

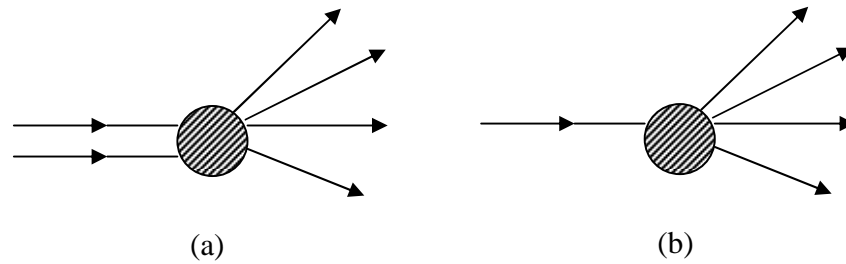
6 Hamburan, Peluruhan dan Diagram Feynman

Setelah mempelajari bab 6, mahasiswa diharapkan dapat:

1. Menyatakan rumusan penampang hamburan dari hamburan dan laju peluruhan
2. Menghitung laju transisi dari hamburan dan laju peluruhan
3. Menggambar diagram Feynmann dan menggunakan kaidah-kaidahnya dalam menyelesaikan persoalan hamburan dan peluruhan umum
4. Mengetahui kaidah Feynmann untuk QED (Quantum Electrodynamics)
5. Mengetahui kaidah Feynmann untuk QCD (Quantum Chromodynamics)
6. Mengetahui kaidah Feynmann untuk interaksi lemah
7. Menggambar diagram Feynmann dan menggunakan kaidah-kaidahnya dalam menyelesaikan persoalan hamburan dan peluruhan untuk setiap interaksi.

Sebagaimana telah dipelajari sebelumnya, dinamika elektron dan positron dapat digambarkan melalui persamaan Dirac dan foton dapat digambarkan melalui persamaan Maxwell. Hal yang perlu kita pelajari sekarang adalah bagaimana menggambarkan interaksinya dan sifat-sifat dari partikel. Dalam fisika partikel, interaksi dan sifat-sifat partikel dapat diketahui dari eksperimen yang meliputi hamburan dan peluruhan partikel, lihat Gambar 6.1. Dalam proses hamburan, yang diukur adalah penampang hamburan untuk sebuah reaksi tertentu. Sedangkan dalam proses peluruhan yang diukur adalah waktu hidup (*life time*) dari satu partikel yang meluruh menjadi dua, tiga, atau lebih. Untuk menghitung kedua besaran tersebut, penampang hamburan dan waktu hidup, mula-mula kita harus menghitung amplitudo mekanika kuantum dalam proses yang dimaksud.

Pada bab ini kita akan mempelajari bagaimana menghitung besaran-besaran yang disebutkan di atas dan menerapkan pada suatu sistem partikel. Untuk itu, kita akan mengawali pembahasan dengan mengkaji kembali konsep-konsep dalam mekanika kuantum.



Gambar 6.1. (a) Proses hamburan dan (b) Proses peluruhan.

6.1. Gambaran Interaksi (*Interaction Picture*)

Bertolak dari prinsip mekanika kuantum, laju transisi dari keadaan awal (*initial*) $|i\rangle$ ke keadaan akhir (*final*) $|f\rangle$ diberikan oleh¹

$$W = 2\pi \langle f|V|i\rangle^2 \rho_f(E_f). \quad (6.1)$$

dimana V adalah Hamiltonian interaksi yang dihubungkan melalui

$$H = H_0 + V, \quad (6.2)$$

Dalam teori gangguan V diperlakukan sangat kecil, $|i\rangle$ dan $|f\rangle$ adalah keadaan eigen dari Hamiltonian tak terganggu H_0 . Sedangkan $\rho_f(E_f)$ adalah rapat keadaan akhir yaitu $\rho_f(E_f)dE_f$ sama dengan jumlah keadaan akhir dengan energi diantara E_f dan $E_f + dE_f$.

Persamaan (6.1) adalah persamaan laju transisi yang tidak bergantung waktu. Tujuan selanjutnya adalah mencari atau mendefinisikan laju transisi dalam ungkapan yang lebih umum yang berlaku pada setiap waktu. Untuk itu perlu diketahui bagaimana suatu sistem berevolusi terhadap waktu. Sebagaimana telah dipelajari dalam mekanika kuantum, untuk gambaran Schrodinger (*Schrodinger picture*) fungsi keadaan bergantung pada waktu sedangkan operatornya tetap konstan. Persamaan evolusi dari sistem diberikan oleh:

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_S = H |\Psi(t)\rangle_S. \quad (6.3)$$

¹ Penurunan rumus ini dapat dilihat di beberapa buku teks mekanika kuantum, misalnya pada BAB 5 Ref. 2.

Untuk mengetahui evolusi sistem secara keseluruhan maka operator haruslah juga bergantung pada waktu. Untuk itu kita harus pergi ke gambaran interaksi (*interaction picture*), dimana operator dan fungsi keadaan keduanya bergantung pada waktu. Melalui sebuah transformasi uniter gambaran interaksi dan gambaran Schrodinger diberikan oleh

$$|\Psi(t)\rangle_I = e^{iH_0 t} |\Psi(t)\rangle_S . \quad (6.4)$$

Maka dengan menggunakan persamaan (6.3) kita memperoleh

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_I = -H_0 |\Psi(t)\rangle_I + e^{iH_0 t} H e^{-iH_0 t} |\Psi(t)\rangle_I . \quad (6.5)$$

Selanjutnya kita definisikan operator bergantung waktu sebagai berikut

$$H_0^I(t) = e^{iH_0 t} H_0 e^{-iH_0 t} = H_0 , \quad (6.6a)$$

$$H^I(t) = e^{iH_0 t} H e^{-iH_0 t} = e^{iH_0 t} (H_0 + V) e^{-iH_0 t} = H_0 + V_I(t) , \quad (6.6b)$$

dimana

$$V_I(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} . \quad (6.6c)$$

Sehingga persamaan (6) dapat dituliskan kembali dalam bentuk

$$i \frac{d}{dt} |\Psi(t)\rangle_I = V_I(t) |\Psi(t)\rangle_I . \quad (6.7)$$

Suatu operator \hat{O} dalam gambaran Schrodinger dihubungkan dengan operator $\hat{O}_I(t)$ dalam gambaran interaksi oleh sebuah transformasi uniter yaitu

$$\hat{O}_I(t) = e^{iH_0 t} \hat{O} e^{-iH_0 t} , \quad (6.8a)$$

$$i \frac{d\hat{O}_I(t)}{dt} = [\hat{O}_I(t), H_0] . \quad (6.8b)$$

Persamaan (6.7) adalah persamaan evolusi untuk fungsi keadaan $|\Psi(t)\rangle_I$. Berikut ini kita akan mempelajari hamburan partikel dengan keadaan awal diberikan oleh $t = t_0 \rightarrow -\infty$ kemudian bertransisi ke keadaan akhir pada $t \rightarrow \infty$. Untuk itu kita perlu sebuah operator yang memiliki kapasitas untuk beroperasi pada rentang waktu ini.

6.2. Matriks Hamburan (S-matriks)

Dalam kerangka tafsiran dinamika probabilistik mekanika kuantum, probabilitas menemukan sistem dalam keadaan $|b\rangle$, ketika sistem dalam keadaan $|\Psi(t)\rangle$ diberikan oleh $|C_b(t)|^2$ dimana

$$C_b(t) = \langle b | \Psi(t) \rangle_I . \quad (6.9)$$

Dengan asumsi bahwa keadaan $|\Psi(t)\rangle_I$ dapat dihasilkan dari keadaan $|\Psi(t_0)\rangle_I$ yang diketahui melalui operator linier keadaan $U(t, t_0)$ yaitu

$$|\Psi(t)\rangle_I = U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle_I, \quad U(t_0, t_0) = 1. \quad (6.10)$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (6.10) ke persamaan (6.7) maka

$$i \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} |\Psi(t_0)\rangle_I = V(t) U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle_I. \quad (6.11)$$

Sehingga diperoleh

$$i \frac{\partial U(t, t_0)}{\partial t} = V(t) U(t, t_0). \quad (6.12)$$

Pada persamaan di atas dapat dilihat bahwa $U(t, t_0)$ hanya bergantung pada struktur dari sistem fisis dan tidak bergantung secara eksplisit pada keadaan awal sistem $|\Psi(t_0)\rangle_I$.

Maka untuk sistem dalam keadaan $|\Psi(t)\rangle_I$ dapat juga dituliskan sebagai berikut:

$$|\Psi(t')\rangle_I = U(t', t_0) |\Psi(t_0)\rangle_I, \quad \text{dan} \quad |\Psi(t)\rangle_I = U(t, t') |\Psi(t')\rangle_I. \quad (6.13)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle_I &= U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle_I \\ &= U(t, t') |\Psi(t')\rangle_I \\ &= U(t, t') U(t', t_0) |\Psi(t_0)\rangle_I. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Operator U kemudian memenuhi sifat-sifat grup:

$$U(t, t') U(t', t_0) = U(t, t_0), \quad (6.15a)$$

$$U(t_0, t_0) = U(t_0, t') U(t', t_0) = U(t_0, t) U(t, t_0) = I, \quad (6.15b)$$

$$U(t_0, t) = U^{-1}(t, t_0). \quad (6.15c)$$

Solusi persamaan (12) adalah sebuah persamaan integral evolusi,

$$U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t dt' V(t') U(t', t_0). \quad (6.16)$$

Persamaan integral evolusi ini dapat diselesaikan melalui suatu proses yang berulang dengan menuliskan solusinya,

$$U(t', t_0) = \sum_n U^{(n)}(t', t_0)$$

Sehingga jika kita lakukan iterasi maka akan diperoleh persamaan yang merupakan basis dari teori gangguan dalam ungkapan deret. Iterasinya sebagai berikut

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= 1 - i \int_{t_0}^t dt' V(t') \left[1 - i \int_{t_0}^{t'} dt'' V(t'') U(t'', t_0) \right] \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t dt' V(t') + (-i)^2 \left[\int_{t_0}^t dt' V(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' V(t'') U(t'', t_0) \right] \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t dt' V(t') + (-i)^2 \left[\int_{t_0}^t dt' V(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' V(t'') \left[1 - i \int_{t_0}^{t''} dt''' V(t''') U(t''', t_0) \right] \right] \\ &= 1 - i \int_{t_0}^t dt' V(t') + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt' V(t') \int_{t_0}^{t'} dt'' V(t'') + \dots \end{aligned} \quad (6.17)$$

Deret ini dinamakan dengan *deret Dyson*. Jadi, jika $U(t, t_0)$ diberikan, maka kita dapat memprediksikan suatu keadaan. Misalnya, kita tinjau pada keadaan awal $t = t_0 \rightarrow -\infty$ dan sistem diketahui berada dalam sebuah keadaan eigen $|a\rangle$ dengan Hamiltonian H_0 . Maka amplitudo probabilitas untuk bertransisi ke sebuah keadaan eigen $|b\rangle$, dari persamaan (6.9), adalah

$$\begin{aligned} C_b(t) &= \langle b | \Psi(t) \rangle_I \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle b | U(t, t_0) | \Psi(t_0) \rangle_I \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle b | U(t, t_0) | \Psi(t_0) \rangle_S \end{aligned} \quad (6.18)$$

dimana untuk $t = t_0 \rightarrow -\infty$,

$$| \Psi(t_0) \rangle_S = | a, t_0 \rangle = e^{-iE_a t_0} | a \rangle. \quad (6.19)$$

Sehingga probabilitas untuk menemukan sistem dalam keadaan $|b\rangle$, dari persamaan (6.18) diperoleh

$$C_b(t) = \langle b|U(t, -\infty)|a\rangle. \quad (6.20)$$

Tujuan kita sekarang adalah menghitung $C_b(t)$ untuk t yang besar dari persamaan (6.20), dimana untuk $t = \infty$ sistem berada dalam keadaan eigen dengan Hamiltonian H_0 . Jadi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C_b(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle b|U(t, -\infty)|a\rangle = \langle b|U(\infty, -\infty)|a\rangle. \quad (6.21)$$

Kita definisikan operator

$$S = U(\infty, -\infty), \quad (6.22a)$$

dengan elemen-elemen matriks

$$S_{ba} = \langle b|U(\infty, -\infty)|a\rangle = \langle b|S|a\rangle. \quad (6.22b)$$

Persamaan (6.22) dinamakan S-matriks yang kita cari. Persamaan ini memperlihatkan sebuah proses bagaimana sebuah konfigurasi awal partikel $|a\rangle$ menjadi sebuah konfigurasi akhir $|b\rangle$ dimana keadaan $|a\rangle$ dan $|b\rangle$ didefinisikan secara asimtotik, pada waktu $t \rightarrow -\infty$ dan $t \rightarrow \infty$. Dengan menggunakan kekekalan probabilitas (lihat contoh 6.1) dapat diperlihatkan bahwa S-matriks adalah sebuah operator uniter,

$$S^\dagger S = \hat{I}. \quad (6.22b)$$

Contoh 6.1.

Buktikan bahwa dengan kekekalan probabilistik, bahwa jumlah dari semua probabilitas transisi sama dengan satu,

$$\sum_b |C_b(\infty)|^2 = 1. \quad (23)$$

maka S-matriks adalah sebuah operator uniter.

Jawab:

Jika S adalah sebuah operator uniter maka haruslah dibuktikan persamaan (6.22b). Gunakan persamaan (6.22b) untuk memperoleh

$$\begin{aligned}
& \sum_b |\langle b|S|a\rangle|^2 = \sum_b \langle b|S|a\rangle \langle b|S|a\rangle^* = 1 \\
\Leftrightarrow & \sum_b \langle a|S^\dagger|b\rangle \langle b|S|a\rangle = 1 \\
\Leftrightarrow & \langle a|S^\dagger S|a\rangle = 1
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Sehingga

$$S^\dagger S = \hat{I}.$$

Atau dalam bentuk komponen dapat dinyatakan oleh

$$\sum_b S_{ab}^\dagger S_{ba} = \sum_b |S_{ba}|^2 = 1.$$

Jadi S adalah sebuah operator uniter.

6.3. Laju Transisi dan Laju Peluruhan

6.3.1. Laju Transisi

Setelah kita mengetahui bagaimana sebuah keadaan sistem berevolusi, maka kita sekarang mencari laju transisi dari sistem tersebut. Persamaan Schrodinger (6.3) memiliki solusi

$$|\Psi(t)\rangle_S = e^{-iH(t-t_0)} |\Psi(t_0)\rangle_S. \tag{6.24}$$

Gunakan persamaan (6.4), (6.10) dan (6.24) untuk memperoleh

$$e^{-iH_0 t} U(t, t_0) e^{iH_0 t} = e^{-iH(t, t_0)}. \tag{6.25}$$

Kemudian selesaikan untuk $U(t, t_0)$,

$$U(t, t_0) = e^{iH_0 t} e^{-iH(t, t_0)} e^{-iH_0 t}. \tag{6.26}$$

Oleh karena itu

$$U(t, -\infty) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} e^{iH_0 t} e^{-iH(t, t_0)} e^{-iH_0 t}. \tag{6.27}$$

dan

$$U(\infty, t) = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} e^{iH_0 t} e^{-iH(t, t_0)} e^{-iH_0 t}. \tag{6.28}$$

Limit $t_0 \rightarrow -\infty$ dan limit $t_0 \rightarrow \infty$ untuk solusi di atas diambil setelah menyelesaikan integral untuk gangguan yang bergantung pada waktu, $V(t) = e^{\mathcal{E}t} V$,

$$U(t, -\infty) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon t'} e^{iH_0 t'} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0 t'} dt' . \quad (6.29a)$$

$$U(\infty, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t'} e^{iH_0 t'} e^{-iH(t-t')} e^{-iH_0 t'} dt' . \quad (6.29b)$$

Sehingga kita memperoleh untuk persamaan (6.29a),

$$\begin{aligned} U(t, -\infty)|a\rangle &= \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \int_{-\infty}^0 e^{\varepsilon t'} e^{iH t'} e^{-iE_a t'} dt' \right] |a\rangle \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{i\varepsilon}{E_a - H + i\varepsilon} |a\rangle . \end{aligned} \quad (6.30)$$

Dari persamaan di atas maka dalam limit $\varepsilon \rightarrow 0$ diperoleh

$$U(t, -\infty)|a\rangle = |a\rangle + \frac{1}{E_a - H + i\varepsilon} V|a\rangle . \quad (6.31)$$

Persamaan nilai eigen di atas adalah persamaan keadaan eigen dari H dengan nilai eigen E_a . Keadaan $|a^+\rangle \equiv U(t, -\infty)|a\rangle$ dinamakan “keadaan masuk” (*incoming state*). Dengan cara yang sama maka untuk persamaan (6.29b) diperoleh

$$U(0, \infty)|a\rangle = |a\rangle + \frac{1}{E_a - H - i\varepsilon} V|a\rangle . \quad (6.32)$$

Keadaan $|a^-\rangle \equiv U(0, \infty)|a\rangle$ dinamakan “keadaan keluar” (*outgoing state*).

Dengan menggunakan persamaan (6.31) dan (6.32), maka persamaan (6.22b) menjadi

$$\begin{aligned} S_{ba} &= \langle b|U(\infty, 0)U(0, -\infty)|a\rangle . \\ &= \langle b^-|a^+\rangle = \langle b|a^+\rangle + \langle b|V \frac{1}{E_a - H + i\varepsilon} |a^+\rangle \\ &= \langle b|a^+\rangle + \frac{1}{E_a - H + i\varepsilon} \langle b|V|a^+\rangle \end{aligned} \quad (6.33)$$

Selanjutnya

$$\begin{aligned} \langle b|a^+\rangle &= \langle b| \frac{E_a - H_0 + i\varepsilon}{E_a - E_b + i\varepsilon} |a^+\rangle \\ &= \langle b| \frac{E_a - H + i\varepsilon}{E_a - E_b + i\varepsilon} + \frac{V}{E_a - E_b + i\varepsilon} |a^+\rangle \end{aligned}$$

$$= \langle b|a \rangle + \frac{1}{E_a - E_b + i\epsilon} \langle b|V|a^+ \rangle. \quad (6.34)$$

Substitusi persamaan (6.34) ke persamaan (6.33) maka elemen-elemen dari S-matriks adalah²

$$S_{ba} = \delta_{ba} - 2\pi i \delta(E_a - E_b) \langle b|V|a^+ \rangle. \quad (6.35)$$

Selanjutnya kita definisikan sebuah operator T yang dinamakan dengan T -matriks (matriks transisi) dengan elemen-elemen matriksnya diberikan sebagai berikut

$$T_{ba} = \langle b|T|a \rangle = -\langle b|V|a^+ \rangle. \quad (6.36)$$

Maka persamaan (6.35) menjadi

$$S_{ba} = \delta_{ba} + 2\pi i \delta(E_b - E_a) T_{ba}. \quad (6.37)$$

Bentuk eksplisit dari T -matriks adalah

$$T_{ba} = -\langle b|V|a \rangle - \langle b|V \frac{1}{E_a - H + i\epsilon} V|a \rangle. \quad (6.38)$$

Dengan *trace*-nya diberikan oleh

$$T = -V - V \frac{1}{E_a - H + i\epsilon} V. \quad (6.39)$$

Dalam teori relativitas kita memperlakukan energi dan momentum adalah sama, sehingga dengan mengambil keadaan awal sebagai $|a\rangle = |i\rangle$ dan keadaan akhir sebagai $|b\rangle = |f\rangle$ maka persamaan (6.37) menjadi

$$S_{fi} = \delta_{fi} + (2\pi)^4 i \delta^4(p_f - p_i) T_{fi}, \quad (6.40)$$

dimana fungsi delta dari kekekalan energi-momentum diberikan oleh

$$\delta^4(p_f - p_i) = \delta^3(\vec{p}_f - \vec{p}_i) \delta(E_f - E_i). \quad (6.41)$$

Sekarang probabilitas transisi dari suatu keadaan awal $|i\rangle$ ke keadaan akhir $|f\rangle$ untuk $i \neq f$ adalah

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} |C_f(t)|^2 = |\langle f|S|i \rangle|^2 = \sum (2\pi)^8 \delta^4(p_f - p_i) \delta^4(0) |T_{fi}|^2. \quad (6.42)$$

Dengan menggunakan definisi fungsi delta Dirac

² Fungsi delta muncul dari definisi: $\delta(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$.

$$\delta^4(p) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-ip^\mu x_\mu} d^4x, \quad (6.43a)$$

$$\delta^4(0) = \frac{1}{(2\pi)^4} (\text{Volume})t = \frac{Vt}{(2\pi)^4}, \quad (6.43b)$$

maka laju transisi tiap satuan volume makroskopik diberikan oleh

$$W_{fi} = \frac{P}{Vt} = (2\pi)^4 \sum \delta^4(p_f - p_i) |T_{fi}|^2. \quad (6.40)$$

Persamaan ini dinamakan dengan *kaidah emas Fermi (Fermi golden rule)*.

6.3.2. Ruang fasa invarian Lorentz

Tinjau sebuah partikel tunggal dalam 1-dimensi yang dibatasi pada daerah $0 \leq x \leq L$.

Keadaan eigen ternormalisasi dari momentumnya diberikan oleh

$$u_p(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ipx}. \quad (6.41)$$

Syarat batas untuk $u_p(x)$ adalah periodik dalam rentang L menghasilkan

$$p = \left(\frac{2\pi}{L} \right) n. \quad (6.42)$$

Sehingga jumlah keadaan dn di dalam interval $E + dE$ diberikan oleh

$$dn = \rho(E) dE. \quad (6.43)$$

Untuk kasus 3-dimensi berlaku

$$\rho(E) = \frac{dn}{dE} = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \frac{d}{dE} \int d^3p = \left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 p^2 \frac{dP}{dE} \int d\Omega. \quad (6.44)$$

Jika ada n buah partikel dalam keadaan akhir,

$$n = \left[\left(\frac{L}{2\pi} \right)^3 \right]^{n-1} \int d^3p'_1 d^3p'_2 \cdots d^3p'_{n-1}. \quad (6.45)$$

Dengan normalisasi $L = 2\pi$ persamaan (6.45) dapat dinyatakan kembali sebagai

$$n = \int \delta^3[\vec{p}_i - (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \cdots + \vec{p}'_n)] d^3p'_1 d^3p'_2 \cdots d^3p'_n. \quad (6.46)$$

Sehingga kita memperoleh

$$\rho_f(E) = \int \delta[E - (E'_1 + E'_2 + \dots + E'_n)] \times \delta^3[\vec{p}_i - (\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 + \dots + \vec{p}'_n)] d^3 p'_1 d^3 p'_2 \dots d^3 p'_n \quad (6.47)$$

dengan laju transisi diberikan oleh

$$W_f = (2\pi)^4 \int d^3 p'_1 d^3 p'_2 \dots d^3 p'_n \times \sum_{spin} |T_{fi}|^2 \delta^4[p'_1 + p'_2 + \dots + p'_n - p_i] \quad (6.48)$$

Ruang fasa $\int d^3 p$ tidak invarian Lorentz. Sehingga kita harus meninjau ruang fasa invarian Lorentz. Persamaan laju transisi yang invarian Lorentz diberikan oleh

$$W_f = \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^{3m}} \int \frac{d^3 p'_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p'_2}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3 p'_n}{(2\pi)^3} \times N^2 \sum_{spin} |F_{fi}|^2 \delta^4[p'_1 + p'_2 + \dots + p'_n - p_i] \quad (6.49)$$

dimana faktor amplitudo N diberikan oleh

$$N' = \left(\prod_r \frac{m_r}{(2\pi)^3 E_r} \prod_s \frac{1}{(2\pi)^3 2E_s} \right)^{1/2} = \left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right]^{n+m} N, \quad (6.50)$$

$$F_{fi} = \frac{T_{fi}}{N'}, \quad r + s = m + n$$

r dan s masing-masing adalah jumlah fermion dan boson. Sedangkan m dan n berturut-turut adalah jumlah partikel awal dan akhir. Faktor $\sum_{spin} |F_{fi}|^2$ adalah amplitudo invarian fasa yang dirata-ratakan terhadap semua faktor spin yang datang dan dijumlahkan semua faktor spin yang keluar, dan kita akan mendefinisikan sebagai

$$S|M|^2 \equiv \sum_{spin} |F_{fi}|^2 \quad (6.51)$$

Dalam teori gangguan orde pertama kita memiliki $T_{fi} = -\langle f|V|i\rangle$ sehingga

$$\left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right]^{n+m} \left(\prod_r \left(\frac{m_r}{E_r} \right)^{1/2} \prod_s \left(\frac{1}{2E_s} \right)^{1/2} \right) F_{fi} = -\langle f|V|i\rangle \quad (6.52)$$

Setiap partikel target memiliki suatu bidang dengan luas tertentu yang disebut penampang terhadap partikel datang. Setiap partikel datang yang masuk dalam bidang ini

akan berinteraksi dengan inti target. Penampangnya bisa lebih besar atau lebih kecil dari penampang geometris partikel itu, bergantung pada proses yang terlibat dan energi partikel datang. Penampang hamburan didefinisikan sebagai berikut

$$d\sigma = \frac{dW}{(\text{fluk})_{\text{in}}} \quad (6.53)$$

Disini $(\text{fluk})_{\text{in}}$ adalah fluks partikel datang. Dan laju peluruhan kemudian diberikan oleh

$$d\Gamma = \frac{dW}{\text{rapat partikel datang}} \quad (6.54)$$

Contoh 6.2.

Tentukan matriks hamburan dalam orde pertama dari 4 buah partikel fermion: A, B, C, D dengan massa m_A, m_B, m_C dan m_D ?

Jawab:

Hamburan yang diliputi adalah fermion $s = 0$ dan $r = 4$, sehingga $m + n = 4$. Dengan menggunakan persamaan (6.51) maka diperoleh

$$\left[\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \right]^4 \left(\frac{m_A m_B m_C m_D}{E_A E_B E_C E_D} \right)^{1/2} F_{fi} = \frac{1}{(2\pi)^6} \left(\frac{m_A m_B m_C m_D}{E_A E_B E_C E_D} \right)^{1/2} F_{fi} = -\langle f | V | i \rangle$$

6.3.3. Contoh-contoh: Hamburan dan Peluruhan

A. Hamburan dua-benda dalam kerangka pusat massa

Tinjau tumbukan partikel A dan B yang menghasilkan partikel $C + D$,

$$A + B \rightarrow C + D \quad (6.55)$$

dimana A dan C adalah boson misalnya pion-pion dan B dan D adalah fermion misalnya nukleon-nukleon. Kita akan menghitung penampang hamburan diferensialnya. Dari persamaan (6.53), fluks datang diberikan oleh

$$(\text{fluk})_{\text{in}} = \rho_A \rho_B v_{\text{in}} = \frac{v_{\text{in}}}{(2\pi)^6}. \quad (6.56)$$

Dengan ρ adalah jumlah partikel masuk tiap satuan volume dan v_{in} adalah kecepatan partikel datang,

$$v_{\text{in}} = \left| \frac{\vec{p}_A}{E_A} - \frac{\vec{p}_B}{E_B} \right|. \quad (6.57)$$

Dalam kerangka pusat massa kita memiliki

$$\begin{aligned} \vec{p}_A = -\vec{p}_B = \vec{p}, \quad \vec{p}_C = -\vec{p}_D = \vec{p}', \\ E_{CM} = E_A + E_B = E_C + E_D \end{aligned} \quad (6.58)$$

Sehingga diperoleh

$$v_{\text{in}} = |\vec{p}| \frac{E_{CM}}{E_A E_B}. \quad (6.59)$$

Dari persamaan (6.49)

$$\begin{aligned} dW &= \frac{(2\pi)^4}{(2\pi)^6} \int \frac{d^3 p_C}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_D}{(2\pi)^3} \left(\frac{m_B m_D}{4E_B E_D E_A E_C} \right) \times S |M|^2 \delta^4(p_C + p_D - p_A - p_B) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^8} \left(\frac{m_B m_D}{4E_B E_A} \right) \int d^3 p_C d^3 p_D \left(\frac{1}{E_D E_C} \right) \\ &\quad \times S |M|^2 \delta^3(\vec{p}_C + \vec{p}_D - \vec{p}_A - \vec{p}_B) \delta(E_C + E_D - E_A - E_B) \end{aligned} \quad (6.60)$$

Dimana faktor spin kita definisikan $S |M|^2 \equiv \sum_{\text{spin}} |F_{fi}|^2$. Integrasi pada $d^3 p_D$ dapat diganti dengan fungsi - δ 3-dimensi. Kemudian

$$d^3 p_C = |\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'| d\Omega' \quad (6.61)$$

Dan persamaan (6.60) menjadi

$$\begin{aligned} dW &= \frac{1}{(2\pi)^8} \left(\frac{m_B m_D}{4E_B E_A} \right) \int |\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'| d\Omega' \left(\frac{1}{\sqrt{\vec{p}'^2 + m_C^2} \sqrt{\vec{p}'^2 + m_D^2}} \right) \\ &\quad \times S |M|^2 \delta(E_{CM} - \sqrt{\vec{p}'^2 + m_C^2} - \sqrt{\vec{p}'^2 + m_D^2}) \end{aligned} \quad (6.62)$$

Dengan menggunakan rumus integral

$$\int dx \delta[E - Y(x)] F(x) = \left[F(x) \frac{1}{Y'(x)} \right]_{E=Y(x)} \quad (6.63)$$

serta persamaan (6.59) dan (6.62) maka persamaan (6.53) menjadi

$$d\sigma = \frac{dW (2\pi)^6}{v_{in}} = \frac{m_B m_D}{4(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \frac{1}{E_{CM}^2} S |M|^2 d\Omega'. \quad (6.64)$$

Sehingga diperoleh

$$\frac{d\sigma}{d\Omega'} = \frac{m_B m_D}{4(2\pi)^2} \frac{|\vec{p}'|}{|\vec{p}|} \frac{1}{E_{CM}^2} S |M|^2. \quad (6.65)$$

B. Peluruhan 3-benda

Tinjau sebuah peluruhan 3-benda sebagai berikut

$$m \rightarrow m_1 + m_2 + m_3$$

$$K = p_1 + p_2 + p_3$$

Dengan menggunakan persamaan (6.62) dan dengan mengambil $\rho_{in} = 1/(2\pi)^3$ maka laju peluruhan untuk proses di atas untuk partikel-partikel fermion adalah

$$d\Gamma = \frac{dW}{\rho_{in}} = (2\pi)^4 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3} \left(\frac{m m_1 m_2 m_3}{E E_1 E_2 E_3} \right) \times \delta^3(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 - \vec{K}) \delta(E_1 + E_2 + E_3 - E) |M|^2 \quad (6.66)$$

Dalam kerangka diam partikel m , $\vec{K} = 0$ dan $E = m$ maka kita memiliki

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 = 0, \quad (6.67a)$$

$$E_1 + E_2 + E_3 = m. \quad (6.67b)$$

Sehingga integrasi pada $d^3 p_3$ akan menghasilkan

$$d\Gamma = \frac{2}{(2\pi)^4} (m_1 m_2 m_3) \int p_1^2 d^3 p_1 \int p_2^2 d^3 p_2 d\Omega_{12} \left(\frac{1}{E_1 E_2 E_3} \right) \times \delta\left(E_1 + E_2 + \sqrt{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 + m_3^2} - m\right) |M|^2 \quad (6.68)$$

Setelah melakukan integrasi terhadap Ω_{12} maka kita memperoleh

$$d\Gamma = \frac{2}{(2\pi)^3} (m_1 m_2 m_3) \int \frac{|\vec{p}_1| |\vec{p}_2| E_1 E_2 dE_1 dE_2}{E_1 E_2} \frac{E_3}{|\vec{p}_1| |\vec{p}_2|} |\bar{M}|^2 = \frac{2(m_1 m_2 m_3)}{(2\pi)^3} \int dE_1 dE_2 |\bar{M}|^2 \quad (6.69)$$

dimana $|\bar{M}|^2$ adalah nilai dari $|M|^2$ setelah integrasi sudut dilakukan. Untuk menghitung integral persamaan (6.69) kita akan mendefinisikan variabel-variabel invarian sebagai berikut

$$s_{12} = (K - p_3)^2 = (p_1 + p_2)^2, \quad (6.70a)$$

$$s_{13} = (K - p_2)^2 = (p_1 + p_3)^2, \quad (6.70b)$$

$$s_{23} = (K - p_1)^2 = (p_2 + p_3)^2. \quad (6.70c)$$

Maka dalam kerangka diam m kita memiliki

$$s_{12} = m^2 + m_3^2 - 2mE_3, \quad (6.71a)$$

$$s_{13} = m^2 + m_2^2 - 2mE_2, \quad (6.71b)$$

$$s_{23} = m^2 + m_1^2 - 2mE_1, \quad (6.71c)$$

$$s_{12} + s_{13} + s_{23} = m^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2. \quad (6.71d)$$

Sedangkan dalam kerangka pusat massa partikel 1 dan 2 kita dapat mengambil

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}, \quad \text{dan} \quad \vec{p}_3 = \vec{q}. \quad (6.72)$$

Dalam kerangka pusat massa partikel 1 dan 2, kita nyatakan energi-energi dari partikel 1, 2 dan 3 dengan ω_1 , ω_2 dan ω_3 . Sehingga diperoleh

$$s_{13} = (\omega_1 + \omega_3)^2 - (\vec{p} + \vec{q})^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2\vec{p} \cdot \vec{q} + 2\omega_1\omega_3, \quad (6.73a)$$

$$s_{23} = (\omega_2 + \omega_3)^2 - (\vec{p} - \vec{q})^2 = m_2^2 + m_3^2 + 2\vec{p} \cdot \vec{q} + 2\omega_2\omega_3, \quad (6.73b)$$

$$s_{12} = (\omega_1 + \omega_2)^2. \quad (6.73c)$$

Untuk nilai tetap s_{12} , nilai s_{23} ditentukan dengan mengambil \vec{q} sejajar atau antisejajar terhadap \vec{p} , sehingga

$$(s_{23})_{\min}^{\max} = (\omega_2 + \omega_3)^2 - \left(\sqrt{\omega_3^2 - m_3^2} \mp \sqrt{\omega_2^2 - m_2^2} \right)^2. \quad (6.74)$$

Kita juga dapat menyatakan ω_1 , ω_2 dan ω_3 dalam ungkapan s_{12} sebagai berikut

$$\omega_1 = \frac{s_{12} + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s_{12}}}, \quad (6.75a)$$

$$\omega_2 = \frac{s_{12} - m_1^2 + m_2^2}{2\sqrt{s_{12}}}, \quad (6.75b)$$

$$\omega_3 = \frac{m^2 - m_3^2 - s_{12}}{2\sqrt{s_{12}}}, \quad (6.75c)$$

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = \frac{s_{12} + m^2 - m_3^2}{2\sqrt{s_{12}}}. \quad (6.75d)$$

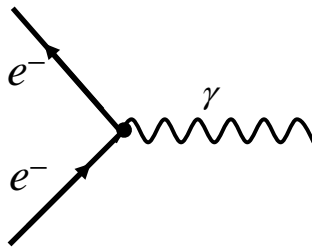
Sehingga persamaan (6.69) menjadi

$$d\Gamma = \frac{2(m_1 m_2 m_3)}{(2\pi)^3 (4m^2)} \int ds_{23} ds_{12} |\bar{M}|^2. \quad (6.76)$$

6.4. Kaidah Feynman

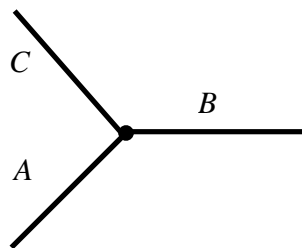
Pada pasal sebelumnya kita telah mempelajari bagaimana menghitung laju peluruhan dan penampang hamburan dalam ungkapan amplitudo M untuk setiap proses yang dimaksud. Melalui pendekatan mekanika kuantum setiap proses dihitung dengan metode perturbasi (gangguan) untuk memperoleh matriks hamburan, S-matriks. Dari matriks hamburan kemudian diperoleh matriks transisi dari proses yang dimaksud. Untuk proses yang berbeda maka kita harus mengulangi perhitungan yang cukup panjang dan tentunya ini membutuhkan waktu yang lama.

Ada cara lain untuk mempersingkat proses-proses tersebut yaitu dengan menggunakan diagram Feynmann. Untuk setiap proses yang akan dihitung, kita cukup dengan menggambar diagram dari proses yang bersangkutan kemudian menggunakan kaidah-kaidah tertentu (*Feynman rules*) seperti yang akan kita pelajari pada pasal berikut ini. Kita akan mempelajari bagaimana menentukan amplitudo M itu sendiri, dengan menggunakan diagram Feynman untuk menghitung diagram interaksi yang bersangkutan. Sebelum kita mempelajari diagram Feynman untuk masing-masing gaya interaksi yang telah kita kenal, terlebih dahulu kita akan mempelajari diagram dalam sebuah model reka (*toy model*). Dalam elektrodinamika kuantum QED, dua buah partikel seperti elektron dan foton berinteraksi melalui verteks (titik interaksi) digambarkan oleh diagram berikut



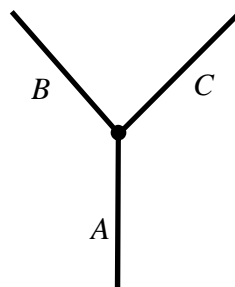
Gambar 6.2.

Sekarang kita tinjau tiga buah jenis partikel, A, B, C, yang memiliki spin-0 dan masing-masing memiliki antipartikelnya. Diagram verteks primitif yang menyatakan interaksi dari ketiga partikel tersebut adalah



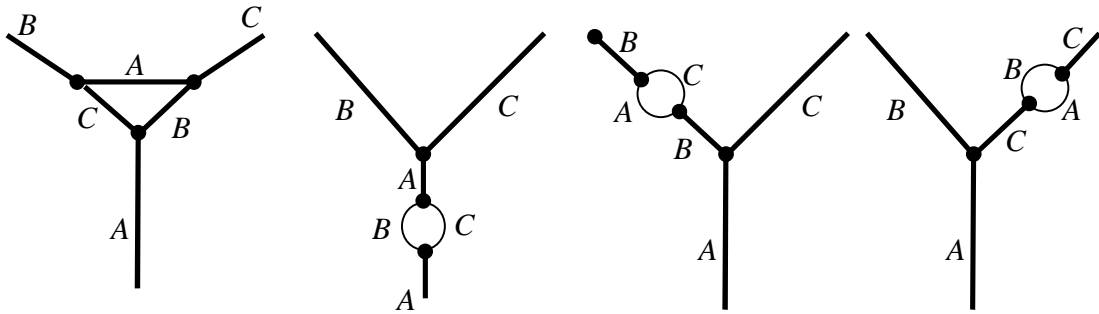
Gambar 6.3.

Jika partikel A adalah partikel yang paling berat diantara ketiga partikel. Maka partikel A dapat meluruh menjadi partikel B + C yang massanya lebih ringan, dengan diagram untuk peluruhan proses ini diberikan oleh



Gambar 6.4.

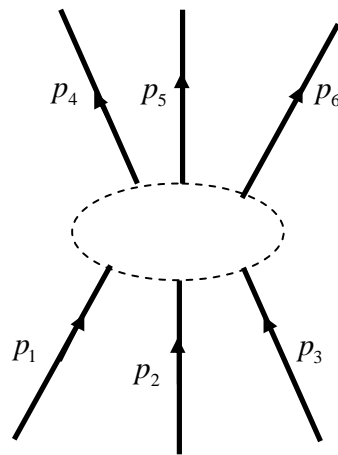
Untuk memperoleh koreksi dari proses di atas dilakukan dengan menambahkan atau menarik sebuah garis pada masing-masing kaki (A, B, C) dari diagram orde terendah. Dalam proses ini ada koreksi orde ketiga yaitu



Gambar 6.5.

Dengan menggambar diagram Feynman untuk sebuah proses yang diberikan maka kita dapat memperoleh amplitudo M dengan langkah-langkah berikut:

1. *Notasi.* Beri label untuk 4-momentum yang masuk dan keluar p_1, p_2, \dots, p_n (Gambar). Beri label momentum internal q_1, q_2, \dots . Letakkan sebuah panah pada masing-masing garis. Lihat contoh diagram Feynman, Gambar 6.2.



Gambar 6.6. Contoh diagram Feynman.

2. *Konstanta kopling.* Untuk setiap verteks tuliskan faktor

$$-ig \tag{6.77}$$

3. *Propagator.* Untuk setiap garis internal, tuliskan faktor

$$\frac{i}{q_j^2 - m_j^2} \quad (6.78)$$

Disini q_j adalah 4-momentum dengan $q_j^2 = q_j^\mu q_{j\mu}$ dan m_j adalah massa partikel.

4. *Kekekalan energi dan momentum.* Untuk setiap verteks, tuliskan fungsi delta dengan bentuk

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3). \quad (6.79)$$

Disini $k_1 + k_2 + k_3$ adalah 4-momentum yang masuk ke verteks. Bila panahnya menunjuk keluar verteks maka $k_1 + k_2 + k_3$ adalah minus 4-momentum. Faktor ini menyatakan bahwa untuk setiap verteks berlaku hukum kekekalan energi dan momentum.

5. *Integrasi pada momentum internal.* Untuk setiap garis internal, tuliskan faktor

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_j. \quad (6.80)$$

Kemudian integrasi terhadap momentum internal.

6. *Abaikan fungsi delta.* Hasilnya akan meliputi sebuah fungsi delta

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n). \quad (6.81)$$

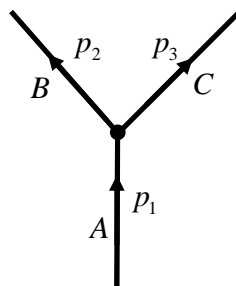
Dengan menghilangkan faktor ini, maka suku sisanya adalah $-iM$.

Contoh 6.3.

Diberikan diagram Feynman untuk proses $A \rightarrow B + C$ yang merupakan diagram orde terendah dari proses ini: Hitunglah waktu hidup dari A ?

Jawab.

1. Label untuk masing-masing kaki dari proses ini adalah



Gambar 6.7.

2. Ada satu buah verteks, $(-ig)$
3. Tidak ada garis internal.
4. Untuk setiap verteks, tuliskan fungsi delta dengan bentuk

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - p_3)$$

5. Tidak ada garis internal
6. Hilangkan fungsi delta dari hasil kaidah (4) maka diperoleh amplitudo untuk orde terendah dari proses ini,

$$-iM = -ig \quad \Rightarrow \quad M = g$$

Sehingga laju peluruhannya adalah

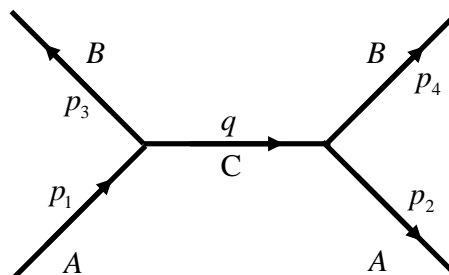
$$\Gamma = \frac{g^2}{8\pi m_A^2} |\vec{p}|$$

Disini \vec{p} adalah besarnya momentum keluar dari verteks. Maka waktu hidup dari A adalah

$$\tau = \frac{1}{\Gamma} = \frac{8\pi m_A^2}{g^2 |\vec{p}|}$$

Contoh 6.4.

Tinjau sebuah proses hamburan dalam kerangka pusat massa, $A + A \rightarrow B + B$ dimana diagram Feynman untuk order terendahnya diberikan oleh



Gambar 6.8.

Hitunglah amplitudo hamburan dan penampang hamburan diferensial dari proses ini.

Jawab.

1. Jelas
2. Dalam kasus ini ada dua buah verteks maka ada dua faktor $-ig$, $(-ig)$ $(-ig)$
3. Ada satu garis internal, (C), tuliskan faktor

$$\frac{i}{q^2 - m_C^2}$$

4. Untuk setiap verteks, fungsi deltanya adalah

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - q) \quad \text{dan} \quad (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q - p_4)$$

5. Satu buah garis internal memiliki faktor

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4q$$

Kemudian integrasi terhadap momentum internal,

$$\begin{aligned} & \int (-ig)(-ig) \frac{i}{q^2 - m_C^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - q) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q - p_4) \frac{1}{(2\pi)^4} d^4q \\ &= -i(2\pi)^4 g^2 \int \frac{1}{q^2 - m_C^2} \delta^4(p_1 - p_3 - q) \delta^4(p_2 + q - p_4) d^4q \end{aligned}$$

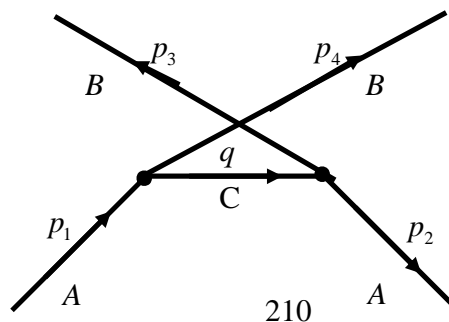
Dengan mengambil $q = p_4 - p_2$ diperoleh

$$-ig^2 \frac{1}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$$

6. Dengan menghilangkan faktor $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$, maka suku sisanya adalah

$$-iM = -ig^2 \frac{1}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2} \Rightarrow M = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2}$$

Gambar di atas adalah salah satu kontribusi orde terendah untuk proses tersebut. Ada diagram lain yang juga menggambarkan proses sama yaitu

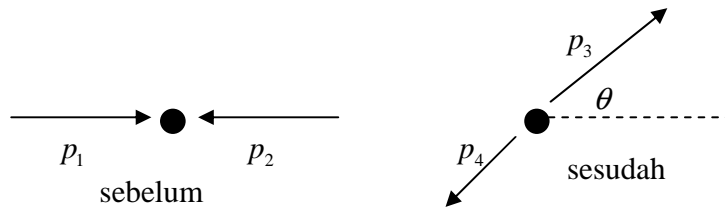


Gambar 6.9.

Maka amplitudo total dalam proses hamburan $A + A \rightarrow B + B$ adalah

$$M = \frac{g^2}{(p_4 - p_2)^2 - m_C^2} + \frac{g^2}{(p_3 - p_2)^2 - m_C^2}$$

Dalam kerangka pusat massa $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$, $\vec{p}_3 = -\vec{p}_4 = \vec{p}'$



Gambar 6.10.

Misalkan kita ambil $m_A = m_B = m$ dan $m_C = 0$, maka

$$(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 = p_4^2 + p_2^2 - 2p_2 \cdot p_4 = -2\vec{p}'^2(1 - \cos \theta)$$

$$(p_3 - p_2)^2 - m_C^2 = p_3^2 + p_2^2 - 2p_3 \cdot p_2 = -2\vec{p}'^2(1 + \cos \theta)$$

Sehingga amplitudo totalnya menjadi

$$M = \frac{g^2}{-2\vec{p}'^2(1 - \cos \theta)} + \frac{g^2}{-2\vec{p}'^2(1 + \cos \theta)} = -\frac{g^2}{\vec{p}'^2 \sin^2 \theta}$$

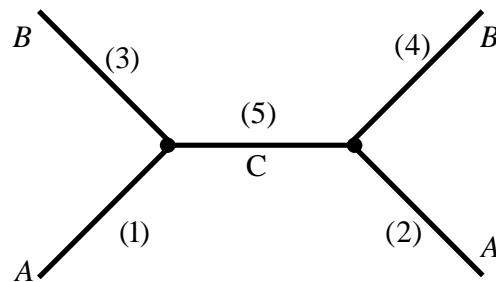
Kemudian diperoleh penampang hamburan diferensial

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{g^2}{16\pi E \vec{p}'^2 \sin^2 \theta} \right)^2$$

Dari contoh sederhana diagram Feynman di atas tampak dengan jelas bagaimana memperoleh amplitudo hamburan orde paling rendah (sering disebut *tree level*) dengan menggunakan kaidah-kaidah Feynman. Sekarang kita ingin memperoleh perhitungan

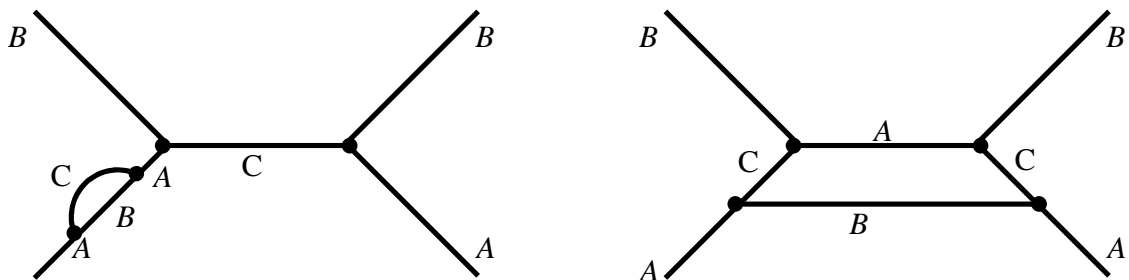
yang lebih teliti. Maka kita dapat menambahkan garis-garis pada masing-masing kakinya sebagai kaki baru pada diagram yang baru. Dengan demikian akan menambah jumlah verteksnnya dan amplitudo M akan sebanding dengan pangkat g .

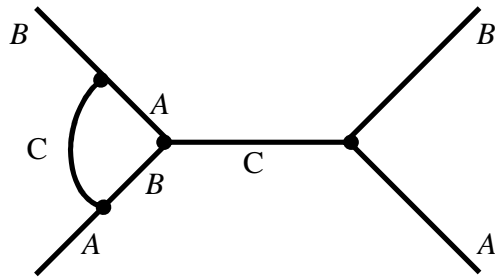
Sebagai contoh kita tinjau sebuah proses $A + A \rightarrow B + B$, yang diberikan oleh diagram berikut



Gambar 6.11.

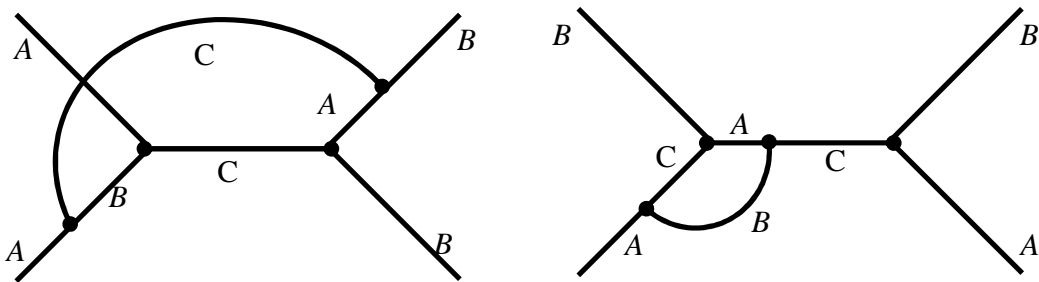
Diagram ini memiliki dua verteks sehingga amplitudo M sebanding dengan g^2 . Sekarang kita ingin mencari diagram orde ke empat dalam proses ini, M sebanding dengan g^4 , jelaslah ada empat buah verteks. Dengan mudah kita dapat menarik garis pada salah satu dari dari kelima kaki-kaki diagram di atas dan berakhir pada kaki yang sama atau berakhir pada kaki yang lain sehingga diperoleh empat buah verteks (titik interaksi). Sehingga ada banyak kemungkinan diagram dengan empat buah verteks. Namun beberapa diagram akan menunjukkan proses yang sama. Misalnya kita tinjau kaki (1), maka kita menambahkan garis yang mulai pada kaki (1) dan berakhir pada kaki (1), (2), atau (3) seperti contoh gambar di bawah ini:





Gambar 6.12.

dan juga ke kaki (4) atau (5),

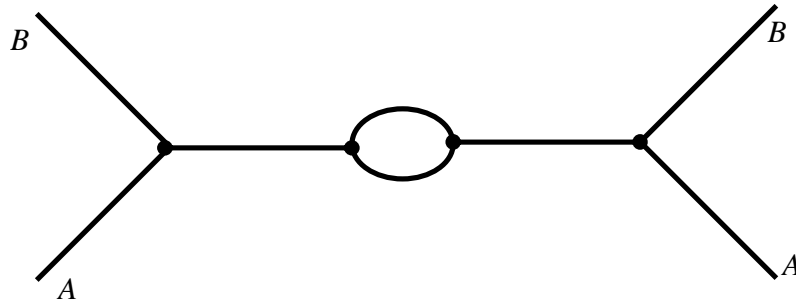


Gambar 6.13.

Jadi ada lima buah diagram yang diperoleh ketika kita menarik garis pada kaki (1). Begitu pula pada kaki (2) akan diperoleh lima buah diagram. Namun demikian ada gambar yang menunjukkan proses sama, sehingga kita cukup menghitung salah satunya. Bila kita membuat garis atau kaki baru dari kaki (3) maka akan diperoleh tiga buah diagram yang tidak sama: $(3) \rightarrow (4)$, $(3) \rightarrow (2)$ dan $(3) \rightarrow (2)$. Mulai dari kaki (4) diperoleh dua buah diagram $(4) \rightarrow (5)$ dan $(4) \rightarrow (2)$ dan dari kaki (5) diperoleh satu buah diagram $(5) \rightarrow (5)$. Jadi ada $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ buah diagram orde ke empat dalam proses ini dan pula ada 15 buah versi kembarnya (*twisted diagram*).

Contoh 6.5.

Carilah amplitudo hamburan orde ke empat dari diagram Feynman untuk proses $A + A \rightarrow B + B$ berikut ini:

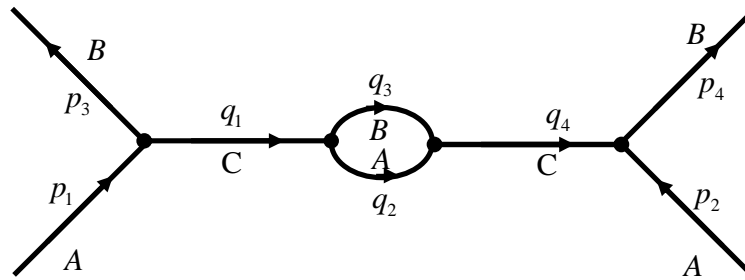


Gambar 6.14.

Jawab

Kita menggunakan kaidah-kaidah Feynman yang diberikan sebelumnya.

1. Memberi label pada setiap kaki.



Gambar 6.15.

2. Dalam kasus ini ada empat buah verteks maka ada empat faktor $-ig$,

$$(-ig) (-ig) (-ig) (-ig)$$

3. Ada empat garis-garis internal, (C), tuliskan faktor

$$\frac{i}{q_1^2 - m_C^2}, \quad \frac{i}{q_2^2 - m_A^2}, \quad \frac{i}{q_3^2 - m_B^2}, \quad \frac{i}{q_4^2 - m_C^2}$$

4. Untuk setiap verteks, fungsi deltanya adalah

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - q_1), \quad (2\pi)^4 \delta^4(q_1 - q_3 - q_2), \\ (2\pi)^4 \delta^4(q_3 + q_2 - q_4), \quad (2\pi)^4 \delta^4(q_4 + p_2 - p_4)$$

5. Satu buah garis internal memiliki faktor

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_1, \quad \frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_2, \quad \frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_3, \quad \frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_4$$

Kemudian integrasi terhadap momentum internal,

$$\begin{aligned}
& \int (-ig)^4 \left(\frac{i}{q_1^2 - m_C^2} \right) \left(\frac{i}{q_2^2 - m_A^2} \right) \left(\frac{i}{q_3^2 - m_B^2} \right) \left(\frac{i}{q_4^2 - m_C^2} \right) \\
& \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - q_1) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 - q_3 - q_2) (2\pi)^4 \delta^4(q_3 + q_2 - q_4) (2\pi)^4 \delta^4(q_4 + p_2 - p_4) \\
& \times \frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_1 \frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_2 \frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_3 \frac{1}{(2\pi)^4} d^4 q_4 \\
& = g^4 \int \frac{\delta^4(p_1 - p_3 - q_1) \delta^4(q_1 - q_3 - q_2) \delta^4(q_3 + q_2 - q_4) \delta^4(q_4 + p_2 - p_4)}{(q_1^2 - m_C^2)(q_2^2 - m_A^2)(q_3^2 - m_B^2)(q_4^2 - m_C^2)} \\
& \quad \times d^4 q_1 d^4 q_2 d^4 q_3 d^4 q_4
\end{aligned}$$

Dengan mengambil $q_1 = p_1 - p_3$ dan $q_4 = p_4 - p_2$ diperoleh

$$\begin{aligned}
& \frac{g^4}{\left[(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 \right] \left[(p_4 - p_2)^2 - m_C^2 \right]} \\
& \quad \times \int \frac{\delta^4(p_1 - p_3 - q_2 - q_3) \delta^4(q_3 + q_2 - p_4 + p_2)}{(q_2^2 - m_A^2)(q_3^2 - m_B^2)} d^4 q_2 d^4 q_3
\end{aligned}$$

Selanjutnya diambil $q_2 = p_1 - p_3 - q_3$, diperoleh

$$\frac{g^4}{(2\pi)^4 \left[(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 \right]} \times \int \frac{\delta^4(p_1 - p_3 - p_4 + p_2)}{\left((p_1 - p_3 - q_3)^2 - m_A^2 \right) (q_3^2 - m_B^2)} d^4 q_3$$

6. Dengan menghilangkan faktor $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$, maka suku sisanya adalah

$$\begin{aligned}
-iM &= \frac{g^4}{(2\pi)^4 \left[(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 \right]} \times \int \frac{1}{\left((p_1 - p_3 - q_3)^2 - m_A^2 \right) (q_3^2 - m_B^2)} d^4 q_3 \\
\Rightarrow M &= \frac{ig^4}{(2\pi)^4 \left[(p_1 - p_3)^2 - m_C^2 \right]} \times \int \frac{1}{\left((p_1 - p_3 - q_3)^2 - m_A^2 \right) (q_3^2 - m_B^2)} d^4 q_3
\end{aligned}$$

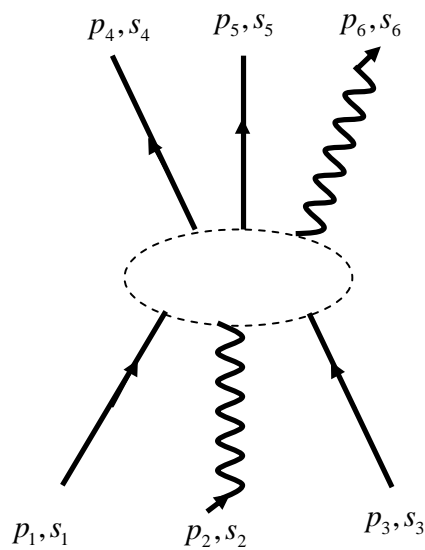
6.5. Kaidah Feynman untuk Elektrodinamika Kuantum QED

Sebagaimana telah kita pelajari pada Bab 4, untuk elektron dan positron bebas kita memiliki:

- Elektron: $\psi(x) = A \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \cdot x\right) u_{(s)}(p), \quad s = 1, 2$
 $(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0$
 $\bar{u}(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0, \quad \bar{u} = u^\dagger \gamma^0$
- Positron: $\psi(x) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar} p \cdot x\right) v_{(s)}(p), \quad s = 1, 2$
 $(\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0$
 $\bar{v}(\gamma^\mu p_\mu + mc) = 0, \quad \bar{v} = v^\dagger \gamma^0$
- Foton: $A^\mu(x) = A \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p \cdot x\right) \epsilon_{(s)}^\mu$
 $\epsilon^\mu p_\mu = 0$

Untuk menghitung amplitudo M dengan menggunakan diagram Feynman dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

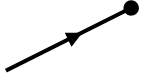





1. *Notasi.* Beri label untuk 4-momentum yang masuk dan keluar p_1, p_2, \dots, p_n serta spin s_1, s_2, \dots, s_n . Beri label momentum internal q_1, q_2 dan seterusnya. Letakkan sebuah panah pada masing-masing garis. Lihat contoh gambar 6.3 di bawah ini.



Gambar 6.16. Contoh diagram Feynman QED

2. *Garis eksternal.* Garis eksternal terkait dengan faktor pengali mengikuti kaidah berikut

Tabel 6.1. Kaidah Feynman untuk QED

Untuk setiap ...		Gambar...	Tuliskan..
Elektron	Masuk		u
	Keluar		\bar{u}
Positron	Masuk		\bar{v}
	Keluar		v
Foton	Masuk		ϵ^μ
	Keluar		$\epsilon^{\mu*}$

3. *Faktor verteks.* Untuk setiap verteks terkait dengan faktor pengali

$$ig_e \gamma^\mu . \quad (6.82)$$

Disini g_e adalah konstanta kopling yang berhubungan dengan muatan positron

$$g_e = e\sqrt{4\pi/\hbar c} = e\sqrt{4\pi\alpha}.$$

4. *Propagator*. Setiap garis internal terkait dengan sebuah faktor pengali:

$$\text{Elektron dan positron: } \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2}. \quad (6.83)$$

$$\text{Foton: } \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}. \quad (6.84)$$

5. *Kekekalan energi dan momentum*. Untuk setiap verteks tuliskan sebuah fungsi delta:

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3). \quad (6.85)$$

Disini $k_1 + k_2 + k_3$ adalah 4-momentum yang masuk ke verteks bila panahnya menunjuk keluar verteks dan minus sebaliknya, kecuali untuk positron eksternal.. Faktor ini menyatakan bahwa untuk setiap verteks berlaku hukum kekekalan energi dan momentum.

6. *Integrasi pada momentum internal*. Untuk setiap momentum internal q , tuliskan faktor

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4q. \quad (6.86)$$

Kemudian integrasi terhadap momentum internal.

7. *Abaikan fungsi delta*. Hasilnya akan meliputi sebuah fungsi delta

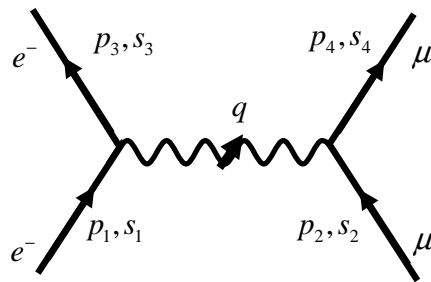
$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$$

Dengan menghilangkan faktor ini, maka suku sisanya adalah $-iM$.

8. *Antisimetrisasi*. Masukkan sebuah tanda minus diantara diagram yang berbeda pada pertukaran dua elektron masuk atau dua positron keluar, atau elektron masuk dengan positron keluar atau elektron keluar dengan positron masuk.

Contoh 6.6.

Carilah amplitudo hamburan orde ke-2 elektron-muon seperti diberikan pada diagram dibawah ini,

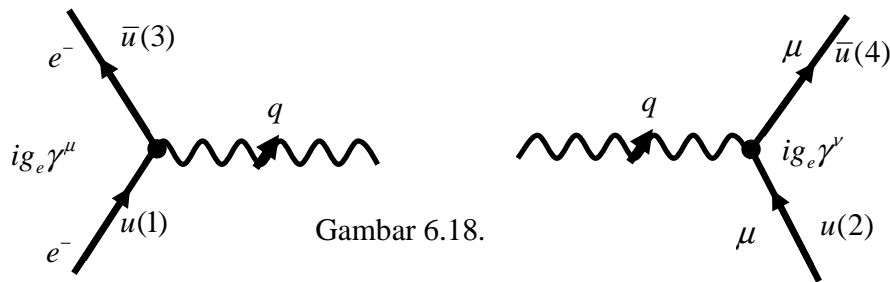


$$e^- + \mu \rightarrow e^- + \mu$$

Gambar 6.17.

Jawab

1. Label sudah diberikan.
2. Garis eksternal elektron dan muon berkaitan dengan faktor:
 elektron: $p_1, s_1 : u(1)$, $p_3, s_3 : \bar{u}(3)$
 muon: $p_2, s_2 : u(2)$, $p_4, s_4 : \bar{u}(4)$
3. Faktor verteks. Ada dua verteks jadi masing-masing memberikan kontribusi:



Gambar 6.18.

Sampai langkah ini kita memperoleh:

- Verteks 1 ada faktor: $\left[\bar{u}(3) (ig_e \gamma^\mu) u(1) \right]$
- Verteks 2 ada faktor: $\left[\bar{u}(4) (ig_e \gamma^\nu) u(2) \right]$

4. Propagator. Disini propagator adalah sebuah foton yang disimbulkan oleh garis internal:

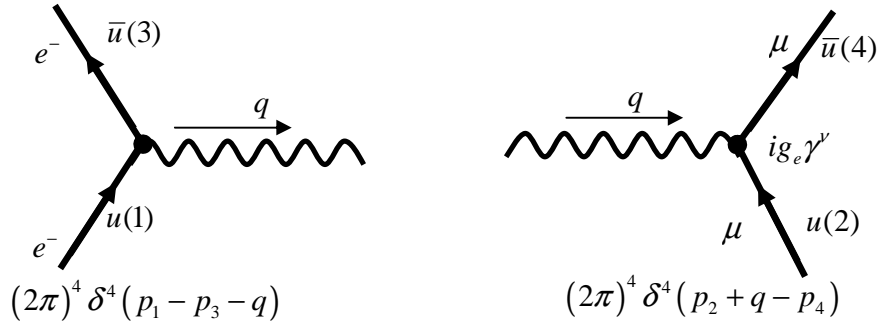
$$\text{wavy line } q \quad : \quad \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

Gambar 6.19.

Sampai langkah ini kita memperoleh:

$$\left[\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)u(1) \right] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \left[\bar{u}(4)(ig_e\gamma^\nu)u(2) \right]$$

5. Kekekalan momentum dan energi. Untuk masing-masing verteks (langkah 3) berlaku hukum kekekalan momentum/energi:



Gambar 6.20.

Sampai langkah ini kita memperoleh:

$$\left[\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)u(1) \right] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \left[\bar{u}(4)(ig_e\gamma^\nu)u(2) \right] \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - q) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q - p_4)$$

6. Integrasi terhadap momentum internal, yaitu terhadap q : $\frac{1}{(2\pi)^4} d^4q$, sehingga

diperoleh:

$$\int \left[\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)u(1) \right] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \left[\bar{u}(4)(ig_e\gamma^\nu)u(2) \right] \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_3 - q) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q - p_4) \frac{1}{(2\pi)^4} d^4q \\ = (2\pi)^4 \int \left[\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)u(1) \right] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \left[\bar{u}(4)(ig_e\gamma^\nu)u(2) \right] \\ \times \delta^4(p_1 - p_3 - q) \delta^4(p_2 + q - p_4) d^4q$$

Dengan mengambil $q = p_1 - p_3$ maka diperoleh

$$(2\pi)^4 \int \left[\bar{u}(3) (ig_e \gamma^\mu) u(1) \right] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \right) \left[\bar{u}(4) (ig_e \gamma^\nu) u(2) \right] \\ \times \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) d^4(p_1 - p_3)$$

7. Dengan menghilangkan faktor $(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)$, maka suku sisanya sama dengan $-iM$, yaitu

$$-iM = \left[\bar{u}(3) (ig_e \gamma^\mu) u(1) \right] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{(p_1 - p_3)^2} \right) \left[\bar{u}(4) (ig_e \gamma^\nu) u(2) \right]$$

Jadi amplitudo M untuk proses hamburan elektron-muon (setelah kita susun suku-sukunya) adalah

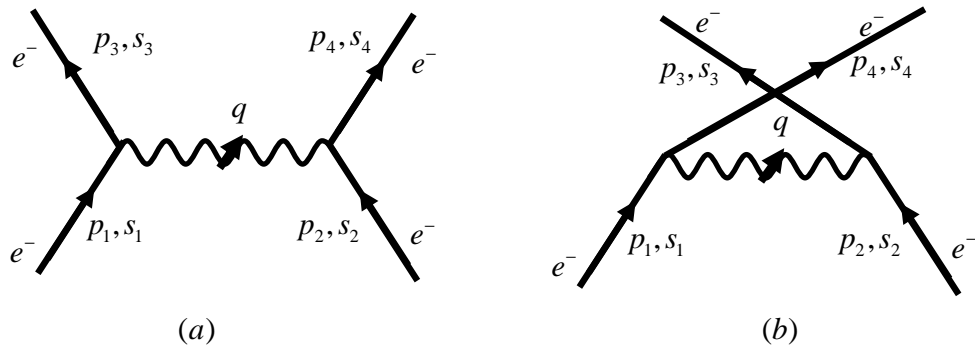
$$M = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} \left[\bar{u}(3) \gamma^\mu u(1) \right] \left[\bar{u}(4) \gamma_\mu u(2) \right]. \quad (6.87)$$

6.5.1. Hamburan elektron-elektron

Sekarang kita tinjau dua partikel terhambur adalah identik, misalnya hamburan elektron-elektron,

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$$

Jika kita perhatikan diagram pada contoh 6 di atas, muon sekarang kita ganti dengan elektron, maka garis eksternal keluar akan diperoleh dengan dua cara yaitu elektron terhambur dengan momentum p_3 dan spin s_3 berasal dari elektron p_1, s_1 (Gambar a) dan p_2, s_2 (Gambar b, dinamakan diagram kembaran, *twisted diagram*). Sehingga diperoleh dua buah diagram.



Gambar 6.21. Hamburan elektron-elektron: $e^- + e^- \rightarrow e^- + e^-$

Dengan mengikuti langkah-langkah contoh 6.6 maka diagram di atas akan menghasilkan amplitudo

$$M_1 = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} \left[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2) \right], \quad (6.88)$$

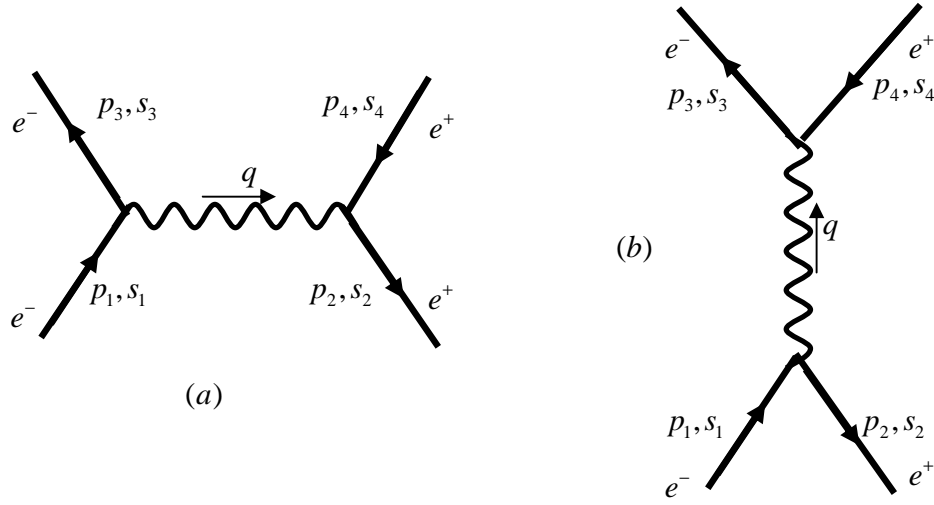
$$M_2 = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_4)^2} \left[\bar{u}(4)\gamma^\mu u(1)\bar{u}(3)\gamma_\mu u(2) \right]. \quad (6.89)$$

Tanda minus karena antikomutasi dari medan-medan fermion, sesuai dengan kaidah 8. Sehingga amplitudo totalnya

$$M = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} \left[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1) \right] \left[\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2) \right] + \frac{g_e^2}{(p_1 - p_4)^2} \left[\bar{u}(4)\gamma^\mu u(1) \right] \left[\bar{u}(3)\gamma_\mu u(2) \right] \quad (6.90)$$

6.5.2. Hamburan elektron-positron

Untuk hamburan elektron-positron, $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$ juga akan diperoleh dua diagram seperti hamburan elektron-elektron. Dua diagram tersebut ditunjukkan pada Gambar 6.5.



Gambar 6.22. Hamburan elektron-positron: $e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+$

Diagram (6.22a) serupa dengan hamburan diagram elektron-muon dengan membalik panah pada garis eksternal positron. Pembalikan tanda ini berarti waktu adalah arah maju. Sehingga diperoleh,

$$(2\pi)^4 \int d^4q \left[\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)u(1) \right] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \left[\bar{v}(2)(ig_e\gamma^\nu)v(4) \right] \times \delta^4(p_1 - p_3 - q)\delta^4(p_2 + q - p_4) \quad (6.91)$$

Amplitudo untuk diagram (a) diperoleh

$$M_1 = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} \left[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1) \right] \left[\bar{v}(2)\gamma^\mu v(4) \right]. \quad (6.92)$$

Diagram (6.22b) adalah diagram kembaran

$$(2\pi)^4 \int d^4q \left[\bar{u}(3)(ig_e\gamma^\mu)u(4) \right] \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \left[\bar{v}(2)(ig_e\gamma^\nu)v(1) \right] \times \delta^4(q - p_3 - p_4)\delta^4(p_1 + p_2 - q) \quad (6.93)$$

Amplitudo untuk diagram (b) adalah

$$M_2 = -\frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2} \left[\bar{u}(3)\gamma^\mu u(4) \right] \left[\bar{v}(2)\gamma^\mu v(1) \right]. \quad (6.94)$$

Selanjutnya dengan menerapkan kaidah (8) diperoleh

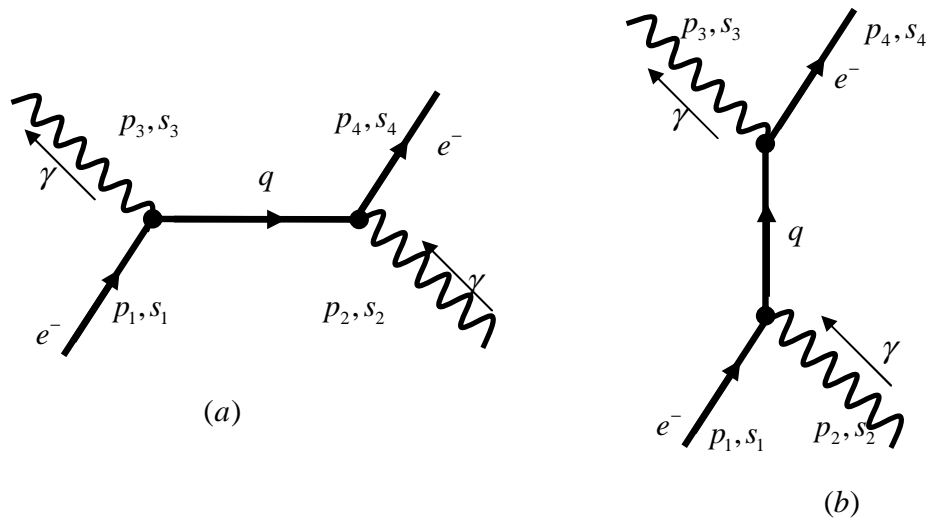
$$M = -\frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)] [\bar{v}(2)\gamma^\mu v(4)] + \frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(4)] [\bar{v}(2)\gamma^\mu v(1)] \quad (6.95)$$

6.5.3. Hamburan Compton

Hamburan Compton adalah contoh yang melibatkan propagator elektron (persamaan (6.83)) dan polarisasi foton,

$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$$

Diagram yang diperlukan untuk menghitung hamburan Compton diberikan pada Gambar 6.23, ada dua diagram dalam hamburan ini.



Gambar 6.23. Hamburan Compton: $\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^-$

Untuk diagram Gambar 6.23a, kita memperoleh

$$(2\pi)^4 \int d^4q \mathcal{E}_\mu(2) \left[\bar{u}(4) (ig_e \gamma^\mu) \left(\frac{i(\gamma^\alpha q_\alpha + mc)}{q^2 - m^2 c^2} \right) (ig_e \gamma^\nu) u(1) \right] \mathcal{E}_\nu^*(3) \times \delta^4(p_1 - p_3 - q) \delta^4(p_2 + q - p_4) \quad (6.96)$$

dengan amplitudo M_1 adalah

$$M_1 = \frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2 - m^2 c^2} \left[\bar{u}(4) \gamma^\mu \varepsilon_\mu(2) (\gamma^\alpha p_{1\alpha} - \gamma^\alpha p_{3\alpha} + mc) \gamma^\nu \varepsilon_\nu^*(3) u(1) \right]. \quad (6.97)$$

Sedangkan untuk diagram Gambar 6.236b diperoleh

$$(2\pi)^4 \int d^4 q \varepsilon_\mu^*(3) \left[\bar{u}(4) (i g_e \gamma^\mu) \left(\frac{i (\gamma^\alpha q_\alpha + mc)}{q^2 - m^2 c^2} \right) (i g_e \gamma^\nu) u(1) \right] \varepsilon_\nu(2) \quad (6.98)$$

$$\times \delta^4(q - p_3 - p_4) \delta^4(p_1 + p_2 - q)$$

dan

$$M_2 = \frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2 - m^2 c^2} \left[\bar{u}(4) \gamma^\nu \varepsilon_\nu^*(3) (\gamma^\alpha p_{1\alpha} + \gamma^\alpha p_{2\alpha} + mc) \gamma^\mu \varepsilon_\mu(2) u(1) \right]. \quad (6.99)$$

Amplitudo total adalah $M = M_1 + M_2$,

$$M = \frac{g_e^2}{(p_1 - p_3)^2 - m^2 c^2} \left[\bar{u}(4) \gamma^\mu \varepsilon_\mu(2) (\gamma^\alpha p_{1\alpha} - \gamma^\alpha p_{3\alpha} + mc) \gamma^\nu \varepsilon_\nu^*(3) u(1) \right] \quad (6.100)$$

$$+ \frac{g_e^2}{(p_1 + p_2)^2 - m^2 c^2} \left[\bar{u}(4) \gamma^\nu \varepsilon_\nu^*(3) (\gamma^\alpha p_{1\alpha} + \gamma^\alpha p_{2\alpha} + mc) \gamma^\mu \varepsilon_\mu(2) u(1) \right]$$

6.6. Trik Casimir

Sejauh ini kita telah menggambar diagram Feynman dan menghitung amplitudo hamburan M . Dari contoh-contoh perhitungan yang telah kita pelajari di atas angka yang dikurung, misalnya (3), mengandung informasi tentang momentum dan spin dari partikel-partikel serta ada polarisasi foton dalam hamburan Compton. Dalam eksperimen spin-spin elektron (atau positron) yang masuk dan keluar adalah ditentukan dan polarisasi foton diberikan, kemudian kita mengukur penampang hamburan dan waktu hidup dari sebuah proses. Penampang hamburan dapat diperoleh dengan mengkuadratkan matriks transisi. Jika orientasi spin adalah acak, maka penampang hamburan yang dihitung adalah rata-rata pada konfigurasi spin awal dan jumlah pada semua konfigurasi akhir. Dengan demikian kita akan menghitung kuadrat dari matriks transisi $|M_{if}|^2$ untuk setiap kemungkinan proses yang dimaksud, kemudian menjumlahkan dan merata-ratakan (lihat kembali persamaan (6.51)). Secara formal dapat dinyatakan sebagai berikut

$$\langle |M|^2 \rangle = \text{rata-rata pada spin awal, jumlah pada spin akhir dari } |M_{if}|^2 \quad (6.101)$$

Kuadrat dari amplitudo hamburan elektron-muon, persamaan (6.87), adalah³

$$|M|^2 = \frac{g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)][\bar{u}(4)\gamma_\mu u(2)][\bar{u}(3)\gamma^\nu u(1)]^* [\bar{u}(4)\gamma_\nu u(2)]^*. \quad (6.102)$$

Permasalahan sekarang adalah menyelesaikan suku kuadrat dari ruas kanan persamaan di atas. Jika kita memandangi suku-suku ini, suku 1 dan 3 serta suku 2 dan 4, maka bentuknya adalah

$$[\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^*. \quad (6.103)$$

Seperti telah disebutkan di atas (a) dan (b) mengandung informasi spin dan momentum, sedangkan Γ_1 dan Γ_2 adalah matriks 4×4 . Untuk memecahkan ungkapan persamaan (6.103) di atas diperlukan sebuah "trick" sedemikian sehingga penjumlahan pada semua spin dapat dinyatakan sebagai perkalian matriks dan mengambil *trace*-nya, trik ini dinamakan *trik Casimir*. Untuk melakukan hal ini, pertama kita hitung bagian konjugat kompleks persamaan (6.103)

$$[\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = [\bar{u}(a)^\dagger \gamma^0 \Gamma_2 u(b)]^\dagger = u(b)^\dagger (\Gamma_2)^\dagger (\gamma^0)^\dagger u(a). \quad (6.104a)$$

Karena $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$ dan $(\gamma^0)^2 = 1$ maka

$$[\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = \underbrace{u(b)^\dagger \gamma^0}_{\bar{u}(b)} \underbrace{\gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0}_{\bar{\Gamma}_2} u(a) = \bar{u}(b)\bar{\Gamma}_2 u(a). \quad (6.104b)$$

dimana

$$\bar{\Gamma}_2 = \gamma^0 \Gamma_2^\dagger \gamma^0. \quad (6.105)$$

Sehingga persamaan (6.103) menjadi

$$[\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(b)\bar{\Gamma}_2 u(a)]. \quad (6.106)$$

Dengan menggunakan hubungan kelengkapan

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)} \bar{u}^{(s)} = (\gamma^\mu p_\mu + m), \quad (6.107)$$

serta menjumlahkan orientasi spin partikel (b) maka

$$\sum_{spin\ b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = \sum_{spin\ b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(b)\bar{\Gamma}_2 u(a)]$$

³ Ingat, disini bukan mengkuadratkan bilangan biasa tetapi $|M|^2 = MM^*$.

$$\begin{aligned}
&= \bar{u}(a)\Gamma_1 \left\{ \sum_{s_b=1,2} u^{(s_b)}(p_b) \bar{u}^{(s_b)}(p_b) \right\} \bar{\Gamma}_2 u(a) \\
&= \bar{u}(a)\Gamma_1 \{ \gamma^\mu p_\mu + m_b \} \bar{\Gamma}_2 u(a)
\end{aligned} \tag{6.108}$$

Selanjutnya kita lanjutkan menjumlahkan orientasi spin partikel (a),

$$\begin{aligned}
\sum_{spin\ a} \sum_{spin\ b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* &= \sum_{spin\ a} \bar{u}(a)\Gamma_1 \{ \gamma^\mu p_\mu + m_b \} \bar{\Gamma}_2 u(a) \\
&= \sum_{s_a=1,2} \bar{u}^{(s_a)}(p_a) Q u^{(s_a)}(p_a)
\end{aligned} \tag{6.109}$$

dimana kita definisikan

$$Q \equiv \Gamma_1 \{ \gamma^\mu p_\mu + m_b \} \bar{\Gamma}_2 \tag{6.110}$$

Suku pada ruas kanan persamaan (6.109) hanyalah perkalian matriks $\bar{u}_{1 \times 4} \cdot Q_{4 \times 4} \cdot u_{4 \times 1}$, jadi dapat dituliskan sebagai berikut

$$\sum_{s_a=1,2} (\bar{u}^{(s_a)}(p_a))_i (Q)_{ij} (u^{(s_a)}(p_a))_j = Q_{ij} \left(\sum_{s_a=1,2} u^{(s_a)}(p_a) \bar{u}^{(s_a)}(p_a) \right)_{ji} \tag{6.111}$$

Gunakan kembali hubungan kelengkapan, sekarang untuk partikel (a), maka diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{s_a=1,2} (\bar{u}^{(s_a)}(p_a))_i (Q)_{ij} (u^{(s_a)}(p_a))_j &= Q_{ij} (\gamma^\mu p_\mu + m_a)_{ji} \\
&= Tr(Q(\gamma^\mu p_\mu + m_a))
\end{aligned} \tag{6.112}$$

dimana Tr menyatakan trace dari matriks, yaitu jumlah semua komponen-komponen diagonalnya⁴. Substitusikan persamaan (6.112) ke persamaann (6.109) maka kita memperoleh

$$\sum_{spin\ a} \sum_{spin\ b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 u(b)]^* = Tr(\Gamma_1 (\gamma^\mu p_\mu + m_b) \bar{\Gamma}_2 (\gamma^\mu p_\mu + m_a)) \tag{6.113}$$

Persamaan ini dinamakan "trik Casimir". Dengan menerapkan trik Casimir duakali maka kuadrat amplitudo hamburan elektron-muon, persamaan (6.102), adalah

⁴ Contoh $Tr(A) = \sum_i A_{ii}$ atau $Tr \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} + a_{22}$.

$$|M|^2 = \frac{g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} Tr \left[\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{p} + m) \right] \times Tr \left[\gamma_\mu (\not{p} + M) \gamma_\nu (\not{p} + M) \right] \quad (6.114a)$$

Disini m adalah massa elektron, M adalah massa muon dan $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$. Karena ada dua partikel, masing-masing dengan dua orientasi spin yang diijinkan maka rata-ratanya adalah 1/4 dari jumlahnya. Sehingga rata-rata kuadrat amplitudonya kemudian dikalikan dengan faktor 1/4 persamaan (6.114),

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{g_e^4}{4(p_1 - p_3)^4} Tr \left[\gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{p} + m) \right] \times Tr \left[\gamma_\mu (\not{p} + M) \gamma_\nu (\not{p} + M) \right] \quad (6.115)$$

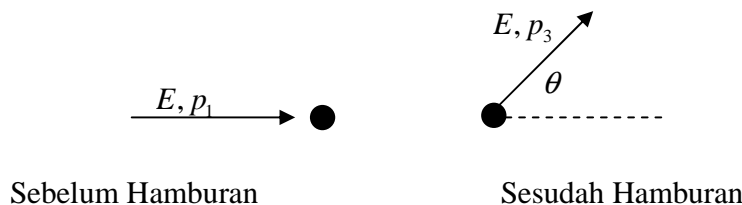
Dengan menghitung trace pada ruas kanan persamaan (6.115) maka diperoleh

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{8g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} \left[(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) - (p_1 \cdot p_3)M^2 - (p_2 \cdot p_4)m^2 + 2m^2M^2 \right] \quad (6.116)$$

Contoh 6.7.

Tinjau hamburan elektron dengan massa m dari sebuah target berat, misalnya muon yang massanya jauh lebih besar dari massa elektron ($M \gg m$). Carilah penampang hamburan diferensial dalam kerangka lab (muon diam)?

Jawab:



Gambar 6.24

Sebelum hamburan kita memiliki

- Elektron datang $p_1 = (E, \vec{p}_1)$
- Muon stasioner $p_2 = (M, \vec{0})$

Setelah hamburan kita memiliki

- Elektron terhambur $p_3 = (E, \vec{p}_3)$
- Muon stasioner $p_4 = (M, \vec{0})$

Disini E adalah energi elektron yang datang dan terhambur, \vec{p}_1 adalah momentum datang dan \vec{p}_3 adalah momentum terhambur, besarnya sama dengan \vec{p}_1 . Sudut hamburan antara kedua momentum ini adalah θ sehingga $\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = \vec{p}^2 \cos \theta$. Kemudian kita juga memperoleh

- $(p_1 - p_3)^2 = -(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)^2 = -\vec{p}_1^2 - \vec{p}_3^2 + 2\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3$
 $= -2\vec{p}^2 + 2\vec{p}^2 \cos \theta = -2\vec{p}^2(1 - \cos \theta) = -4\vec{p}^2 \sin^2(\theta/2)$
- $(p_1 \cdot p_3) = E^2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_3 = \vec{p}^2 + m^2 - \vec{p}^2 \cos \theta = m^2 + 2\vec{p}^2 \sin^2(\theta/2)$
- $(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) = (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3) = M^2 E^2$
- $(p_2 \cdot p_4) = M^2$

Substitusikan persamaan di atas ke persamaan (6.116) diperoleh

$$\langle |M|^2 \rangle = \frac{g_e^4 M^2}{(\vec{p}^2 \sin^2(\theta/2))^2} (m^2 + \vec{p}^2 \cos^2(\theta/2)). \quad (6.117)$$

Selanjutnya penampang hamburan diferensial diberikan oleh

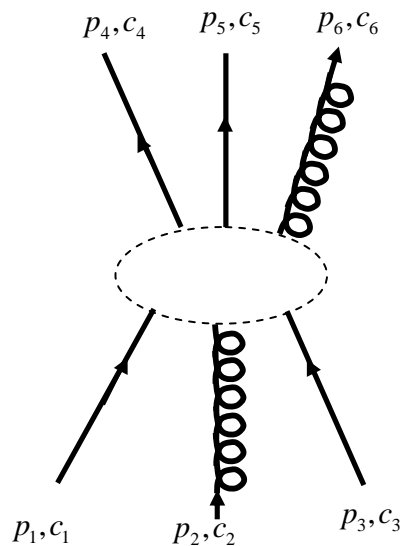
$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{(8\pi M)^2} \langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{(8\pi M)^2} \frac{g_e^4 M^2}{(\vec{p}^2 \sin^2(\theta/2))^2} (m^2 + \vec{p}^2 \cos^2(\theta/2)) \\ &= \left(\frac{\alpha}{2\vec{p}^2 \sin^2(\theta/2)} \right)^2 (m^2 + \vec{p}^2 \cos^2(\theta/2)) \end{aligned} \quad (6.118)$$

Disini kita telah menggunakan definisi konstanta kopling $g_e = \sqrt{4\pi\alpha}$. Persamaan (6.118) dinamakan persamaan "Mott".

6.7. Kaidah Feynman untuk Kromodinamika Kuantum QCD

Pada pasal ini kita akan mempelajari kaidah-kaidah Feynman untuk kromodinamika kuantum (QCD). Interaksi dalam QCD di mediasi oleh gluon. Kuatnya interaksi kromodinamika dinyatakan oleh konstanta kopling kuat $g_s = \sqrt{4\pi\alpha_s}$. Bila interaksi kromodinamika dalam suatu proses telah digambar dalam bentuk diagram maka amplitudo M dapat diperoleh dengan kaidah-kaidah Feynman sebagai berikut:



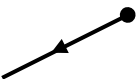

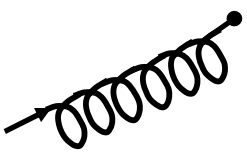
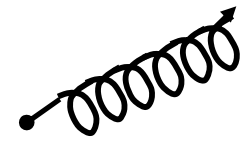
1. *Notasi.* Beri label untuk 4-momentum yang masuk dan keluar p_1, p_2, \dots, p_n , spin s_1, s_2, \dots, s_n serta color c_1, c_2, \dots, c_n . Beri label momentum internal q_1, q_2 dan seterusnya. Letakkan sebuah panah pada masing-masing garis. Lihat contoh gambar di bawah ini.



Gambar 6.25. Contoh diagram Feynman QCD

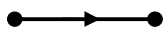
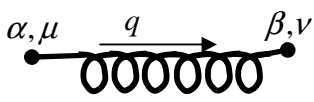
2. *Garis eksternal.* Untuk sebuah quark eksternal dengan momentum p , spin s , dan color c mengikuti kaidah berikut:

Tabel 6.2. Quarks eksternal dengan momentum, spin dan color

Untuk setiap ...		Gambar	Faktor pengali
Quark	Masuk		$u^{(s)}(p)c$
	Keluar		$\bar{u}^{(s)}(p)c^\dagger$
Antiquark	Masuk		$\bar{v}^{(s)}(p)c^\dagger$
	Keluar		$v^{(s)}(p)c$
Gluon	Masuk		$\varepsilon_\mu(p)a^\alpha$
	Keluar		$\varepsilon_\mu^*(p)a^{\alpha*}$

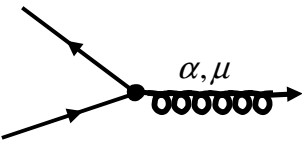
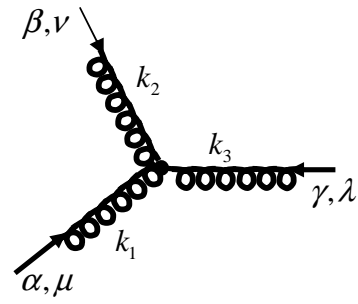
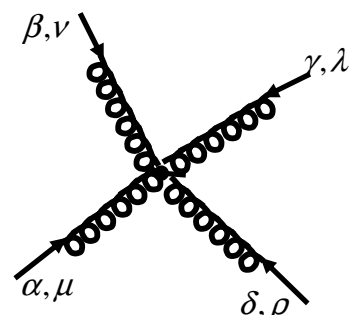
3. *Propagator*. Setiap garis internal terkait dengan faktor

Tabel 6.3. Propagator dan Faktor pengali

Untuk setiap ...	Gambar	Faktor pengali
Quark-antiquark		$\frac{i(\gamma^\mu q + m)}{q^2 - m^2}$
Gluon		$\frac{-ig_{\mu\nu} \delta^{\alpha\beta}}{q^2}$

4. *Verteks*. Setiap verteks terkait dengan faktor

Tabel 6.4. Propagator dan Faktor pengali

Untuk setiap ...	Gambar	Faktor pengali
Quark-gluon		$\frac{-ig_s}{2} \lambda^\alpha \gamma^\mu$
Tiga Gluon		$-ig_s f^{\alpha\beta\gamma} \left[g^{\mu\nu} (k_1 - k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda} (k_2 - k_3)_\mu + g_{\lambda\mu} (k_2 - k_3)_\nu \right]$
Empat Gluon		$-ig_s^2 \left[f^{\alpha\beta\eta} f^{\gamma\delta\eta} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) + f^{\alpha\delta\eta} f^{\beta\gamma\eta} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) + f^{\alpha\gamma\eta} f^{\beta\delta\eta} (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}) \right]$

Contoh 6.8

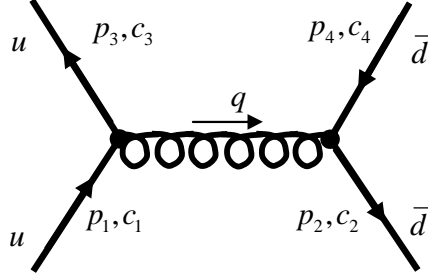
Carilah amplitudo hamburan untuk sebuah interaksi quark dan antiquark

$$u + \bar{d} \rightarrow u + \bar{d}$$

Jawab:

Untuk mencari amplitudo hamburan untuk sebuah interaksi quark dan antiquark kita gunakan kaidah Feynman untuk QCD di atas:

1. Diagram dengan label diberikan sebagai berikut



2. Setiap garis eksternal diberikan oleh

$$(p_1, c_1) \rightarrow u(1)c_1, \quad (p_2, c_2) \rightarrow \bar{v}(2)c_2^\dagger,$$

$$(p_3, c_3) \rightarrow \bar{u}(3)c_3^\dagger, \quad (p_4, c_4) \rightarrow v(4)c_4$$

3. Propagator. Garis internal gluon terkait dengan faktor $\frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}}{q^2}$

4. Verteks. Verteks quark-gluon diberikan oleh faktor $\frac{-ig_s}{2}\lambda^\alpha\gamma^\mu$

5. Kalikan semua faktor di atas, sehingga diperoleh

$$-iM = [\bar{u}(3)c_3^\dagger] \left[\frac{-ig_s}{2}\lambda^\alpha\gamma^\mu \right] [u(1)c_1] \left[\frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}}{q^2} \right] [\bar{v}(2)c_2^\dagger] \left[\frac{-ig_s}{2}\lambda^\beta\gamma^\nu \right] [v(4)c_4]$$

Maka amplitudo M adalah

$$M = \frac{-g_s^2}{4} \frac{1}{q^2} [\bar{u}(3)\gamma^\mu u(1)g_{\mu\nu}\bar{v}(2)\gamma^\nu v(4)] [c_3^\dagger\lambda^\alpha c_1\delta^{\alpha\beta}c_2^\dagger\lambda^\beta c_4]$$

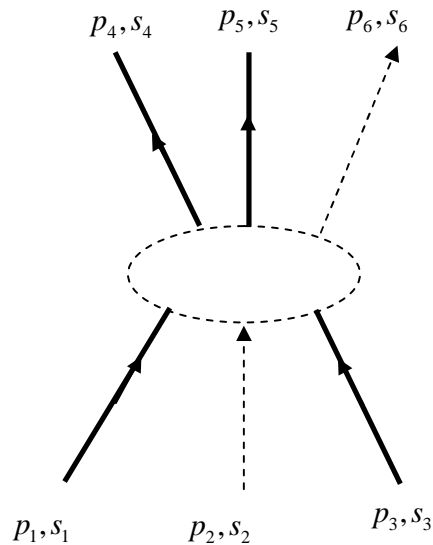
6.8. Kaidah Feynman Interaksi Lemah

Partikel perantara atau mediator dalam interaksi lemah (analog dengan foton dalam QED dan gluon dalam QCD) adalah boson gauge W^\pm dan Z^0 yang memiliki massa

$$M_W = 82 \pm 2 \text{ GeV}, \quad M_Z = 92 \pm 2 \text{ GeV}$$

Untuk mempelajari proses hamburan atau peluruhan dalam interaksi lemah, kaidah-kaidah Feynman diberikan sebagai berikut⁵

1. *Notasi.* Beri label untuk 4-momentum yang masuk dan keluar p_1, p_2, \dots, p_n serta spin s_1, s_2, \dots, s_n . Beri label momentum internal q_1, q_2 dan seterusnya. Letakkan sebuah panah pada masing-masing garis. Lihat contoh gambar di bawah ini.



Gambar 6.26 . Contoh diagram Feynman interaksi lemah

2. *Faktor verteks.* Untuk setiap verteks terkait dengan faktor pengali

$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$$

Disini g_w adalah konstanta kopling yang berhubungan dengan muatan positron

$$g_w = e\sqrt{4\pi\alpha_w} .$$

3. *Propagator.* Setiap garis internal terkait dengan sebuah faktor pengali:

$$W\text{-boson: } \frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_w^2)}{q^2 - M_w^2}$$

⁵ Kaidah Feynman untuk interaksi lemah serupa dengan QED namun sekarang melibatkan partikel-perantara bermassa (*massive*).

$$Z\text{-boson: } \frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_z^2)}{q^2 - M_z^2}$$

Dalam eksperimen, biasanya q^2 jauh lebih kecil dari $M_{w^\pm z}^2$ sehingga propagator untuk $q^2 \ll M_{w^\pm z}^2$ diberikan oleh

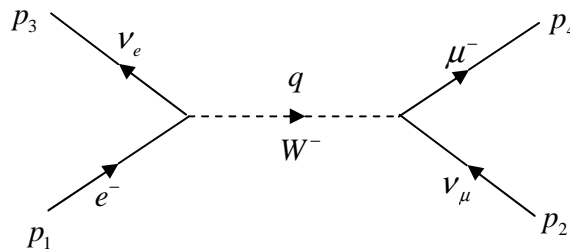
$$W\text{-boson: } \frac{ig_{\mu\nu}}{M_w^2}$$

$$Z\text{-boson: } \frac{ig_{\mu\nu}}{M_z^2}$$

Contoh 6.9

Carilah penampang hamburan untuk proses peluruhan muon inverse

$$\nu_\mu + e^- \rightarrow \mu^- + \nu_e$$



Jawab

Untuk proses di atas kita ikuti langkah-langkah berikut:

1. Notasi telah jelas diberikan
2. Setiap garis eksternal diberikan oleh

$$(p_1, s_1) \rightarrow u(1), \quad (p_2, s_2) \rightarrow u(2),$$

$$(p_3, s_3) \rightarrow \bar{u}(3), \quad (p_4, s_4) \rightarrow \bar{u}(4)$$

3. Verteks diberikan oleh faktor

$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$$

Sampai langkah ini kita memperoleh

$$\left[\bar{u}(3) \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(1) \right] \left[\bar{u}(4) \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(2) \right]$$

4. Propagator diberikan oleh faktor $\frac{ig_{\mu\nu}}{M_w^2}$, dan diperoleh

$$\left[\bar{u}(3) \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(1) \right] \left(\frac{ig_{\mu\nu}}{M_w^2} \right) \left[\bar{u}(4) \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(2) \right]$$

5. Hasil ini adalah sama dengan $-iM$

$$-iM = \left[\bar{u}(3) \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(1) \right] \left(\frac{ig_{\mu\nu}}{M_w^2} \right) \left[\bar{u}(4) \frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) u(2) \right]$$

Maka amplitudo M adalah

$$M = \left(\frac{g_w^2}{8M_w^2} \right) \left[\bar{u}(3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(1) \right] \left[\bar{u}(4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(2) \right]$$

6. Untuk memperoleh penampang hamburan terlebih dahulu kita mencari kuadratnya

$$|M|^2 = \left(\frac{g_w^2}{8M_w^2} \right)^2 \left[\bar{u}(3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(1) \right] \left[\bar{u}(4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(2) \right] \\ \times \left[\bar{u}(3) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(1) \right]^* \left[\bar{u}(4) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u(2) \right]^*$$

7. Gunakan trik Casimir dan hitung trace-nya maka diperoleh

$$\sum_{spin} |M|^2 = 4 \left(\frac{g_w}{M_w} \right)^4 (p_1 \cdot p_2) (p_3 \cdot p_4)$$

8. Elektron mempunyai dua keadaan spin sedangkan neutrino hanya memiliki satu keadaan spin, yaitu neutrino selalu dalam skrup putar kiri (*left handed*) sehingga kita cukup mengalikan dengan faktor setengah persamaan di atas yang memberikan amplitudo rata-rata

$$\langle |M|^2 \rangle = 2 \left(\frac{g_w}{M_w} \right)^4 (p_1 \cdot p_2) (p_3 \cdot p_4)$$

Dalam kerangka pusat massa kita memperoleh

$$\langle |M|^2 \rangle = 8 \left(\frac{g_w E}{M_w} \right)^4 \left(1 - \left(\frac{m_\mu}{2E} \right)^2 \right)$$

dimana E adalah energi elektron (atau neutrino) yang datang dan m_μ adalah massa neutrino. Penampang hamburan diferensial adalah

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{(8\pi M_w)^2} \langle |M|^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{g_w^2 E}{4\pi M_w^2} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{m_\mu}{2E} \right)^2 \right)^2$$

Rangkuman

- Laju transisi dikenal dengan *Fermi Golden Rule* didefinisikan sebagai

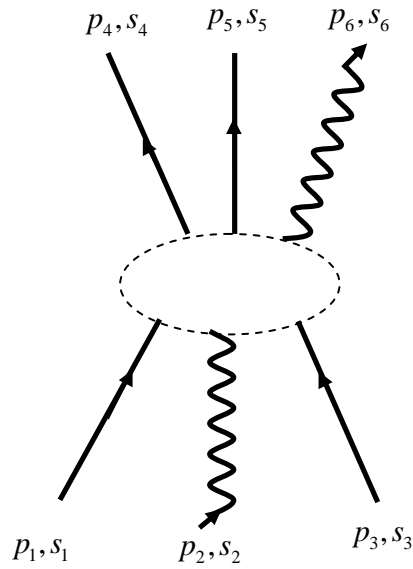
$$W_{fi} = \frac{P}{Vt} = (2\pi)^4 \sum \delta^4(p_f - p_i) |T_{fi}|^2$$

Sedangkan laju peluruhan dituliskan

$$d\Gamma = \frac{dW}{\text{rapat partikel datang}}$$

- Untuk menghitung amplitudo M dengan menggunakan diagram Feynman untuk interaksi elektromagnetik dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:



1. *Notasi.* Beri label untuk 4-momentum yang masuk dan keluar p_1, p_2, \dots, p_n serta spin s_1, s_2, \dots, s_n . Beri label momentum internal q_1, q_2 dan seterusnya. Letakkan sebuah panah pada masing-masing garis. Lihat contoh gambar 3 di bawah ini.



Gambar 6.27. Contoh diagram Feynman QED

2. *Garis eksternal.* Garis eksternal terkait dengan faktor pengali mengikuti kaidah berikut

Untuk setiap ...		Gambar...	Tuliskan..
Elektron	Masuk		u
	Keluar		\bar{u}
Positron	Masuk		\bar{v}
	Keluar		v

Foton	Masuk		ϵ^μ
	Keluar		$\epsilon^{\mu*}$

3. *Faktor verteks.* Untuk setiap verteks terkait dengan faktor pengali

$$ig_e \gamma^\mu . \quad (6.82)$$

Disini g_e adalah konstanta kopling yang berhubungan dengan muatan positron

$$g_e = e\sqrt{4\pi/\hbar c} = e\sqrt{4\pi\alpha} .$$

4. *Propagator.* Setiap garis internal terkait dengan sebuah faktor pengali:

$$\text{Elektron dan positron: } \frac{i(\gamma^\mu q_\mu + m)}{q^2 - m^2} . \quad (6.83)$$

$$\text{Foton: } \frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} . \quad (6.84)$$

5. *Kekekalan energi dan momentum.* Untuk setiap verteks tuliskan sebuah fungsi delta:

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3) . \quad (6.85)$$

Disini $k_1 + k_2 + k_3$ adalah 4-momentum yang masuk ke verteks bila panahnya menunjuk keluar verteks dan minus sebaliknya, kecuali untuk positron eksternal.. Faktor ini menyatakan bahwa untuk setiap verteks berlaku hukum kekekalan energi dan momentum.

6. *Integrasi pada momentum internal.* Untuk setiap momentum internal q , tuliskan faktor

$$\frac{1}{(2\pi)^4} d^4q . \quad (6.86)$$

Kemudian integrasi terhadap momentum internal.

7. *Abaikan fungsi delta.* Hasilnya akan meliputi sebuah fungsi delta

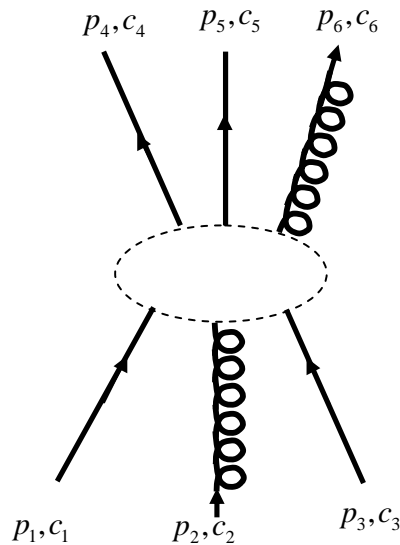
$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n)$$

Dengan menghilangkan faktor ini, maka suku sisanya adalah $-iM$.

8. *Antisimetrisasi.* Masukkan sebuah tanda minus diantara diagram yang berbeda pada pertukaran dua elektron masuk atau dua positron keluar, atau elektron masuk dengan positron keluar atau elektron keluar dengan positron masuk.



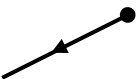

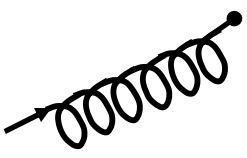
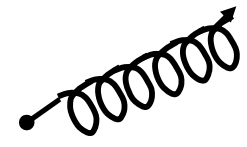
- Untuk menghitung amplitudo M dengan menggunakan diagram Feynman untuk interaksi kuat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. *Notasi.* Beri label untuk 4-momentum yang masuk dan keluar p_1, p_2, \dots, p_n , spin s_1, s_2, \dots, s_n serta color c_1, c_2, \dots, c_n . Beri label momentum internal q_1, q_2 dan seterusnya. Letakkan sebuah panah pada masing-masing garis. Lihat contoh gambar di bawah ini.

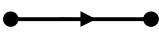
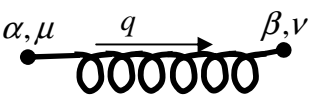


Gambar 6.28. Contoh diagram Feynman QCD

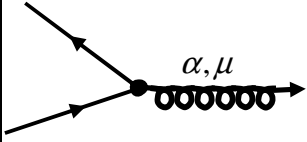
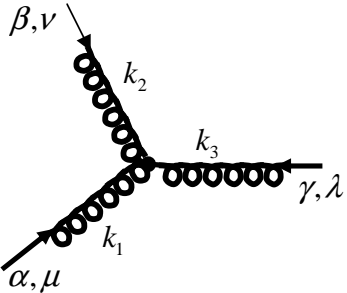
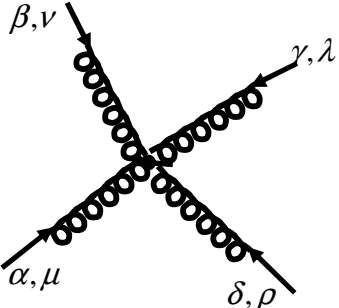
2. *Garis eksternal.* Untuk sebuah quark eksternal dengan momentum p , spin s , dan color c mengikuti kaidah berikut:

Untuk setiap ...		Gambar	Faktor pengali
Quark	Masuk		$u^{(s)}(p)c$
	Keluar		$\bar{u}^{(s)}(p)c^\dagger$
Antiquark	Masuk		$\bar{v}^{(s)}(p)c^\dagger$
	Keluar		$v^{(s)}(p)c$
Gluon	Masuk		$\epsilon_\mu(p)a^\alpha$
	Keluar		$\epsilon_\mu^*(p)a^{\alpha*}$

3. *Propagator*. Setiap garis internal terkait dengan faktor

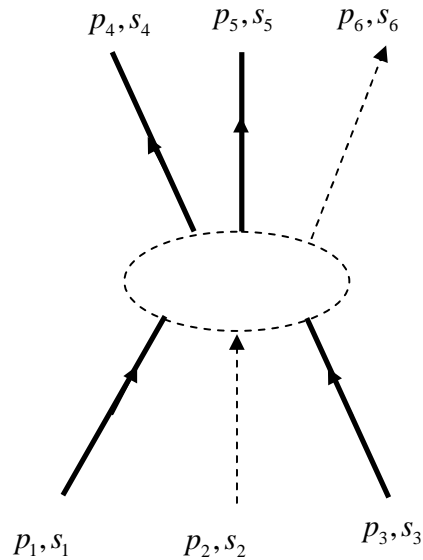
Untuk setiap ...	Gambar	Faktor pengali
Quark-antiquark		$\frac{i(\gamma^\mu q + m)}{q^2 - m^2}$
Gluon		$\frac{-ig_{\mu\nu}\delta^{\alpha\beta}}{q^2}$

4. *Verteks*. Setiap verteks terkait dengan faktor

Untuk setiap ...	Gambar	Faktor pengali
Quark-gluon		$\frac{-ig_s}{2} \lambda^\alpha \gamma^\mu$
Tiga Gluon		$-ig_s f^{\alpha\beta\gamma} \left[g^{\mu\nu} (k_1 - k_2)_\lambda + g_{\nu\lambda} (k_2 - k_3)_\mu + g_{\lambda\mu} (k_2 - k_3)_\nu \right]$
Empat Gluon		$-ig_s^2 \left[f^{\alpha\beta\eta} f^{\gamma\delta\eta} (g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho} - g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda}) + f^{\alpha\delta\eta} f^{\beta\gamma\eta} (g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho} - g_{\mu\lambda} g_{\nu\rho}) + f^{\alpha\gamma\eta} f^{\delta\beta\eta} (g_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} - g_{\mu\nu} g_{\lambda\rho}) \right]$

- Untuk mempelajari proses hamburan atau peluruhan dalam interaksi lemah, kaidah-kaidah Feynman diberikan sebagai berikut⁶
 1. *Notasi*. Beri label untuk 4-momentum yang masuk dan keluar p_1, p_2, \dots, p_n serta spin s_1, s_2, \dots, s_n . Beri label momentum internal q_1, q_2 dan seterusnya. Letakkan sebuah panah pada masing-masing garis. Lihat contoh gambar di bawah ini.

⁶ Kaidah Feynman untuk interaksi lemah serupa dengan QED namun sekarang melibatkan partikel-perantara bermassa (*massive*).



Gambar 6.29 . Contoh diagram Feynman interaksi lemah.

2. *Faktor verteks.* Untuk setiap verteks terkait dengan faktor pengali

$$\frac{-ig_w}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5)$$

3. Disini g_w adalah konstanta kopling yang berhubungan dengan muatan positron

$$g_w = e\sqrt{4\pi\alpha_w}.$$

4. *Propagator.* Setiap garis internal terkait dengan sebuah faktor pengali

$$W\text{-boson: } \frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_w^2)}{q^2 - M_w^2}$$

$$Z\text{-boson: } \frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_z^2)}{q^2 - M_z^2}$$

5. Dalam eksperimen, biasanya q^2 jauh lebih kecil dari $M_{w^\pm z}^2$ sehingga propagator untuk $q^2 \ll M_{w^\pm z}^2$ diberikan oleh

a. *W-boson:* $\frac{ig_{\mu\nu}}{M_w^2}$

b. *Z-boson:* $\frac{ig_{\mu\nu}}{M_z^2}$

Soal-soal Latihan

1. Turunkan persamaan (6.31) dan (6.32)!
2. Buktikan persamaan laju transisi persamaan (6.49)!
3. Hitung amplitudo untuk hamburan elektron-muon dalam sistem pusat massa, asumsikan bahwa e dan μ mendekati satu dengan yang lain sepanjang sumbu-z, tolak-menolak dan kembali ke sumbu-z. Asumsikan pula partikel awal dan akhir memiliki helisitas +1.
4. (a) Hitung amplitudo total untuk pemusnahan pasangan (*pair annihilation*) dari proses $e^+ + e^- \rightarrow \gamma + \gamma$!
(b) Hitung penampang hamburan diferensial dari proses ini!
5. Peroleh trik Casimir, kerjakan dengan cara yang serupa penurunan persamaan (6.113)
(a) untuk antipartikel

$$\sum_{spin\ a} \sum_{spin\ b} [\bar{v}(a)\Gamma_1 v(b)][\bar{v}(a)\Gamma_2 v(b)]^*$$

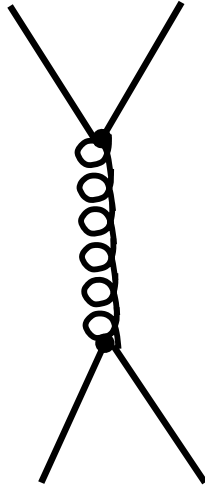
- (b) untuk kasus campuran

$$\sum_{spin\ a} \sum_{spin\ b} [\bar{u}(a)\Gamma_1 v(b)][\bar{u}(a)\Gamma_2 v(b)]^*, \text{ dan } \sum_{spin\ a} \sum_{spin\ b} [\bar{v}(a)\Gamma_1 u(b)][\bar{v}(a)\Gamma_2 u(b)]^*$$

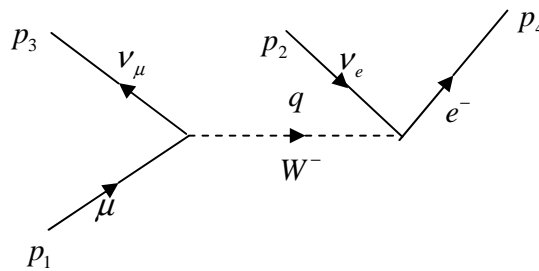
6. (a) Hitunglah *trace* dari hamburan elektron-muon!
(b) Dengan menggunakan hasil (a) buktikan bahwa

$$\begin{aligned} \langle |M|^2 \rangle &= \frac{8g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} [(p_1 \cdot p_2)(p_3 \cdot p_4) + (p_1 \cdot p_4)(p_2 \cdot p_3)] \\ &\quad - \frac{8g_e^4}{(p_1 - p_3)^4} [(p_1 \cdot p_3)M^2 + (p_2 \cdot p_4)m^2 - 2m^2M^2] \end{aligned}$$

- (c) Mulai dari soal (b) hitunglah amplitudo rata-rata spin dalam kerangka pusat massa untuk kasus energi tinggi $m, M \rightarrow 0$!
- (d) Hitung pula penampang hamburan diferensial dalam kerangka pusat massa. Misalkan E adalah energi elektron dan θ sudut hamburan!
7. Ikuti contoh 6.8, namun sekarang untuk mencari amplitudo dari interaksi quark dan quark!
8. Carilah amplitudo M untuk diagram berikut dalam interaksi kromodinamik!



9. Diagram Feynman untuk peluruhan muon $\mu \rightarrow e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ adalah



- (a) Hitunglah amplitudo M !
- (b) Hitunglah amplitudo rata-rata spin $\langle |M|^2 \rangle$!
- (c) Hitung $\langle |M|^2 \rangle$ dalam kerangka diam muon!
- (d) Hitung laju peluruhan $d\Gamma$!

10. Seperti soal 9 sekarang tinjau untuk kasus peluruhan neutron $n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$:

- (a) Gambar diagram Feynman untuk kasus ini!
- (b) Hitunglah amplitudo M !
- (c) Hitunglah amplitudo rata-rata spin $\langle |M|^2 \rangle$!
- (d) Hitung $\langle |M|^2 \rangle$ dalam kerangka diam muon!
- (e) Hitung laju peluruhan $d\Gamma$!