

DISTRIBUSI SAMPEL

ReadOne©2008

Populasi VS Sampel

Populasi

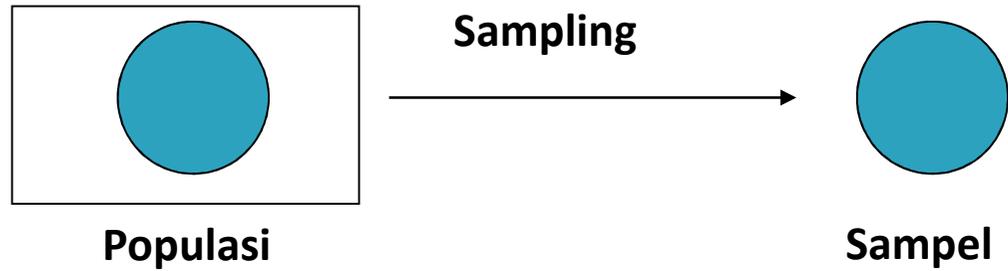
- Keseluruhan pengamatan yang diteliti.
- Ada 2 macam, populasi terbatas dan tak terbatas.
- Ukuran populasi : banyaknya pengamatan (N)
- Karakteristik : ciri atau sifat dari populasi
- Parameter : hasil pengukuran karakteristik (μ dan σ)
- Sensus : cara mengumpulkan data

Kelemahan Populasi :

1. Memerlukan biaya yang sangat mahal
2. Memerlukan waktu yang lama
3. Memerlukan tenaga dalam jumlah yang besar
4. Data yang diperoleh tidak akurat

Sampel

- Mengambil sebagian anggota dari populasi
- Sampel ada 2, sampel besar dan sampel kecil
- Fungsinya untuk menyimpulkan atau mengetahui karakteristik atau parameter dari populasi (potret /gambaran dari populasi)
- Ukuran sampel : banyaknya pengamatan (n)
- Statistik : hasil pengukuran karakteristik (\bar{X} dan S)
- Sampling : cara mengumpulkan data



Populasi	Sampel
N	n
Parameter	Statistik
μ	\bar{X}
σ	S
Terbatas/Tak terbatas	Besar / Kecil

Keuntungan Sampel :

1. Biaya lebih murah
2. Waktu yang lebih singkat
3. Tenaga yang diperlukan lebih sedikit
4. Data yang diperoleh lebih akurat

Sampel harus representatif dengan ciri-ciri :

1. Mempunyai ukuran tertentu yang memakai syarat
2. Mempunyai kesalahan kecil
3. Dipilih dengan prosedur yang benar berdasarkan teknik atau cara sampling tertentu

Teknik Sampling

Ada 2 macam, sampel probabilitas dan non probabilitas. Sampel probabilitas ada empat teknik yang semuanya dapat dilakukan dengan pengembalian atau tanpa pengembalian, yaitu :

1. Teknik pengambilan dengan acak sederhana
2. Teknik pengambilan dengan acak sistematis
3. Teknik pengambilan dengan acak stratifikasi
4. Teknik pengambilan dengan acak kluster

Sampling dengan Pengembalian & Tanpa Pengembalian

- ▶ Jika populasi berukuran N diambil sampel berukuran n dengan pengembalian, maka ada N^n buah sampel yang mungkin diambil
- ▶ Jika populasi berukuran N diambil sampel berukuran n dengan tanpa pengembalian, maka ada $\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$ buah sampel yang mungkin diambil

Contoh: Diberikan populasi dengan data 23,23,21,22,24 diambil sampel berukuran 2, ada berapa buah sampel semuanya jika diambil dengan pengembalian & tanpa pengembalian, kemudian berikan semua sampel yang mungkin?

Dengan pengembalian : $N^n = 5^2 = 25$ buah sampel

Sampel yang mungkin: (23,23),(23,23),(23,21),(23,22),(23,24),(23,23),(23,23),(23,21),(23,22),
(23,24),(21,23),(21,23),(21,21),(21,22),(21,24),(22,23),(22,23),(22,21),(22,22),(22,24),
(24,23), (24,23),(24,21),(24,22),(24,24)

Tanpa pengembalian $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{20}{2} = 10$ buah sampel

Sampel yang mungkin: (23,23),(23,21),(23,22),(23,24),(23,21),
(23,22),(23,24),(21,22),(21,24),(22,24)

Teknik Pengambilan dengan Acak Sederhana

Pengambilan sampel sebanyak n dimana setiap anggota populasi mempunyai kesempatan yang sama untuk diambil.

Teknik ini dipilih jika populasinya homogen.

Biasanya dilakukan dengan :

1. Menggunakan undian.
2. Dengan tabel bilangan acak.

Pengambilan Sampel dengan Daftar Angka Acak

No	0-4	5-8	9-12	13-16	17-20	21-24	25-28	29-32
1	0249	0541	2227	9443	9364	0423	0720	7411
2	1196	6834	6960	6278	3701	0925	3302	0801
3	4825	6034	6549	6992	4079	0540	3351	5439
4	2924	6730	8021	4812	3536	0488	1899	7749
5	3253	2772	6572	4307	0722	8652	9184	5792
6	6675	7989	5592	3759	3431	4320	4558	2545
7	1126	6345	4576	5059	7746	3466	8269	9926
8	1177	2391	4245	5618	0146	9313	7489	2464
9	6256	1303	6503	4081	4754	5179	8081	3361
10	6279	6307	7935	4977	0501	3010	5081	3300

Contoh: Sebuah populasi terdiri dari 2.476 anggota. Diperlukan sampel acak berukuran 10 dengan menggunakan tabel daftar angka acak dimulai dari baris pertama kolom no.1. Tentukanlah sampelnya!

Teknik Pengambilan dengan Acak Sistematis

Dengan mengambil unsur ke- k dalam populasi dimana titik awalnya ditentukan secara acak diantara k unsur tersebut.

Sering digunakan karena dapat menarik kesimpulan yang tepat mengenai parameter populasi sebab sampelnya menyebar secara merata di seluruh populasi.

Teknik Pengambilan dengan Acak Stratifikasi

Dilakukan dengan membagi populasi menjadi beberapa strata (tingkatan) kemudian sampel diambil secara acak dari setiap tingkatan.

Teknik ini dilakukan bila populasinya heterogen.

Cara pengambilan sampel untuk setiap tingkatan tidak sama, harus sebanding dengan jumlah anggota setiap tingkatan (proporsional).

Rumusnyanya :

$$n_i = \frac{N_i}{N} n$$

Teknik Pengambilan dengan Acak Kluster

Mengambil beberapa kluster (kelompok) secara acak kemudian semua atau sebagian dari anggota masing-masing kelompok diambil secara acak sebagai sampel.

Distribusi Sampel

Ada empat macam distribusi sampel :

1. Distribusi sampel rata-rata
2. Distribusi sampel proporsi
3. Distribusi sampel beda dua rata-rata
4. Distribusi sampel beda dua proporsi

Distribusi Sampel Rata-rata

Bila populasi terbatas berukuran N dengan rata-rata μ_x dan simpangan baku σ_x diambil sampel berukuran n secara berulang tanpa pengembalian, maka diperoleh :

1. Distribusi sampel rata-rata $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$
2. Simpangan baku

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

dimana $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ disebut faktor koreksi

Bila $n \geq 30$, maka distribusi sampelnya akan mendekati distribusi normal sehingga variabel random Z dapat dihitung dengan rumus :

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu_X}{\sigma_{\bar{X}}}$$

Contoh :

Kecepatan maksimum 2000 mobil mempunyai rata-rata 135,5 km/jam dengan simpangan baku 5,2 km/jam. Jika sampel sebesar 150 mobil dipilih secara acak tanpa pengembalian, hitung probabilitas kecepatan maksimum rata-rata dari 150 mobil tersebut yang lebih besar dari 136,1 km/jam!

$$\text{Jawab : } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{5,2}{\sqrt{150}} \cdot \sqrt{\frac{2000-150}{2000-1}} = 0,41$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_x}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{136,1 - 135,5}{0,41} = 1,46$$

Jadi probabilitas kecepatan maksimum rata-rata mobil yang lebih besar dari 136,1 km/jam adalah $P(X > 136,1) = P(Z > 1,46) = 0,4279$

Distribusi Sampel Proporsi

Bila populasi berukuran N mengandung jenis p sebanyak X, maka proporsi p adalah X/N .

Jika dari populasi tersebut diambil sampel berukuran n yang juga mengandung proporsi x/n dan sampel diambil berulang maka distribusi sampel proporsinya mempunyai :

1. Rata-rata $\mu_{\hat{p}} = \mu_p = \frac{X}{N}$

2. Simpangan baku $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$

3. Variabel random $Z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}}$

Contoh :

Diketahui sebanyak 10% dari ibu-ibu rumah tangga di Bandung memakai detergen A untuk mencuci pakaiannya. Jika dari populasi tersebut diambil sampel berukuran 100 :

- a. Tentukan rata-rata dan simpangan baku dari populasi ibu-ibu rumah tangga yang memakai detergen A!
- b. Bila dari sampel tersebut ternyata terdapat paling sedikit 15 ibu rumah tangga yang memakai detergen A, tentukan probabilitasnya!

Jawab :

a. Rata-rata = 0,1

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,1 \cdot 0,9}{100}} = 0,03$$

b. Proporsi yang memakai detergen A adalah $15/100 = 0,15$

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{0,15 - 0,1}{0,03} = 1,67$$

$$P(Z > 1,67) = 0,5 - 0,4525 = 0,0475$$

Distribusi Sampel Beda Dua Rata-rata

Terdapat 2 populasi. Populasi 1 sebanyak N_1 dan mempunyai rata-rata μ_1 serta simpangan baku σ_1 . Populasi 2 sebanyak N_2 mempunyai rata-rata μ_2 serta simpangan baku σ_2 .

Dari populasi 1 diambil sampel acak sebanyak n_1 dengan rata-rata \bar{X}_1 dan dari populasi 2 sampel acak sebanyak n_2 dengan rata-rata \bar{X}_2 dimana kedua sampel tersebut dianggap saling bebas.

Dari sampel \bar{X}_1 dan \bar{X}_2 dapat dibuat sampel baru yang juga bersifat acak, yaitu sampel beda dua rata-rata. Rata-rata dan simpangan baku dari distribusi sampel beda dua rata-rata adalah :

$$\text{Rata - rata : } \mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2$$

$$\text{Simpangan baku : } \sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \cdot \sqrt{\frac{(N_1 + N_2) - (n_1 + n_2)}{(N_1 - N_2) - 1}}$$

$$\text{Variabel random : } Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}}$$

Contoh :

Di suatu universitas diketahui rata-rata tinggi badan mahasiswa laki-laki adalah 164 cm dengan simpangan baku 5,3 cm.

Sedangkan mahasiswa perempuan tinggi badannya rata-rata 153 cm dengan simpangan baku 5,1 cm. Dari dua populasi tersebut diambil sampel acak yang saling bebas masing-masing 150 orang, berapa probabilitas rata-rata tinggi mahasiswa laki-laki paling sedikit 12 cm lebihnya daripada rata-rata tinggi mahasiswa perempuan?

Jawab :

Diketahui populasi 1: $\mu_1 = 164$ cm, $\sigma_1 = 5,3$ cm dan sampel 1 : $n_1 = 150$ orang

populasi 2: $\mu_2 = 153$ cm, $\sigma_2 = 5,1$ cm dan sampel 2 : $n_2 = 150$ orang

Misal \bar{X}_1 = rata - rata tinggi badan mahasiswa laki - laki

\bar{X}_2 = rata - rata tinggi badan mahasiswa perempuan

Rata - rata: $\mu_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \mu_1 - \mu_2 = 164 - 153 = 11$ cm

Simpangan baku: $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{5,3^2}{150} + \frac{5,1^2}{150}} = 0,6$

$$Z = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}} = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - 11}{0,6}$$

Karena rata - rata tinggi badan mahasiswa laki - laki paling sedikit 12 cm lebihnya daripada rata - rata tinggi badan mahasiswa perempuan, maka $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \geq 12$ sehingga

$$Z = \frac{12 - 11}{0,6} = 1,67 \text{ sehingga probabilitasnya } P(Z \geq 1,67) = 0,5 - 0,4525 = 0,0475$$

Distribusi Sampel Beda Dua Proporsi

Ada 2 populasi.

Populasi 1 berukuran N_1 terdapat jenis X_1 dengan proporsi X_1/N_1

Populasi 2 berukuran N_2 terdapat jenis X_2 dengan proporsi X_2/N_2

Bila populasi 1 diambil sampel acak berukuran n_1 maka sampel ini akan mengandung jenis x_1 dengan proporsi x_1/n_1

Demikian juga dengan populasi 2 diambil sampel acak berukuran n_2 maka sampel ini akan mengandung jenis x_2 dengan proporsi x_2/n_2

Sampel 1 dan 2 dapat membentuk sampel acak baru yaitu sampel beda dua proporsi. Distribusinya mempunyai :

$$\text{Rata-rata: } \mu_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = p_1 - p_2$$

$$\text{Simpangan baku: } \sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} \cdot \sqrt{\frac{(N_1 + N_2) - (n_1 + n_2)}{(N_1 - N_2) - 1}}$$

$$\text{Variabel random: } Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}$$

Contoh :

5% barang di gudang timur cacat, sedangkan barang yang cacat di gudang barat sebanyak 10%. Bila diambil sampel acak sebanyak 200 barang dari gudang timur dan 300 barang dari gudang barat, tentukan probabilitas persentase barang yang cacat dalam gudang barat 2% lebih banyak dibanding gudang timur!

Jawab:

Gudang barat : $n_1 = 300, p_1 = 0,1$

Gudang timur : $n_2 = 200, p_2 = 0,05$

\hat{p}_1 = proporsi barang yang cacat di gudang barat dalam sampel

\hat{p}_2 = proporsi barang yang cacat di gudang timur dalam sampel

$$\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{0,1(0,9)}{300} + \frac{0,05(0,95)}{200}} = 0,023$$

$$Z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}} = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (0,1 - 0,05)}{0,023}$$

Karena barang cacat di gudang barat 2% lebih banyak daripada di gudang timur maka $(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) > 0,02$ sehingga diperoleh :

$$Z = \frac{0,02 - 0,05}{0,023} = -1,3$$

Jadi probabilitasnya adalah $P(\hat{p}_1 - \hat{p}_2 > 0,02) = P(Z > -1,3) = 0,5 + 0,4032 = 0,9032 = 90,32\%$

LATIHAN...

1. Pada suatu pengiriman barang yang terdiri dari 2000 tube elektronika telah diketahui terdapat 600 unit tube yang tidak memenuhi standar mutu. Jika sampel acak sebanyak 500 unit dipilih dari populasi tersebut tanpa pengembalian, berapakah probabilitas sampel populasi yang tidak memenuhi standar mutu :
 - a. akan kurang dari $150/500$
 - b. antara $144/500$ sampai dengan $145/500$
 - c. lebih besar dari $164/500$

2. Besi baja yang diproduksi perusahaan A mempunyai rata-rata daya regang sebesar 4500 lbs dan variansi sebesar 40000 lbs, sedangkan yang diproduksi perusahaan B mempunyai rata-rata daya regang sebesar 4000 lbs dan variansi sebesar 90000 lbs. Misalkan sampel random sebanyak 50 diambil dari perusahaan A dan sampel random sebanyak 100 diambil dari perusahaan B, berapakah probabilitas rata-rata daya regang beda dua rata-rata dari dua sampel itu yang lebih besar dari 600 lbs?