

**UKURAN GEJALA PUSAT
&
UKURAN LETAK**

UKURAN GEJALA PUSAT & LETAK

- Untuk mendapatkan gambaran yang jelas mengenai suatu populasi atau sampel
- Ukuran yang merupakan wakil kumpulan data mengenai populasi atau sampel

Ukuran gejala pusat :

- Rata-rata/rata-rata hitung
- Rata-rata ukur
- Rata-rata harmonis
- Modus

Ukuran letak :

- Median
- Kuartil
- Desil
- Persentil

Catatan:

- Ukuran yang dihitung dari data dalam sampel disebut **Statistik**
- Ukuran yang dihitung dari data dalam populasi disebut **parameter**

Rata-rata Hitung

Rumus untuk menentukan rata-rata hitung (\bar{X}) :

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \text{atau} \quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

dalam bentuk sederhana: $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$

Contoh : Nilai ujian dari lima mahasiswa untuk mata kuliah statistika adalah : 70,69,45,80, dan 56. Hitung rata-rata nilai kelima mahasiswa tersebut!

$$\bar{X} = \frac{70 + 69 + 45 + 80 + 56}{5} = 64$$

Bila x_i menyatakan nilai data, dan f_i menyatakan frekuensi untuk nilai x_i yang bersesuaian, maka:

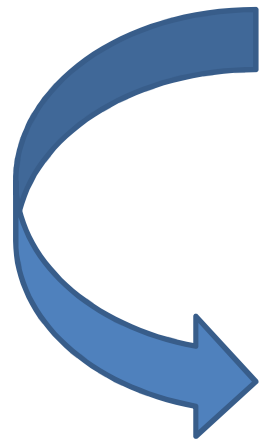
$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

Contoh :

x_i	f_i
70	5
69	6
45	3
80	1
56	1

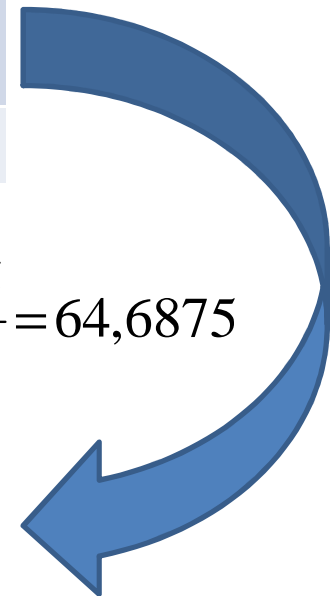


x_i	f_i	$x_i f_i$
70	5	350
69	6	414
45	3	135
80	1	80
56	1	56
Jumlah	16	1035



$$\bar{X} = \frac{(5 \times 70) + (6 \times 69) + (3 \times 45) + (1 \times 80) + (1 \times 56)}{5 + 6 + 3 + 1 + 1} = \frac{1035}{16} = 64,6875$$

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1035}{16} = 64,6875$$



Rata-rata Gabungan

Rata-rata gabungan dari k buah sampel dihitung dengan rumus:

$$\bar{X} = \frac{\sum n_i \bar{x}_i}{\sum n_i}$$

Contoh : Tiga sampel masing-masing berukuran 10, 6, dan 8.

Sedangkan rata-ratanya masing-masing 145, 118, dan 162.

Hitung rata-rata gabungannya!

$$\bar{X} = \frac{(10 \times 145) + (6 \times 118) + (8 \times 162)}{10 + 6 + 8} = \frac{3454}{24} = 143,9166667$$

Data yang disusun dalam daftar distribusi frekuensi

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \quad x_i = \text{Tanda kelas} = \text{mid point}$$

Rata-rata Gabungan

Data yang disusun dalam daftar distribusi frekuensi

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

Contoh :

Nilai	f_i	X_i	$f_i X_i$
31-40	2	35,5	71
41-50	3	45,5	136,5
51-60	5	55,5	277,5
61-70	14	65,5	917
71-80	24	75,5	1812
81-90	20	85,5	1710
91-100	12	95,5	1146
Jumlah	80		6070

$$\bar{X} = \frac{6070}{80} = 75,875$$

Cara 2 : Cara Coding/Cara Singkat

- Ambil salah satu tanda kelas (X_0)
- Harga X_0 diberi nilai $C = 0$
- Tanda kelas $> X_0$ berturut-turut diberi nilai $C=+1, C=+2, \text{ dst}$
- Tanda kelas $< X_0$ berturut-turut diberi nilai $C=-1, C=-2, \text{ dst}$

Jika panjang kelas interval (p)

$$\bar{X} = x_0 + p \left(\frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i} \right)$$

X_0 = mean duga, kelas interval yang memiliki frekuensi terbesar

Nilai	f_i	C_i	$f_i X_i$
31-40	2	-4	-8
41-50	3	-3	-9
51-60	5	-2	-10
61-70	14	-1	-14
71-80	24	0	0
81-90	20	+1	+20
91-100	12	+2	+24
Jumlah	80		+3

$$\bar{X} = x_0 + p \left(\frac{\sum f_i c_i}{\sum f_i} \right)$$

$$\bar{X} = 75,5 + 10 \left(\frac{3}{80} \right)$$

$$\bar{X} = 75,5 + 0,375$$

$$\bar{X} = 75,875$$

Rata-rata Ukur

Jika kita memiliki perbandingan tetap atau hampir tetap, maka rata-rata ukur U didefinisikan sebagai:

$$U = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Contoh : Hitung rata-rata ukur untuk data $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ dan $x_3 = 8$

$$U = \sqrt[3]{2 \cdot 4 \cdot 8} = 4$$

Untuk bilangan-bilangan bernilai besar:

$$\log U = \frac{\sum \log x_i}{n}$$

$$\log U = \frac{1}{3} (\log 2 + \log 4 + \log 8)$$

$$= \frac{1}{3} (0,3010 + 0,6021 + 0,9031)$$

$$= 0,6021$$

$$U = 4$$

Untuk fenomena bersifat tumbuh (pertumbuhan penduduk, bakteri, dll), digunakan rata-rata ukur:

$$P_t = p_0 \left(1 + \frac{\bar{x}}{100} \right)^t$$

P_0 = Keadaan awal atau permulaan

P_t = keadaan akhir

t = Satuan waktu yang digunakan


\bar{x} = *Rata – rata pertumbuhan setiap satuan waktu*

Contoh : Penduduk Indonesia pada akhir tahun 1946 ada 60 juta, akhir tahun 1956 ada 78 juta. Berapa rata-rata pertumbuhan penduduk setiap tahun?

$P_0 = 60$ juta

$P_t = 78$ juta

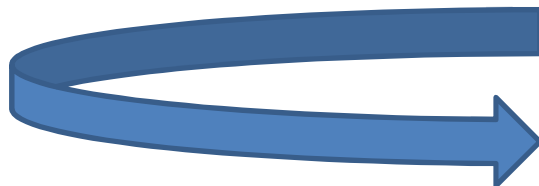
$t = 10$ tahun



$$P_t = p_0 \left(1 + \frac{\bar{x}}{100} \right)^t$$

$$78 \times 10^6 = 60 \times 10^6 \left(1 + \frac{\bar{x}}{100} \right)^{10}$$

$$\log 78 = \log 60 + 10 \log \left(1 + \frac{\bar{x}}{100} \right)$$



$\bar{x} = 2,67$ Laju rata-rata pertumbuhan = 2,67% tiap tahun

Rata-rata Ukur

Data yang disusun dalam daftar distribusi frekuensi

$$\log U = \frac{\sum (f_i \log x_i)}{\sum f_i}$$

Contoh : Data nilai 80 Mahasiswa

Nilai	f _i	X _i	log X _i	f _i log X _i
31-40	2	35,5	1,5502	3,1004
41-50	3	45,5	1,6580	4,9740
51-60	5	55,5	1,7443	8,7215
61-70	14	65,5	1,8162	25,4268
71-80	24	75,5	1,8779	45,0696
81-90	20	85,5	1,9320	38,6400
91-100	12	95,5	1,9800	23,7600
Jumlah	80	-	-	149,6923



$$\log U = \frac{149,6923}{80}$$
$$= 1,8712$$
$$U = 74,3361$$

Rata-rata Harmonis (H)

Rata-rata harmonis dari data x_1, x_2, \dots, x_n dalam sebuah sampel berukuran n , adalah:

$$H = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

Contoh : Hitung rata-rata harmonis untuk data 3, 5, 6, 6, 7, 10, dan 12

$$H = \frac{7}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12}} = 5,87$$

Ahmad bepergian pulang pergi. Waktu pergi melakukan kecepatan 10 km/jam, sedangkan waktu kembalinya 20 km/jam. Berapa rata-rata kecepatan pulang pergi Ahmad?

$$H = \frac{2}{\frac{1}{10} + \frac{1}{20}} = 13\frac{1}{3} \text{ km / jam}$$

Rata-rata Harmonis (H)

Data dalam daftar distribusi frekuensi;

$$H = \frac{\sum f_i}{\sum \frac{f}{x_i}}$$

Contoh :

Nilai	f _i	x _i	f _i /x _i
31-40	2	35,5	0,0563
41-50	3	45,5	0,0659
51-60	5	55,5	0,0901
61-70	14	65,5	0,2137
71-80	24	75,5	0,3179
81-90	20	85,5	0,2339
91-100	12	95,5	0,1257
Jumlah	80	-	1,1035

$$H = \frac{80}{1,1035} = 72,4966$$

Untuk nilai statistika 80 mahasiswa: $H \leq U \leq \bar{x}$

MODUS

Modus merupakan suatu nilai yang sering banyak muncul

Contoh : Sampel dengan data sebagai berikut:

20,80,75,60,50,85,45,60, dan 90



Modus = 60

Sampel dengan data sebagai berikut:

20,80,75,60,50,85,45,65, dan 90



Tidak ada Modus

Modus Data dalam daftar distribusi frekuensi: $M_o = b + p \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2} \right)$

dengan:

M_o = Modus

b = Batas bawah kelas modal (kelas interval dengan frekuensi terbanyak)

p = Panjang kelas

b_1 = Frekuensi kelas modal – frekuensi kelas interval sebelumnya

b_2 = Frekuensi kelas modal – frekuensi kelas interval berikutnya

Contoh : Data untuk 80 mahasiswa

Nilai	f_i
31-40	2
41-50	3
51-60	5
61-70	14
71-80	24
81-90	20
91-100	12
Jumlah	80

$$\begin{aligned}
 M_o &= b + p \left(\frac{b_1}{b_1 + b_2} \right) \\
 M_o &= 70,5 + 10 \left(\frac{24 - 14}{24 - 14 + 24 - 20} \right) \\
 &= 70,5 + 10 \left(\frac{10}{14} \right) \\
 &= 77,6429
 \end{aligned}$$

Modus dari sekumpulan data bisa lebih dari satu

Contoh : Diberikan data sebagai berikut:

Nilai	f_i
75	8
60	7
92	8
64	7
35	2

ada 2 modus, yaitu 75 dan 92

MEDIAN

Median merupakan suatu nilai yang membagi dua suatu deretan nilai (distribusi frekuensi), sehingga banyaknya pengamatan di kedua bagian itu sama

Contoh : Sampel dengan data sebagai berikut:

4,12,5,7,8,10, dan 10

Setelah disusun nilainya:

4,5,7,8,10, 10, 12



Median = 8

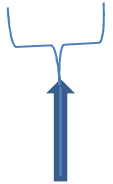
Untuk data berukuran genap, setelah disusun urutan nilainya, Mediannya merupakan rata-rata hitung dari dua data tengah

Contoh : Sampel dengan data sebagai berikut:

12,7,8,14, 16, 19, 10, dan 8

Setelah disusun nilainya:

7,8,8,10, 12,14,16,19


$$Me = \frac{1}{2}(10 + 12) = 11$$

Untuk data yang telah disusun dalam daftar distribusi frekuensi

$$M_e = b + p \left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f} \right)$$

dengan:

M_e = Median

b = Batas bawah kelas median (kelas dimana M_e terletak)

p = Panjang kelas M_e

n = ukuran sampel (banyak data)

F = Jumlah frekuensi sebelum kelas median

f = Frekuensi kelas M_e

Contoh : Data untuk 80 mahasiswa

Nilai	f_i
31-40	2
41-50	3
51-60	5
61-70	14
71-80	24
81-90	20
91-100	12
Jumlah	80

Setengah dari seluruh data ada 40 buah (n)

Median terletak di kelas interval kelima

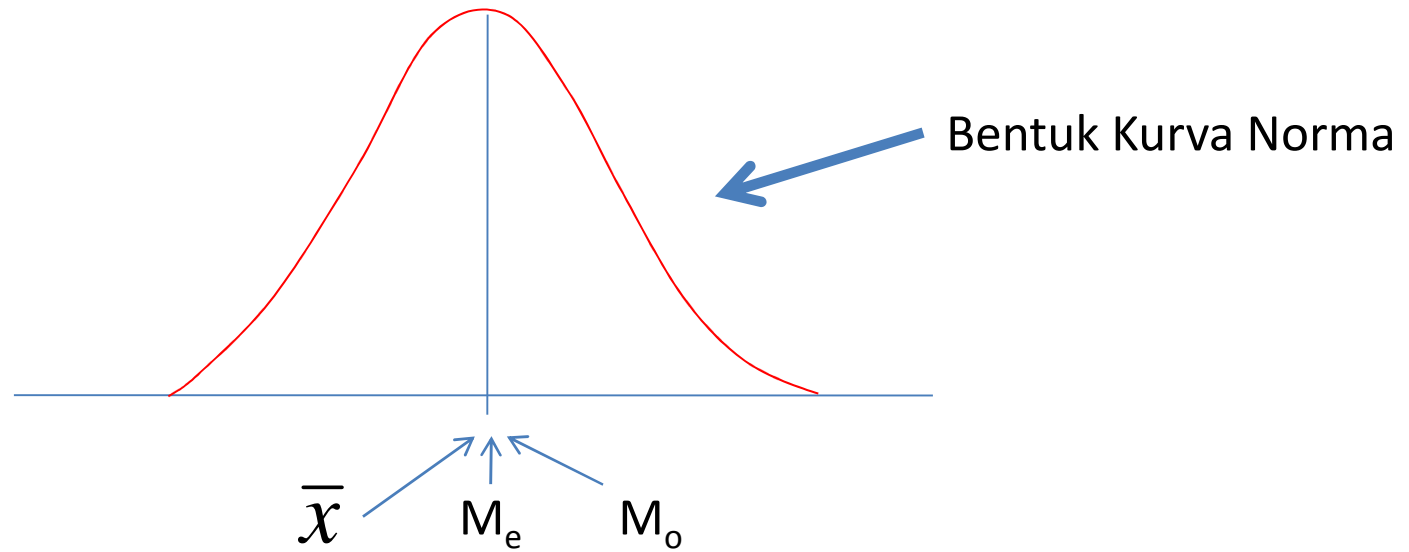
Dari kelas Median diperoleh:

$$b = 70,5 \quad p = 10 \quad f = 24 \quad F = 24$$

$$M_e = b + p \left(\frac{\frac{n}{2} - F}{f} \right)$$

$$M_e = 70,5 + 10 \left(\frac{\frac{80}{2} - 24}{24} \right) = 77,1667$$

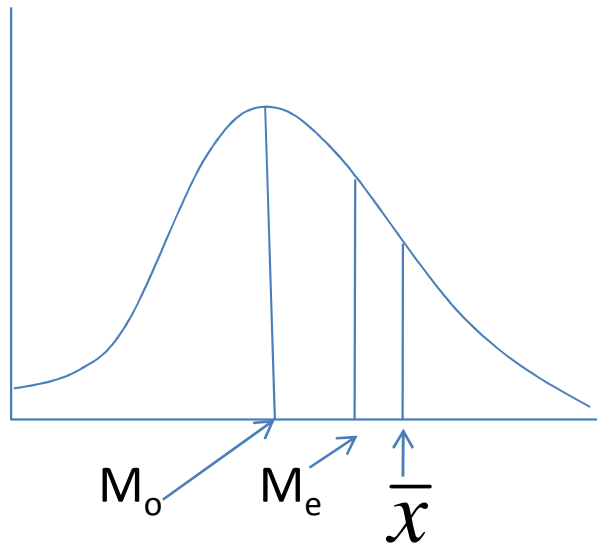
Untuk \bar{x} , M_e dan M_o yang sama besarnya, maka kurva halusnya simetris



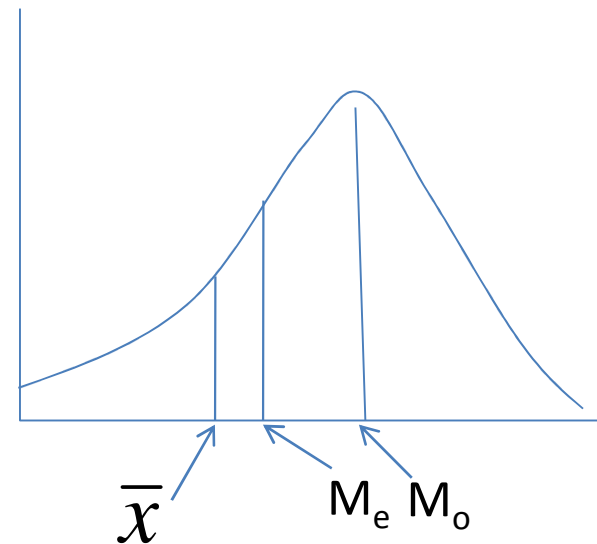
Untuk kurva halus positif (*Skewness*) Positif atau negatif, secara empiris ditemukan hubungan \bar{x} , M_e dan M_o sebagai berikut:

$$\bar{x} - M_o = 3(\bar{x} - M_e)$$

Dalam grafik, kedudukan ketiga nilai tersebut adalah:



Skewness Positif



Skewness Negatif

Kwartil, Desil dan Persentil

- Jika sekumpulan data dibagi menjadi empat bagian yang sama, sesudah disusun menurut urutan nilainya, maka bilangan pembagiannya disebut **kwartil**
- Ada tiga buah kwartil, yaitu kwartil pertama (K_1), kwartil kedua (K_2), kwartil ketiga (K_3)
- Pemberian nama dimulai dari nilai kwartil terkecil

Bagaimana menentukan letak Kwartil ???

Menentukan nilai kwartil:

- Susun data menurut urutan nilainya
- Tentukan letak kwartil
- Tentukan nilai kwartil

Letak kwartil ditentukan dengan rumus:

$$\text{Letak } K_i = \text{Data ke } \frac{i(n+1)}{4}$$

$$i = 1, 2, 3)$$

Contoh:

Sampel dengan data: 75,82,66,57,97,64,56,92,94,86,52,60,70

Setelah disusun: 52,56,57,60,64,66,70,75,82,86,92,94,97

$$\text{Letak } K_1 = \text{Data ke } \frac{1(13+1)}{4} = \text{Data ke } 3\frac{1}{2}$$

Yaitu antara data ke 3 dan ke 4, setengah jauhnya dari data ke 3

$$\text{Nilai } K_1 = \text{Data ke } 3 + \frac{1}{2} (\text{Data ke } 4 - \text{Data ke } 3)$$

$$K_1 = 57 + \frac{1}{2} (60 - 57) = 58,5$$

$$\text{Letak } K_2 = \text{Data ke } \frac{2(13+1)}{4} = \text{Data ke } 7 \quad \longrightarrow \quad K_2 = 70$$

$$\text{Letak } K_3 = \text{Data ke } \frac{3(13+1)}{4} = \text{Data ke } 10\frac{1}{2}$$

Yaitu antara data ke 10 dan ke 11, setengah jauhnya dari data ke 10

$$K_3 = 86 + \frac{1}{2} (92 - 86) = 89$$

Cara lain

$$\text{Letak } K_i = \frac{i(n+1)}{4} \quad i = 1, 2, \text{ dan } 3$$

$$\text{Letak } K_i = a, b \quad (\text{baca: } a \text{ koma } b)$$

$$K_i = x(a) + 0, b (x_{(a+1)} - x_{(a)})$$

Contoh :

$$\text{Letak } K_1 = \frac{1(13+1)}{4} = 3,5$$

$$a = 3 \text{ dan } b = 5)$$

$$K_i = x(a) + 0, b (x_{(a+1)} - x_{(a)})$$

$$K_1 = x(3) + 0,5 (x_{(3+1)} - x_{(3)})$$

$$K_1 = x(3) + 0,5 (x_{(4)} - x_{(3)})$$

$$K_1 = 57 + 0,5 (60 - 57)$$

$$K_1 = 57 + 0,5 (3)$$

$$K_1 = 58,5$$

Kwartil untuk data yang disusun dalam distribusi frekuensi

Kwartil ditentukan dengan rumus:

$$K_i = b + p \left(\frac{\frac{in}{4} - F}{f} \right)$$

dengan:

b = Batas bawah kelas K_i (kelas dimana K_i akan terletak)

p = Panjang kelas K_i

F = Jumlah frekuensi sebelum kelas K_i

f = Frekuensi kelas K_i

Contoh : Data untuk 80 mahasiswa

Nilai	f_i
31-40	2
41-50	3
51-60	5
61-70	14
71-80	24
81-90	20
91-100	12
Jumlah	80

Untuk menetapkan K_3 diperlukan data $\frac{3}{4} \times 80 = 60$ data

Maka K_3 terletak pada kelas interval ke-6

Dari kelas K_3 diketahui: $b = 80,5$; $p = 10$; $f = 20$ dan $F = 48$

Dengan $i = 3$ dan $n = 80$

$$K_i = b + p \left(\frac{\frac{in}{4} - F}{f} \right)$$

$$K_3 = 80,5 + 10 \left(\frac{\frac{3 \times 80}{4} - 48}{20} \right)$$

$$K_i = 86,5$$

75% dari mahasiswa mendapat nilai ujian $\leq 86,5$, sedangkan 25% lagi mendapat nilai ujian $> 86,5$

Desil

- Jika sekumpulan data dibagi menjadi 10 bagian yang sama, maka didapat sembilan pembagi, tiap pembagi disebut **DESIL**
- Ada 9 buah desil, disingkat D_1, D_2, \dots, D_9 (desil pertama, desil kedua, dst)

Bagaimana menentukan letak desil???

Menentukan nilai desil:

- Susun data menurut urutan nilainya
- Tentukan letak desil
- Tentukan nilai desil

Letak desil ditentukan dengan rumus:

$$\text{Letak } D_i = \text{Data ke } \frac{i(n+1)}{10}$$

$$(i = 1, 2, \dots, 9)$$

Contoh:

Sampel dengan data: 75,82,66,57,97,64,56,92,94,86,52,60,70

Setelah disusun: 52,56,57,60,64,66,70,75,82,86,92,94,97

$$\text{Letak } D_7 = \text{Data ke } \frac{7(13+1)}{10} = \text{Data ke } 9,8$$

Yaitu antara data ke 9 dan ke 10, 0,8 jauhnya dari data ke 9

$$\text{Nilai } D_7 = \text{Data ke } 9 + 0,8 (\text{Data ke } 10 - \text{Data ke } 9)$$

$$D_7 = 82 + 0,8(86 - 82) = 85,2$$

Coba Anda tentukan letak desil yang lain!!!

Cara lain

$$\text{Letak } D_i = \frac{i(n+1)}{10} \quad i = 1, 2, \dots, 9$$

$$\text{Letak } D_i = a, b \quad (\text{baca: } a \text{ koma } b)$$

$$D_i = x(a) + 0, b (x_{(a+1)} - x_{(a)})$$

Contoh :

$$\text{Letak } D_7 = \frac{7(13+1)}{10} = 9,8 \quad a = 9 \text{ dan } b = 8)$$

$$D_i = x(a) + 0, b (x_{(a+1)} - x_{(a)})$$

$$D_7 = x(9) + 0,8 (x_{(9+1)} - x_{(9)})$$

$$D_7 = x(9) + 0,8 (x_{(10)} - x_{(9)})$$

$$K_i = 82 + 0,8 (86 - 82)$$

$$D_7 = 82 + 0,8 (4)$$

$$D_7 = 85,2$$

Desil untuk data yang disusun dalam distribusi frekuensi

Desil ditentukan dengan rumus:

$$D_i = b + p \left(\frac{\frac{in}{10} - F}{f} \right)$$

$(i = 1, 2, \dots, 9)$

dengan:

b = Batas bawah kelas D_i (kelas dimana D_i akan terletak)

p = Panjang kelas D_i

F = Jumlah frekuensi sebelum kelas D_i

f = Frekuensi kelas D_i

Contoh : Data untuk 80 mahasiswa

Nilai	f_i
31-40	2
41-50	3
51-60	5
61-70	14
71-80	24
81-90	20
91-100	12
Jumlah	80

Untuk menetapkan D_3 diperlukan data
 $3/10 \times 80 = 24$ data

Maka D_3 terletak pada kelas interval ke-4

Dari kelas D_3 diketahui: $b = 60,5$; $p = 10$; $f = 14$
dan $F = 10$

Dengan $i = 3$ dan $n = 80$

$$D_i = b + p \left(\frac{\frac{in}{10} - F}{f} \right)$$

$$D_3 = 60,5 + 10 \left(\frac{\frac{3 \times 80}{10} - 10}{14} \right)$$

$$D_3 = 70,5$$

Persentil

Jika sekumpulan data dibagi menjadi 100 bagian yang sama, maka didapat 99 pembagi, tiap pembagi disebut **PERSENTIL**

Bagaimana menentukan letak persentil???

Menentukan nilai persentil:

- Susun data menurut urutan nilainya
- Tentukan letak persentil
- Tentukan nilai persentil

Letak desil ditentukan dengan rumus:

$$\text{Letak } P_i = \text{Data ke } \frac{i(n+1)}{100}$$

$$(i = 1, 2, \dots, 99)$$

Contoh:

Sampel dengan data: 75,82,66,57,97,64,56,92,94,86,52,60,70

Setelah disusun: 52,56,57,60,64,66,70,75,82,86,92,94,97

$$\text{Letak } P_{10} = \text{Data ke } \frac{10(13+1)}{100} = \text{Data ke } 1,4$$

Yaitu antara data ke 1 dan ke 2, 0,4 jauhnya dari data ke 1

$$\text{Nilai } P_{10} = \text{Data ke } 1 + 0,4 (\text{Data ke } 2 - \text{Data ke } 1)$$

$$P_{10} = 52 + 0,4(56 - 52) = 53,6$$

Coba Anda tentukan letak persentil yang lain!!!

Cara lain

$$\text{Letak } P_i = \frac{i(n+1)}{100} \quad i = 1, 2, \dots, 99$$

$$\text{Letak } P_i = a, b \quad (\text{baca: } a \text{ koma } b)$$

$$P_i = x(a) + 0, b (x_{(a+1)} - x_{(a)})$$

Contoh :

$$\text{Letak } P_{10} = \frac{10(13+1)}{100} = 1,4 \quad a = 1 \text{ dan } b = 4)$$

$$P_i = x(a) + 0, b (x_{(a+1)} - x_{(a)})$$

$$P_{10} = x(1) + 0,4 (x_{(1+1)} - x_{(1)})$$

$$P_{10} = x(1) + 0,4 (x_{(2)} - x_{(1)})$$

$$P_{10} = 52 + 0,4 (56 - 52)$$

$$P_{10} = 52 + 0,4 (4)$$

$$P_{10} = 53,6$$

Persentil Untuk Data Yang Disusun Dalam Distribusi Frekuensi

Persentil ditentukan dengan rumus:

$$P_i = b + p \left(\frac{\frac{in}{100} - F}{f} \right)$$

$$(i = 1, 2, \dots, 99)$$

dengan:

b = Batas bawah kelas P_i (kelas dimana P_i akan terletak)

p = Panjang kelas P_i

F = Jumlah frekuensi sebelum kelas P_i

f = Frekuensi kelas P_i

Contoh : Data untuk 80 mahasiswa

Nilai	f_i
31-40	2
41-50	3
51-60	5
61-70	14
71-80	24
81-90	20
91-100	12
Jumlah	80

Untuk menetapkan P_{10} diperlukan data $10/100 \times 80 = 8$ data

Maka P_3 terletak pada kelas interval ke-3

Dari kelas P_{10} diketahui: $b = 50,5$; $p = 10$; $f = 5$ dan $F = 5$

Dengan $i = 10$ dan $n = 80$

$$P_i = b + p \left(\frac{\frac{in}{100} - F}{f} \right)$$

$$P_{10} = 50,5 + 10 \left(\frac{\frac{10 \times 80}{100} - 5}{5} \right)$$

$$P_{10} = 56,5$$