $|Q,\ \vec{p},\ \vec{s}\rangle \neq 0$ kita memiliki

$$U_C\,\hat{Q} + \hat{Q}\,U_C = 0, \qquad atau \qquad \left\{U_C\,,\hat{Q}\right\} = 0. \qquad (5.194)$$

Jadi U_C dan $\hat{Q}$ tidak komut dan tidak mungkin untuk memperoleh keadaan eigen U_C dan $\hat{Q}$ secara serempak.

Selain mengubah tanda dari muatan konjugasi muatan juga dapat bekerja pada partikel bermuatan netral seperti neutron menjadi antineutronnya. Dan pula mengubah semua bilangan kuantum internal seperti bilangan baryon, bilangan lepton, *strangeness, hypercharge*, secara umum dapat dituliskan

$$U_C|Q,\ I_3,\ B,\ Y,\ L\rangle = |-Q,\ -I_3,\ -B,\ -Y,\ -L\rangle. \qquad (5.195)$$

Sehingga kita memperoleh,

$$\left[U_C\,,\hat{Q}\right] \neq 0,\ \ \left[U_C\,,\hat{I}_3\right] \neq 0,\ \ \left[U_C\,,\hat{B}\right] \neq 0,\ \ \left[U_C\,,\hat{Y}\right] \neq 0,\ \ \left[U_C\,,\hat{L}\right] \neq 0. \qquad (5.196)$$

Untuk mencari nilai eigen dari operator U_C kita tinjau, sebagai contoh,

$$\begin{aligned} &U_C|B\rangle = |-B,\rangle \\ &U_C^2|B\rangle = U_C\left(U_C|B\rangle\right) = U_C|-B,\rangle = |B\rangle \end{aligned}. \qquad (5.197)$$

Sehingga diperoleh

$$U_C^2 = 1. \tag{5.198}$$

Jadi nilai eigen dari U_C adalah ± 1, dan U_C adalah sebuah transformasi diskrit. Dari persamaan (5.195) bahwa keadaan dengan $Q \neq 0$, $I_3 \neq 0$, $B \neq 0$, $Y \neq 0$ dan $L \neq 0$ tidak dapat menjadi keadaan eigen dari U_C. Akan menjadi keadaan eigen dari U_C jika $Q = 0$, $I_3 = 0$, $B = 0$, $Y = 0$ dan $L = 0$. Sehingga kita harus mendefinisikan sebuah paritas konjugasi muatan η_C sebagai berikut:

$$U_C |B = 0\rangle = \eta_C |B = 0\rangle, \tag{5.199}$$

dimana

$$\eta_C^2 = 1 \qquad \textit{atau} \qquad \eta_C = \pm 1. \tag{5.200}$$

dan η_C adalah sebuah bilangan kuantum kekal bersifat perkalian (*multiplicative*) untuk setiap proses dalam mana paritas konjugasi muatan (kita sebut *C-paritas*) kekal. C-paritas memiliki dua nilai kalau tidak + 1 maka -1 .[5]

Seperti dalam pembahasan sebelumnya, konjugasi muatan adalah sebuah simetri internal dan haruslah memenuhi

$$[U_C, H] = 0. \tag{5.201}$$

Sehingga setiap interaksi yang terkait adalah invarian terhadap konjugasi muatan U_C. Interaksi kuat dan interaksi elektromagnetik adalah invarian terhadap konjugasi muatan U_C

$$[U_C, H_S] = 0, \qquad [U_C, H_{EM}] = 0, \tag{5.202}$$

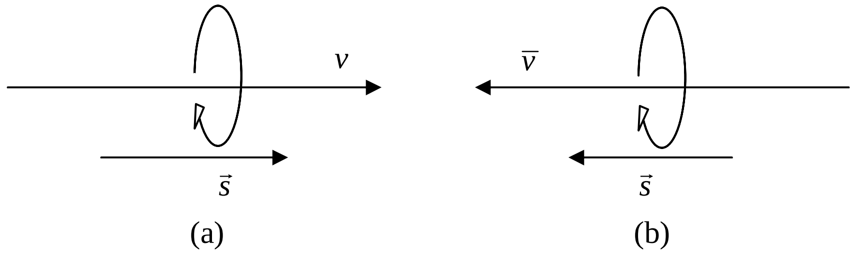
dimana H_S dan H_{EM} berturut-turut adalah Hamiltonian interaksi kuat dan interaksi elektromagnetik. Tetapi interaksi lemah tidak invarian terhadap konjugasi muatan U_C dengan kata lain bahwa konjugasi muatan bukan merupakan simetri dari interaksi lemah,

$$[U_C, H_W] \neq 0. \tag{5.203}$$

Kasus ini terjadi ketika kita menerapkan konjugasi muatan untuk neutrino dan antineutrino. Neutrino memiliki helisitas –1 (Neutrino skrup putar kiri maka terhadap konjugasi muatan seharusnya menghasilkan antineutrino skrup putar kiri. Namun dalam

[5] Dalam beberapa buku teks nilai ini sering dinamakan sebagai *bilangan konjugasi muatan*.

eksperimen ditemukan bahwa semua neutrino memiliki helisitas –1 (*left handed*) dan semua antineutrino memiliki helisitas +1 (*right handed*)[6].



Gambar 5.9. Helisitas (a) Skrup putar kanan (*Right handed*) , helisitas +1.

Untuk mengetahui bagaimana konjugasi muatan dalam interaksi kuat, kita tinjau reaksi berikut

$$\begin{aligned} \bar{p} + p \ &\rightarrow \pi^+ + h \\ &\rightarrow \pi^- + \bar{h} \end{aligned}$$

Pada rekasi di atas h dan $\bar{h}$ adalah hadron yang lain dengan B = 0 dan berturut-turut memiliki muatan listrik positif dan negatif. Asumsikan bahwa operator S adalah invarian terhadap U_C, $U_C\ S\ U_C^{-1} = S$, maka untuk rekasi pertama kita memiliki

$$\begin{aligned} \langle \bar{p}\ p |\ S\ | \pi^+\ h \rangle &= \langle \bar{p}\ p | U_C^{-1} U_C\ S\ U_C^{-1} U_C | \pi^+\ h \rangle \\ &= \langle \bar{p}\ p | U_C^{-1}\, S U_C | \pi^+\ h \rangle \\ &= \langle p\ \bar{p} |\ S | \pi^-\ \bar{h} \rangle \end{aligned} \tag{5.204}$$

Sekarang kita tinjau

$$\begin{aligned} \langle p\ \bar{p} |\ S | \pi^-\ \bar{h} \rangle &= \langle p\ \bar{p} | U_C^{-1} U_C\ S\ U_C^{-1} U_C | \pi^-\ \bar{h} \rangle \\ &= \langle p\ \bar{p} | U_C^{-1}\, S U_C | \pi^-\ \bar{h} \rangle \end{aligned}$$

[6] Gambar 5.9 memperlihatkan antineutrino dengan helisitas + 1 (a) dan neutrino dengan helisitas –1 (b). Helisitas terkait dengan perbandingan antara nilai momentum sudut spin dan spin partikel (m_s/s). Helisitas partikel adalah +1, dinamakan skrup putar kanan (*right handed*), jika arah spin (s) dan arah kecepatannya adalah sejajar dan helisitas partikel adalah –1, dinamakan skrup putar kiri (*left handed*), jika arah spin (s) dan arah kecepatannya berlawanan arah (antisejajar). Namun definisi yang tepat untuk helisitas skrup putar kanan atau kiri didefinisikan melalui operator proyeksi.

$$= \langle \bar{p}\ p | S | \pi^+\ h \rangle \tag{5.205}$$

Jadi pion positif dan pion negatif memiliki spektrum energi yang sama, invarian terhadap konjugasi muatan.

Selanjutnya kita tinjau untuk kasus interaksi elektromagnetik. Foton (γ), π^0 dan η^0 dapat menjadi keadaan eigen dari U_C. Sekarang kita tentukan C-paritas dari keadaan-keadaan tersebut. Terhadap U_C , arus elektromagnetik j_μ bertransformasi sebagai berikut:

$$U_C: \quad j_\mu \to -j_\mu \ . \tag{5.206}$$

Dalam teori medan elektromagnetik, medan elektromagnetik A_μ diberikan oleh persamaan,

$$\Box^2 A_\mu = j_\mu \ . \tag{5.207}$$

Sehingga terhadap U_C, medan elektromagnetik A_μ bertransformasi menjadi

$$U_C: \quad A_\mu \to -A_\mu \ . \tag{5.208}$$

Karena foton adalah medan elektromagnetik kuantum, maka perubahan tanda terhadap konjugasi muatan mengahasilkan C–paritas dari foton –1 yaitu:

$$\eta_C(\gamma) = -1 . \tag{5.209}$$

Foton dapat dihasilkan melalui peluruhan π^0 dan η^0 yang masing-masing menghasilkan dua foton: $\pi^0 \to \gamma + \gamma$ dan $\eta^0 \to \gamma + \gamma$. Karena dalam setiap proses yang mempertahankan C-paritas terkait dengan bilangan kuantum bersifat perkalian maka kita memperoleh

$$\eta_C(\pi^0) = +1, \qquad \eta_C(\eta^0) = +1 . \tag{5.230}$$

$$\begin{array}{ccc} \pi^0 \to & \gamma \ + & \gamma \\ +1 & \underbrace{-1 \quad\ -1}_{+1} & \end{array}$$

Sebelum +1

Sesudah +1

Dari sini dapat dipahami bahwa peluruhan π^0 dan η^0 tidak pernah menghasilkan tiga buah foton.

Berikutnya kita tinjau untuk positronium, keadaan terikat dari e^- dan e^+ yang keduanya hanya berbeda dalam muatan listriknya. Misalkan e^- dan e^+ dalam keadaan (l,s) maka dengan memperumum prinsip Pauli untuk positronium yaitu *terhadap pertukaran total partikel (yang terdiri dari perubahan simultan label Q,* $\vec{r}$ (ruang) *dan s), keadaan (state) akan berubah tanda atau antisimetrik*. Terhadap pertukaran koordinat ruang diperoleh faktor $(-1)^l$, terhadap pertukaran koordinat spin diperoleh faktor $(-1)^{s+1}$ (s = 0 untuk keadaan singlet dan s = 1 untuk keadaan triplet) dan terhadap pertukaran muatan listrik menghasilkan faktor η_C. Maka keadaan atisimetriknya adalah

$$(-1)^l\ (-1)^{s+1}\eta_C = -1\,, \tag{5.231}$$

Sehingga:

$$\eta_C = (-1)^{l+s}\ . \tag{5.232}$$

Persamaan (5.232) memberikan paritas konjugasi muatan dari positronium ($e^-\ e^+$) dalam keadaan (l,s).

Positronium ($e^-\ e^+$) dapat meluruh menjadi *n* buah foton (γ) melalui interaksi elektromagnetik. Kekekalan paritas konjugasi muatan (C-paritas) menghasilkan

$$(-1)^{l+s} = (-1)^n\ . \tag{5.233}$$

Dan kita memperoleh kaidah seleksinya sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll} l = 0 = s: & {}^1S_0 \ \rightarrow\ \gamma+\gamma\ \ (diijinkan) \\ & {}^1S_0 \ \rightarrow\ \gamma+\gamma+\gamma\ \ (dilarang) \\ l = 0, s = 1: & {}^3S_1 \ \rightarrow\ \gamma+\gamma\ \ (dilarang) \\ & {}^3S_1 \ \rightarrow\ \gamma+\gamma+\gamma\ \ (diijinkan) \end{array}$$

5.5.3. G-Paritas

Sebagaimana telah kita pelajari pada pasal sebelumnya hanya sedikit partikel (partikel yang berinteraksi kuat dan elektromagnetik) yang dapat memiliki keadaan eigen dari operator konjugasi muatan. Pada pasal ini kita akan membahas perluasan dari simetri ini dengan membatasi pada partikel-partikel yang mengalami interaksi kuat. Kita akan mempelajari sebuah operator baru yang dinamakan $\hat{G}-paritas$, yaitu sebuah operator gabungan antara konjugasi muatan, C, dan rotasi 180^0 disekitar sumbu ke-2 dalam ruang isospin R_2,

$$G = C\,R_2 \quad \text{dimana} \quad R_2 = e^{i\pi I_2}\,. \tag{5.234}$$

Terhadap rotasi 180^0 disekitar sumbu ke-2 dalam ruang isospin akan mengubah I_3 menjadi $-I_3$. Sebagai contoh dalam diagram bobot Gambar 5.4, rotasi ini akan mengubah partikel pion π^+ menjadi π^-. Jika kita melanjutkan dengan menerapkan operator konjugasi muatan, maka akan diperoleh kembali π^+. Sehingga pion bermuatan merupakan keadaan eigen dari operator $\hat{G}-paritas$, meskipun keduannya bukan keadaan eigen dari konjugasi muatan. Untuk interaksi kuat, baik isospin maupun C-paritas adalah kekal, jadi interaksi kuat adalah invarian terhadap $\hat{G}-paritas$,. Tetapi untuk interaksi lemah dan elektromagnetik tidak invarian terhadap $\hat{G}-paritas$,

$$\left[\hat{G},\,H_S\right]=0, \qquad \left[\hat{G},\,H_W\right]\neq 0, \qquad \left[\hat{G},\,H_{EM}\right]\neq 0\,, \tag{5.235}$$

Contoh 5.10.

Tentukanlah G-paritas dari pion, $G(\pi)$?

Jawab.

Terhadap rotasi 180^0 disekitar sumbu ke-2 dalam ruang isospin R_2, kita memiliki

$$R_2: \quad |\pi_1\rangle \rightarrow R_2|\pi_1\rangle = e^{i\pi I_2}\,|\pi_1\rangle = \left(\cos\pi + i\,I_2\sin\pi\right)|\pi_1\rangle = -|\pi_1\rangle\,,$$

$$R_2: \quad |\pi_2\rangle \rightarrow R_2|\pi_2\rangle = e^{i\pi I_2}\,|\pi_2\rangle = \left(\cos\pi + i\,I_2\sin\pi\right)|\pi_2\rangle = -|\pi_2\rangle\,,$$

$$R_2: \quad |\pi_3\rangle \rightarrow R_2|\pi_3\rangle = e^{i\pi I_2}\,|\pi_3\rangle = \left(\cos\pi + i\,I_2\sin\pi\right)|\pi_3\rangle = -|\pi_3\rangle\,,$$

Maka untuk pion

$$R_2: \quad |\pi^+\rangle \rightarrow -|\pi^-\rangle, \qquad |\pi^0\rangle \rightarrow -|\pi^0\rangle, \qquad |\pi^-\rangle \rightarrow -|\pi^+\rangle$$

Kemudian terhadap konjugasi muatan

$$U_C: \quad |\pi^+\rangle \rightarrow |\pi^-\rangle, \qquad |\pi^0\rangle \rightarrow |\pi^0\rangle, \qquad |\pi^-\rangle \rightarrow |\pi^+\rangle$$

Maka terhadap G-paritas

$$G = C\,R_2\ :\qquad \left|\pi^+\right\rangle \to -\left|\pi^+\right\rangle,\qquad \left|\pi^0\right\rangle \to -\left|\pi^0\right\rangle,\qquad \left|\pi^-\right\rangle \to -\left|\pi^-\right\rangle$$

Jadi G-paritas dari pion adalah $G(\pi) = (-1)^3 = -1$. Untuk sebuah keadaan dengan *n* pion maka G-paritasnya adalah $G(\pi) = (-1)^n$.

5.6. Kekekalan Muatan Warna

Selain derajat kebebasan ruang dan spin, quark juga memiliki atribut lain yang dinamakan warna (c*olour*)[7]. Fungsi gelombang totalnya dapat dinyatakan sebagai hasilkali dari fungsi gelombang bagian ruang $\psi(\vec{x})$, bagian spin χ dan warna χ^C yaitu

$$\Psi = \psi(\vec{x})\chi\chi^C . \tag{5.236}$$

Penggabungan fungsi gelombang ruang dan spin adalah simetrik terhadap pertukaran quark pada flavour yang sama, sehingga fungsi gelombang warna menjadi antisimetrik. Terkait dengan fungsi gelombang warna, ada bilangan kuantum yang kekal yang dinamakan *muatan warna*. Muatan warna memiliki peran yang sangat penting dalam interaksi kuat seperti halnya muatan listrik dalam interaksi elektromagnetik.

Tabel 5.11. Nilai-nilai muatan warna

Quark			Antiquark		
	I_3^C	Y^C		I_3^C	Y^C
r	1/2	1/3	$\bar{r}$	– 1/2	– 1/3
g	– 1/2	1/3	$\bar{g}$	1/2	– 1/3
b	0	– 2/3	$\bar{b}$	0	2/3

Asumsi dasar dari teori muatan warna, bahwa setiap quark $q = u, d, s, ...$ dapat berada dalam tiga keadaan warna yang berbeda $\chi^C = r, g, b$ (*red, green, blue*). Keadaan spin $\chi = \alpha, \beta$ berhubungan dengan nilai berbeda dari komponen spin S_z, sedangkan

---

[7] Setelah Greenberg pada tahun 1964 memberikan jawaban atas perbedaan antara model quark dan prinsip Pauli.

keadaan warna χ^C berhubungan dengan nilai berbebeda dari dua muatan warna yang dinamakan *hypercharge warna* Y^C dan *muatan isospin warna* I_3^C, nilai-nilainya tertera dalam Tabel 5.11. Nilai-nilai untuk keadaan lain yang terkomposisi dari quark dan antiquark memenuhi bilangan kuantum bersifat penjumlahan, seperti muatan listrik, nilainya untuk partikel dan antipartikel adalah sama dalam besar tetapi berlawanan tanda. Dengan demikian terhadap konjugasi muatan, sebuah quark q dalam keadaan r (*red*) ditransformasikan menjadi sebuah quark $\overline{q}$ dalam keadaan warna $\chi^C = \overline{r}$

Dari Tabel 5.11 tampak jelas bahwa penjumlahan muatan warna dari tiga quark menghasilkan $I_3^C = Y^C = 0$. Ini dipenuhi untuk baryon yang terkomposisi dari *r-quark*, *g-quark* dan *b-quark*. Dan hadron dapat diamati sebagaimana sebuah partikel terisolasi dalam ruang bebas. Bentuk umum dari fungsi gelombang warna untuk sebuah baryon adalah superposisi linier dari enam kombinasi yang mungkin, yaitu

$$\chi_B^C = \alpha_1 r_1 g_2 b_3 + \alpha_2 g_1 b_2 r_3 + \alpha_3 b_1 r_2 g_3 + \alpha_4 b_1 g_2 r_3 + \alpha_5 g_1 r_2 b_3 + \alpha_6 r_1 b_2 g_3 . \qquad (5.237)$$

dimana $\alpha_i (i = 1,2,3,4,5,6)$ adalah konstanta-konstanta dan r_1 (dan seterusnya) menyatakan bahwa quark kesatu berada dalam keadaan r. Jika kita memilih kombinasi antisimetriknya maka

$$\chi_B^C = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[r_1 g_2 b_3 + g_1 b_2 r_3 + b_1 r_2 g_3 - b_1 g_2 r_3 - g_1 r_2 b_3 - r_1 b_2 g_3\right]. \qquad (5.238)$$

Persamaan (238) adalah syarat dimana pengurungan warna (colour confinement). Sekarang kita gunakan syarat ini untuk mempelajari kombinasi m quark dan n antiquark. $q^m \overline{q}^n$ untuk $m \geq n$ dimana bilangan baryon adalah positif, termasuk nol, $B \geq 0$. Sehingga fungsi gelombang warna untuk kasus ini adalah

$$r^\alpha g^\beta b^\gamma \overline{r}^{\overline{\alpha}} \overline{g}^{\overline{\beta}} \overline{b}^{\overline{\gamma}} . \qquad (5.239)$$

Disini r^α berarti bahwa ada α buah quark dalam keadaan r dan seterusnya,

$$m = \alpha + \beta + \gamma > n = \overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} . \qquad (5.240)$$

Dengan menggunakan syarat $I_3^C = Y^C = 0$ untuk fungsi gelombang warna (5.239) maka dapat diperoleh Y^C dan I_3^C, yaitu

$$I_3^C = \frac{1}{2}\left(\alpha - \overline{\alpha}\right) - \frac{1}{2}\left(\beta - \overline{\beta}\right), \qquad (5.241a)$$

$$Y^C = \frac{1}{3}(\alpha - \overline{\alpha}) + \frac{1}{3}(\beta - \overline{\beta}) - \frac{2}{3}(\gamma - \overline{\gamma}). \tag{5.241b}$$

Akibatnya

$$(\alpha - \overline{\alpha}) = (\beta - \overline{\beta}) = (\gamma - \overline{\gamma}) \equiv p. \tag{5.242a}$$

$$m - n = 3p. \tag{5.242b}$$

Disini p adalah bilangan bulat tidak negatif. Sehingga kombinasi $q^m \overline{q}^n$ yang diijinkan oleh pengurungan warna adalah

$$q^m \overline{q}^n = q^{3p+n} \overline{q}^n = (3q)^p (q\overline{q})^n. \tag{5.243}$$

Sedangkan yang tidak diijinkan adalah dalam bentuk

$$qq, qq\overline{q}, qqqq, ...$$

Sekarang kita memanfaatkan operator matriks-matriks Gell-Mann $F_A = (1/2)\lambda_A$ untuk memperoleh fungsi gelombang dan operator warna untuk baryon sehingga fungsi gelombang antisimetrik total (5.238) diijinkan oleh pengurungan warna. Tiga buah fungsi gelombang warna yang bebas $\chi^C = r, g, b$ dari sebuah quark dinyatakan oleh *spinor warna*,

$$r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},. \tag{5.244}$$

Dan fungsi gelombang spin $\chi = \alpha, \beta$ adalah

$$\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5.245}$$

Dengan menggunakan matriks-matriks Gell-Mann $F_A = (1/2)\lambda_A$, mudah diperoleh untuk keadaan r adalah

$$F_3 r = \frac{1}{2} r, \qquad F_8 r = \frac{1}{2\sqrt{3}} r. \tag{5.246}$$

Seperti yang kita bahas sebelumnya, Y^C dan I_3^C adalah nilai-nilai egen dari operator

$$I_3^C = F_3, \qquad Y^C = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8. \tag{5.247}$$

Sehingga kita memperoleh $I_3^C = 1/2$ dan $Y^C = 1/3$, lihat Tabel 5.11. (Nilai-nilai yang lain dapat diturunkan dengan cara yang serupa). Dan mengikuti penurunan sebelumnya, persamaan (5.174) kita memiliki

$$\left[F_A, H\right] = 0\,. \tag{5.248}$$

Jadi pengurungan warna mensyaratkan bahwa kedelapan muatan warna lenyap untuk setiap hadron yang teramati, *h*, akibatnya

$$F_A \chi_h^C = 0\,. \tag{5.249}$$

Persamaan ini mengingatkan kembali kepada keadaan spin singlet dimana ketiga komponen spin lenyap yang berhubungan dengan fungsi gelombang spin,

$$S_x\chi = 0, \qquad S_y\chi = 0, \qquad S_z\chi = 0\,. \tag{5.250}$$

Syarat pengurungan (5.249) akan menghasilkan fungsi gelombang warna lengkap yang berlaku untuk untuk setiap baryon. Dengan mengerjakan operator Gell-Mann pada masing-masing suku persamaan (5.237) serta syarat (5.249) maka diperoleh hubungan antara konstanta-konstanta $\alpha_i\,(i = 1,2,3,4,5,6)$ sebagai berikut

$$\alpha_1 = -\alpha_2, \qquad \alpha_3 = -\alpha_4, \qquad \alpha_5 = -\alpha_6\,. \tag{5.251}$$

Dan persamaan (5.238) adalah konsisten.

Contoh 5.11.

Buktikan hubungan berikut dengan menggunakan operator Gell-Mann

$$F_1\, r = \frac{1}{2} g, \qquad F_1\, g = \frac{1}{2} r, \qquad F_1\, b = 0$$

Jawab:

Untuk operator Gell-Mann F_1 kita memiliki

$$F_1 = \lambda_1 / 2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Maka

$$F_1 r = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} g \Rightarrow F_1 r = \frac{1}{2} g$$

$$F_1 g = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} r \Rightarrow F_1 g = \frac{1}{2} r$$

$$F_1 b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow F_1 b = 0$$

Rangkuman

- Himpunan dari elemen-elemen *A*, *B*, *C*, … dikatakan membentuk sebuah grup *G* jika elemen-elemen dari grup memenuhi 4 kaidah berikut:

  Identitas : $A \circ I = I \circ A = A$.

  Tertutup (*closure*) : $\begin{matrix} A, B, C \in G \\ A \circ B = C \in G \end{matrix}$.

  Inverse. : $A \circ A^{-1} = A^{-1} \circ A = I$.

  Asosiatif. : $A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$.

- Operasi-operasi grup:

  Perkalian langsung (*Direct product*)

  Perkalian langsungnya dinyatakan secara simbolik dengan

  $$P = S \otimes T \ .$$

  Jumlah langsung (*Direct sum*)

  Jumlah langsung dari dua grup dinyatakan dengan simbol

  $$P = S \oplus T \ .$$

  Transformasi sembarang vektor ϕ_i (i = 1, 2, ..., N) dalam ruang vektor N-dimensi.ini diberikan oleh

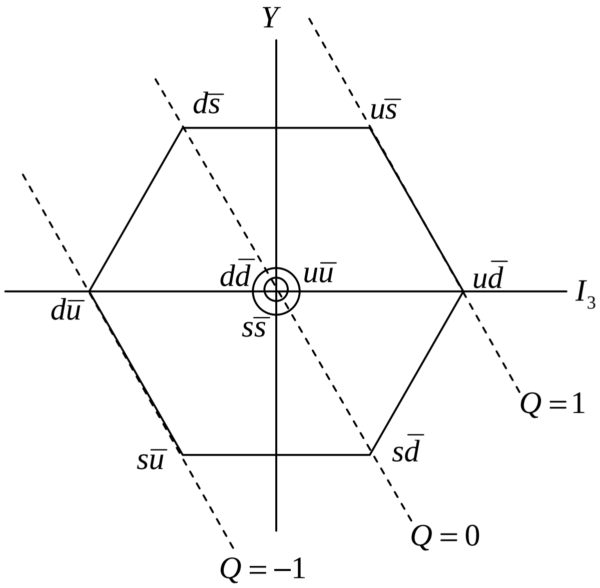
  $$\phi_i \quad \rightarrow \quad \phi_i' = A_i^j \phi_i, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, N \ ,$$

dimana A_i^j adalah matriks *N* x *N*. Maka grup uniter (*unitary group*) *U*(*N*) dalam *N*-dimensi adalah grup yang memenuhi transformasi-transformasi persamaan (5.14) dengan syarat uniternya adalah

$$A_i^{*k} A_j^k = \left(A^\dagger\right)_k^i A_j^k = \delta_i^j \text{, atau} \quad A^\dagger A = 1$$

Sedangkan grup uniter khusus (*special unitary group*) *N*-dimensi, SU(N), adalah grup uniter U(N) dengan determinan dari matriks A_i^j sama dengan satu, $\det A = 1$.

- Diagram bobot meson

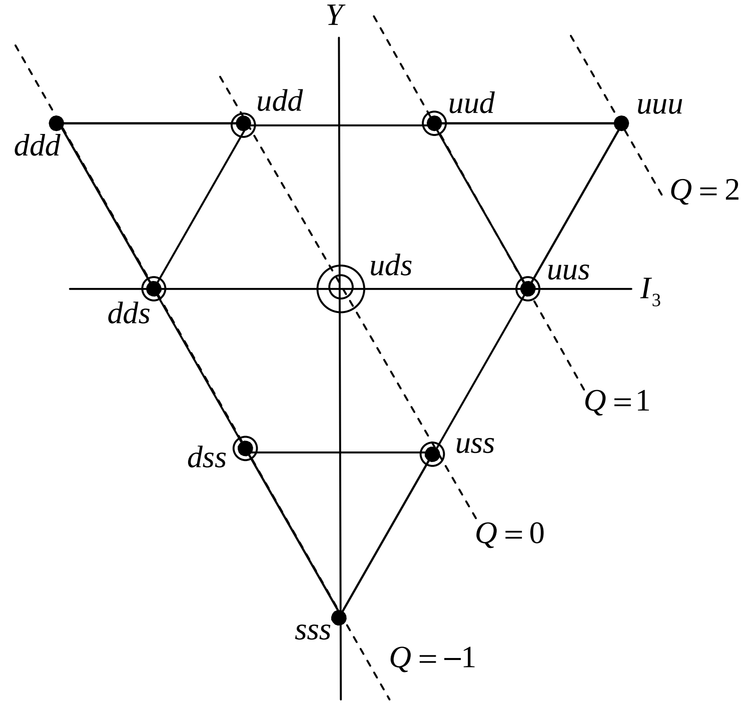


Gambar 5.: Isi quark dari representasi SU(3) meson. Panjang sisi-sisi dari heksagonal adalah satu satuan panjang.

Dan fungsi keadaan meson

$$P_i^j \left|0\right\rangle \equiv \left|P_i^j\right\rangle = \left(q_i\ q^j - \frac{1}{3}\delta_i^j\ q_k\ q^k\right)\left|0\right\rangle$$

- Diagram bobot Baryon



Gambar 5.6. Representasi SU(3) untuk baryon. Panjang sisi-sisi dari heksagonal adalah tiga satuan panjang.

Dan fungsi keadaan Baryon

$$\bar{B}^i_j|0\rangle = |\bar{B}^i_j\rangle$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\varepsilon^{ikl}\left(q_k\ q_l - q_l\ q_k\right) q_j - \frac{1}{3}\delta^i_j\,\varepsilon^{mkl}\left(q_k\ q_l - q_l\ q_k\right) q_m\right]|0\rangle$$

- Simetri ruang dan waktu terdiri dari invarian translasi, invarian rotasi, paritas, paritas intrinsik dan pembalikan waktu (*time reversal*) sedangkan simetri internal terdiri dari kekekalan muatan, konjugasi muatan (*charge conjugation*) dan G-Paritas
- Selain derajat kebebasan ruang dan spin, quark juga memiliki atribut lain yang dinamakan warna (c*olour*). Fungsi gelombang totalnya dapat dinyatakan sebagai hasilkali dari fungsi gelombang bagian ruang $\psi(\vec{x})$, bagian spin χ dan warna χ^C yaitu

$$\Psi = \psi(\vec{x})\chi\chi^C\,.$$

Penggabungan fungsi gelombang ruang dan spin adalah simetrik terhadap pertukaran quark pada flavour yang sama, sehingga fungsi gelombang warna menjadi antisimetrik.

Soal-soal Latihan

1. Elemen-elemen dari sebuah himpunan $\{\pm 1, \pm i\}$, dimana $i = \sqrt{-1}$ adalah akar-akar dari persamaan $x^4 = 1$. Buktikan bahwa himpunan dari elemen-elemen tersebut membentuk sebuah grup!
2. Tinjau himpunan matriks 4 x 4 berikut ini,

$$\{M\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

   Jika perkalian grup-nya adalah perkalian matriks, tunjukkan bahwa himpunan $\{M\}$ membentuk sebuah grup!
3. (a) Turunkan matriks Gell-Mann persamaan (5.43)

   (b) Dua generator SU(3) dari matriks Gell-Mann λ_3 dan λ_8 adalah matriks-matriks diagonal dan traceless. Carilah nilai eigen dan vektor eigen dari keduanya! (Petunjuk: buatlah persamaan nilai eigen kemudian selesaikan persamaan ini.)

   (c) Dari persamaan nilai eigen soal (b), jika diketahui tiga buah vektor eigen

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Dan generator λ_3 dan λ_8 yang ternormalisasi diberikan oleh

$$\lambda_3^N = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_8^N = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & -2b \end{bmatrix}$$

Carilah hubungan komutasi dari nilai eigennya dalam ungkapan *a* dan *b* dan gambarkan diagram bobotnya!

4. Turunkan hubungan komutasi yang diberikan dalam Tabel 2!
5. Peroleh Tabel 5.5 untuk meson pseudoskalar $J^P = 0^-$. !
6. Gunakan informasi pada Gambar 8 baryon decuplet untuk menentukan isospin $\left| I\ I_3 \right\rangle$ untuk masing-masing partikel berikut: $\Omega^-, \Sigma^+, \Xi^0, \rho^+, \eta, \bar{K}^0$.!
7. (a) Tunjukan bahwa peluruhan $\omega \to \pi^+\pi^-$ dilarang dalam interaksi kuat tetapi diijinkan dalam interaksi elektromagnetik. Carilah nilai isospin *I* dan momentum sudut orbital untuk pion!

   (b) Tunjukan bahwa peluruhan $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0$ dilarang dalam interaksi kuat tetapi diijinkan dalam interaksi elektromagnetik. Tentukan nilai isospin yang mungkin untuk pion akhir!
8. Buktikan bahwa nilai eigen dari *P* adalah ± 1!
9. Apakah neutrino adalah keadaan eigen dari *P*? Jika ya, carilah paritas intrinsiknya!
10. (a) Keadaan nukleon $\left| N \right\rangle$ terhadap transformasi rotasi 180^0 disekitar sumbu ke-2 dalam ruang isospin diberikan oleh transformasi $\left| N_{R_2} \right\rangle = e^{i\pi\tau_2/2} \left| N \right\rangle$. Buktikan bahwa $\left| N_{R_2} \right\rangle = i\ \tau_2 \left| N \right\rangle$!.

    (b) Carilah hasil transformasi $\left| p \right\rangle$ dan $\left| n \right\rangle$ terhadap G-paritas!