INTERFERENSI DAN DIFRAKSI

Mata Kuliah: Gelombang & Optik

Dosen: Andhy Setiawan

A. Interferensi

Interferensi **merupakan perpaduan dua atau lebih gelombang sebagai akibat berlakunya prinsip superposisisisi.**

Interferensi terjadi bila gelombang–gelombang tersebut *koheren*, yaitu mempunyai perbedaan fase yang tetap.

Interferometer

Interferometer merupakan alat untuk menghasilkan gelombang yang koheren sehingga interferensi bisa terjadi.

Jenis Interferometer :

1. Pembelah muka Gelombang
2. Pembelah Amplitudo

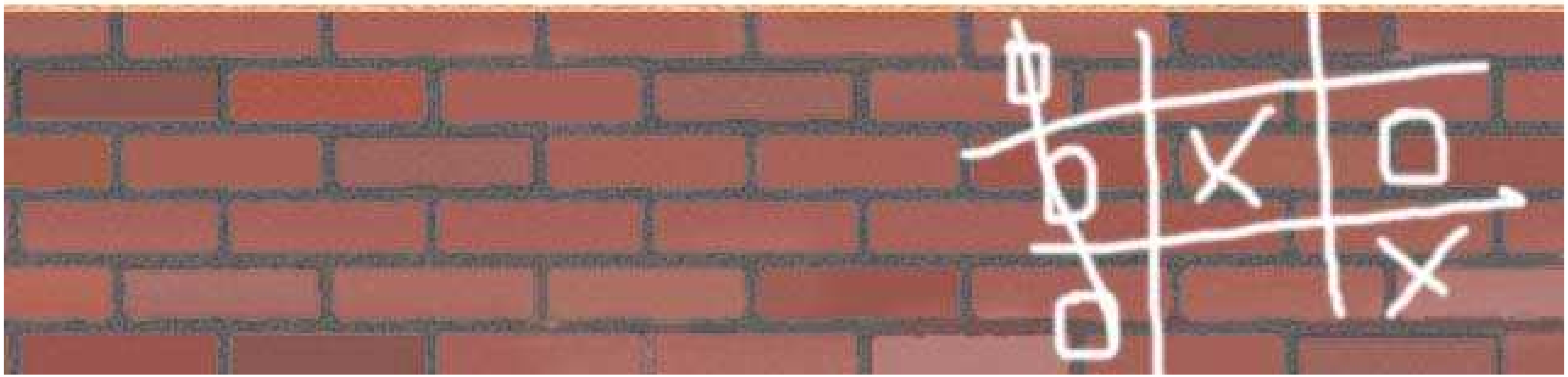
A.1 Interferometer Pembelah Muka Gelombang

Prinsip Kerja :

Dua gelombang yang koheren diperoleh dari sumber yang sama dengan intensitas yang tetap.

Contoh :

- **Interferometer Young dua celah**
- **Interferometer Biprisma Fresnel**
- **Interferometer Young banyak celah**



A.2 Interferometer Pembelah Amplitudo

Prinsip Kerja :

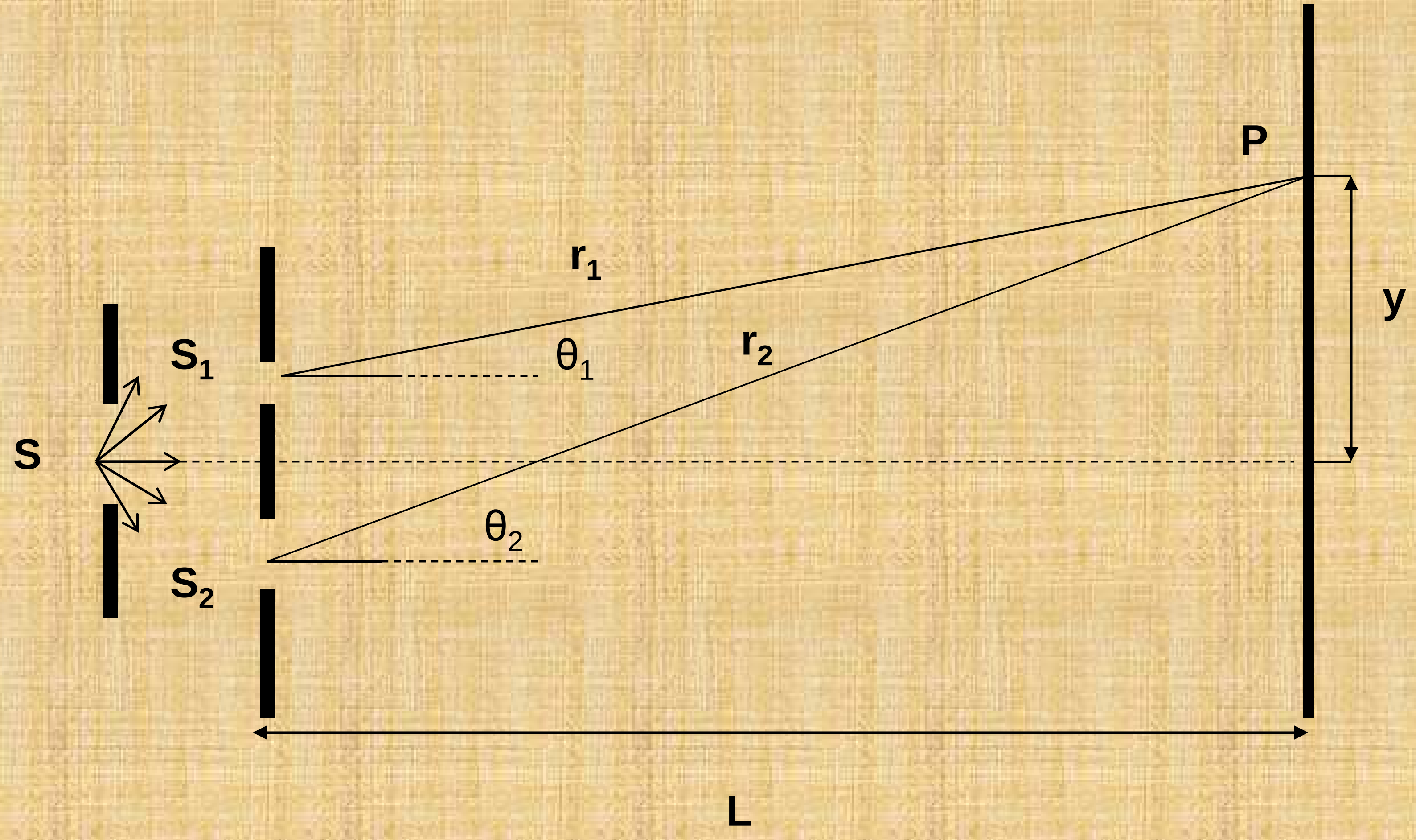
Dua gelombang yang koheren diperoleh dengan membagi intensitas semula , misal dengan lapisan pemantul sebagian

Contoh :

- **Interferometer Michelson**
- **Interferometer Fabry Perot**

A.1. Interferometer Pembelah Muka Gelombang

A.1.1. Percobaan Young



Gambar Percobaan Young

Persamaan gelombang cahaya dari S_1 dan S_2 di titik P pada layar :

$$E_1(r,t) = E_0 e^{i(kr_1 - \omega t + \varphi_1)}$$

$$E_2(r,t) = E_0 e^{i(kr_2 - \omega t + \varphi_2)}$$

Superposisi di titik P :

$$E = E_1 + E_2$$

$$E(r,t) = E_0\left(e^{i(kr_1 - \omega t + \varphi_1)} + e^{i(kr_2 - \omega t + \varphi_2)}\right) \ldots (1)$$

Intesitas :

$$I \approx |E|^2$$

$$I \approx E_0^{\ 2}\left[e^{i(kr_1-\omega t+\varphi_1)}+e^{i(kr_2-\omega t+\varphi_2)}\right]\left[e^{-i(kr_1-\omega t+\varphi_1)}+e^{-i(kr_2-\omega t+\varphi_2)}\right]_1$$

$$I \approx E_0^{\ 2}\left[1+e^{-i(k(r_2-r_1)+(\varphi_2-\varphi_1))}+e^{i(k(r_2-r_1)+(\varphi_2-\varphi_1))}+1\right]$$

$$I \approx E_0^{\ 2}\left[2+e^{-i(k(r_2-r_1)+(\varphi_2-\varphi_1))}+e^{i((r_2-r_1)k+(\varphi_2-\varphi_1))}\right]$$

$$I \approx E_0^{\ 2}\left[2+2\cos\phi\right] \quad \text{dengan} \quad \phi = k(r_2-r_1)+(\varphi_2-\varphi_1)$$

karena $I_0 \approx |E_0|^2 \approx E_0^2$ maka

$$I = 2I_0\left[1+\cos(\phi)\right]$$

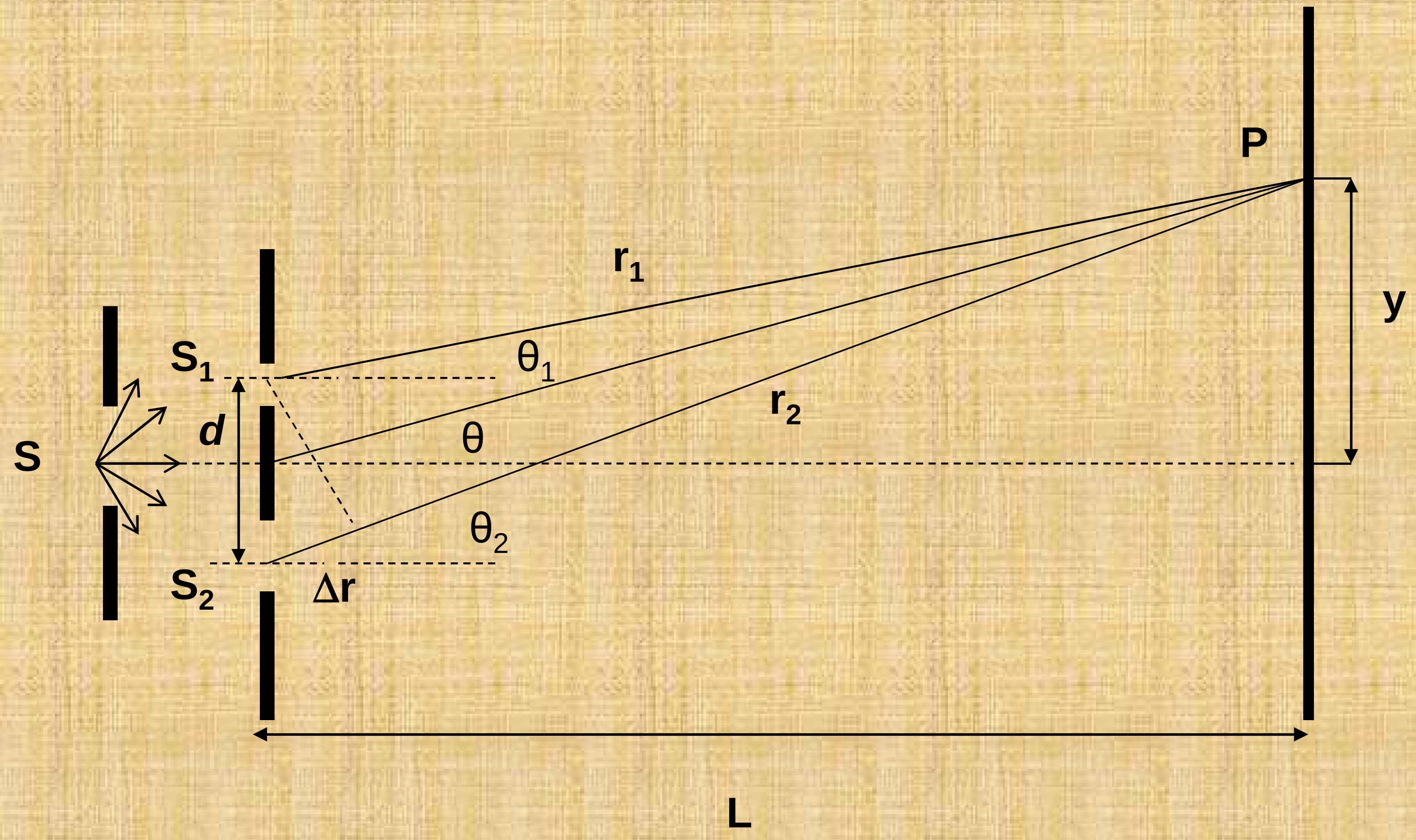
$$I = 2I_0\left[1+\cos(\phi)\right] \qquad \text{dengan} \quad \phi = k(r_2 - r_1) + (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\cos 2\left[\frac{\phi}{2}\right] = 2\cos^2\frac{\phi}{2} - 1 \qquad = k\Delta r + \Delta\varphi$$

$$I = 4I_0\cos^2\left(\frac{k\Delta r}{2} + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

Kedua gelombang dari sumber yang sama $\Longrightarrow$ $\Delta\varphi = 0$

$$I = 4I_0\cos^2\left(\frac{k\Delta r}{2}\right)$$



Dari gambar $\Delta r = d\sin\theta$, Karena $\theta <<$ maka $\sin\theta \cong \tan\theta = \frac{y}{L}$

mengingat $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

maka $$\boxed{I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d y}{\lambda L}\right)}$$

$$\boxed{I = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi dy}{\lambda L}\right)}$$

I akan maksimum jika : $\cos^2\left(\frac{\pi dy}{\lambda L}\right) = 1$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\pi dy}{\lambda L} = n\pi$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2$$

Jarak terang ke-n dari pusat $\quad y = n\frac{\lambda L}{d}$

I akan minimum jika : $\cos^2\left(\frac{\pi dy}{\lambda L}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\pi dy}{\lambda L} = \left[\frac{2n+1}{2}\right]\pi$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2$$

$$y = \left[\frac{2n+1}{2}\right]\frac{\lambda L}{d}$$

• jarak antara dua terang / dua gelap berurutan

Jika :

$$n = 0 \longrightarrow y = 0 \longrightarrow y = \frac{\lambda L}{2d}$$

$$n = 1 \longrightarrow y = \frac{\lambda L}{d} \longrightarrow y = \frac{3\lambda L}{2d}$$

$$n = 2 \longrightarrow y = \frac{2\lambda L}{d} \longrightarrow y = \frac{5\lambda L}{2d}$$

$$\Delta y = y_1 - y_0 = y_2 - y_1 \qquad \boxed{\Delta y = \frac{\lambda L}{d}}$$

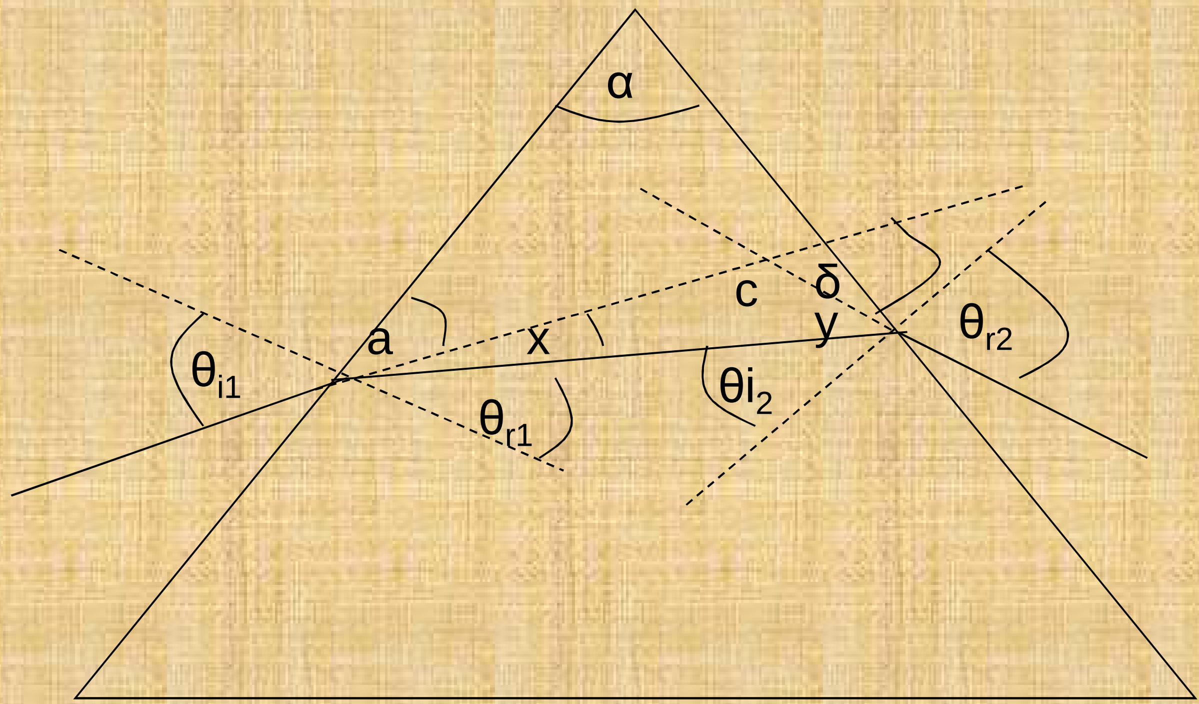
• jarak gelap ke terang berurutan adalah

$$\Delta y = y_{0g} - y_{0t} = y_{1t} - y_{0g} = y_{1g} - y_{0t} = \cdots$$

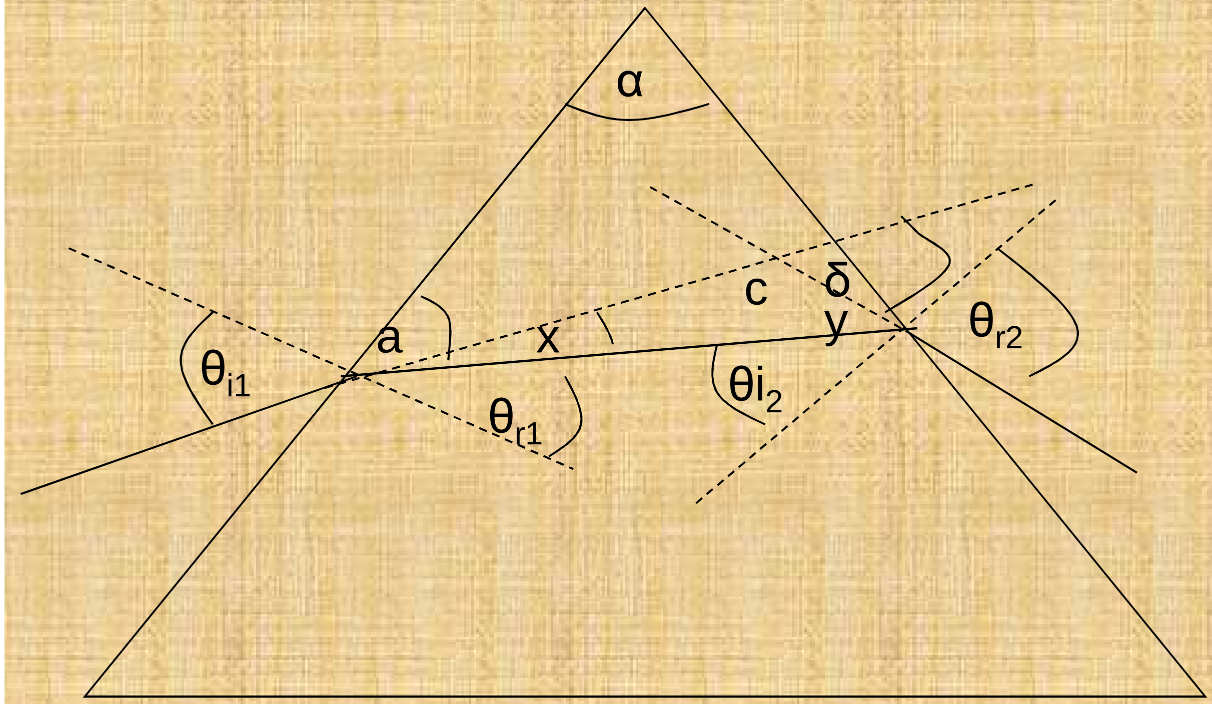
$$\boxed{\Delta y = \frac{\lambda L}{2d}}$$

A.1.2. Interferometer Biprisma Fresnel

Interferometer Biprisma Fresnel menggunakan prisma sebagai pembelah muka gelombang. Untuk itu sebelumnya kita harus memahami jalannya sinar pada prisma



Gambar Jalannya sinar pada prisma



$$a = 90^0 - \theta_{r1} \;;$$

$$b = 90^0 - \theta_{i2}$$

$$\alpha + a + b = 180^0$$

$$x = \theta_{i1} - \theta r_1 \;;$$

$$y = \theta_{r2} - \theta_{i2}$$

$$c + x + y = 180^0$$

$$\begin{aligned} c &= 180^0 - (\theta_{i1} - \theta_{r1}) - (\theta_{r2} - \theta_{i2}) \\ &= 180^0 - (\theta_{i1} + \theta_{r2}) + (\theta r1 + \theta_{i2}) \\ &= 180^0 - (\theta_{i1} + \theta_{r2}) + \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta &= 180^0 - c \\ &= 180^0 - (180^0 - (\theta_{i1} + \theta_{r2}) + \alpha) \\ &= (\theta_{i1} + \theta_{r2}) - \alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(**) \end{aligned}$$

Persamaan (**) menunujukan persamaan umum ***sudut deviasi***.

Sudut Deviasi Minimum

- Terjadi bila $\theta_{r1} = \theta\ i_2$ dan $\theta_{i1} = \theta_{r2}$

$$\theta_{r1} = \frac{\alpha}{2} \longrightarrow \alpha = 2\theta_{r1}$$

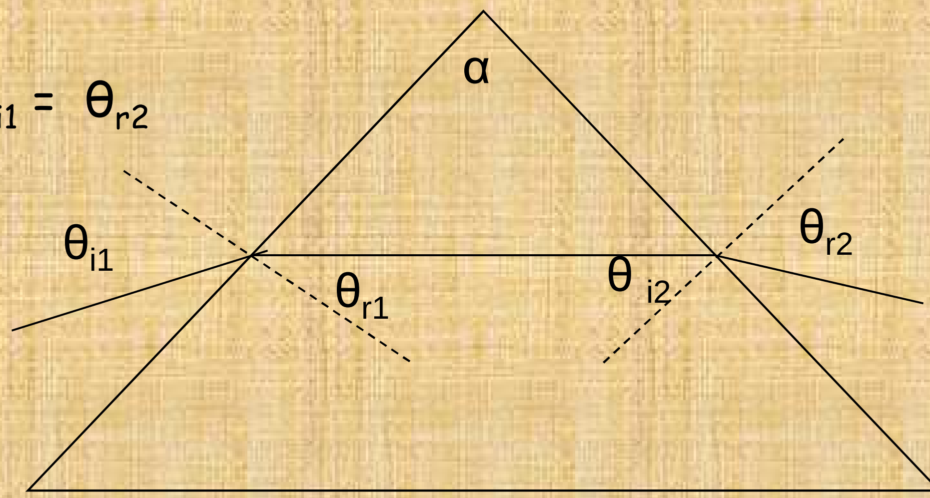
$$\delta = \left(\theta_{i1} + \theta_{r2}\right) - \alpha$$

dengan

$$\theta_{i1} = \theta_{r2}$$

$$\delta = 2\theta_{i1} - \alpha$$

$$\theta_{i1} = \frac{\delta + \alpha}{2}$$



Gamba 4. Prisma dengan sudut deviasi minimum

Berdasarkan hukum Snellius :

$$1 Sin\theta_{i1} = n Sin\theta_{r1}$$

$$Sin\frac{\delta+\alpha}{2} = n Sin\frac{\alpha}{2}$$

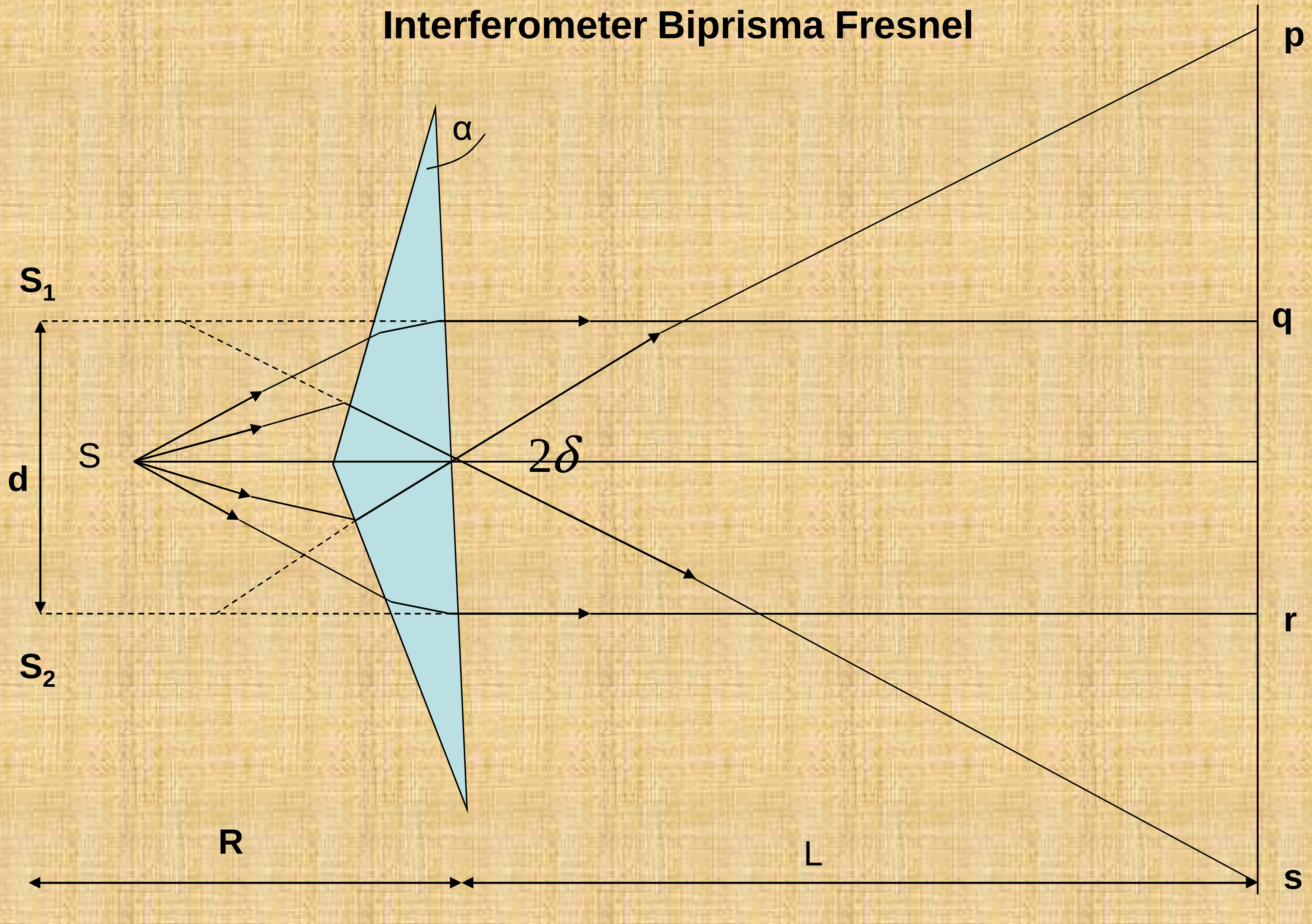
Selanjutnya untuk α yang kecil :

$$\frac{\delta+\alpha}{2} = \frac{n\alpha}{2}$$

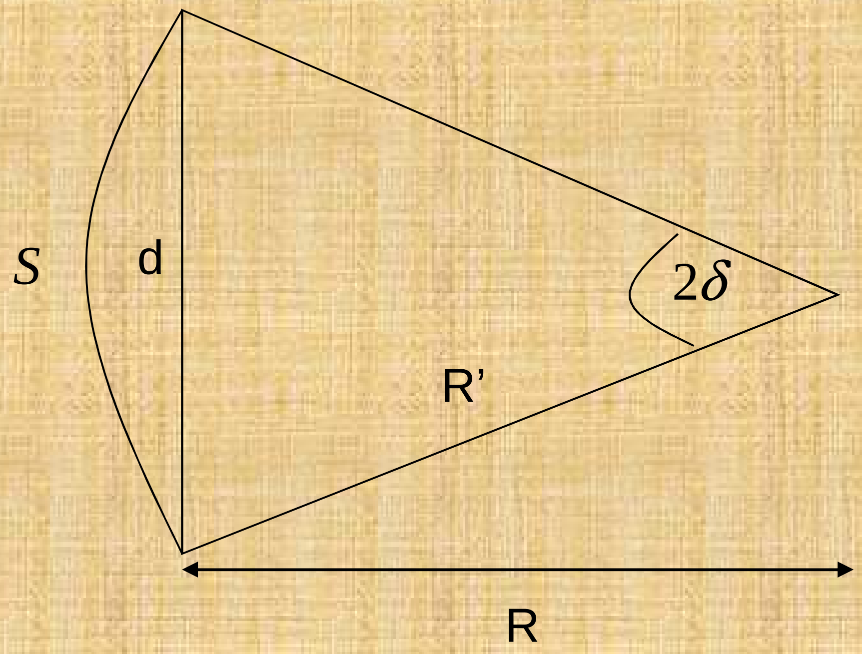
$$\delta = (n-1)\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots(***)$$

Persamaan (***) adalah ***sudut deviasi minimum***

Interferometer Biprisma Fresnel



$$\delta << \quad \longrightarrow \quad S = d = 2\delta R$$



R = R'

Gambar 5. Sudut pada Inteferometer Biprisma Fresnel

$$\Delta y = \frac{\lambda L}{d}$$

$$L \rightarrow (R + L)$$

$$d = 2\delta R$$

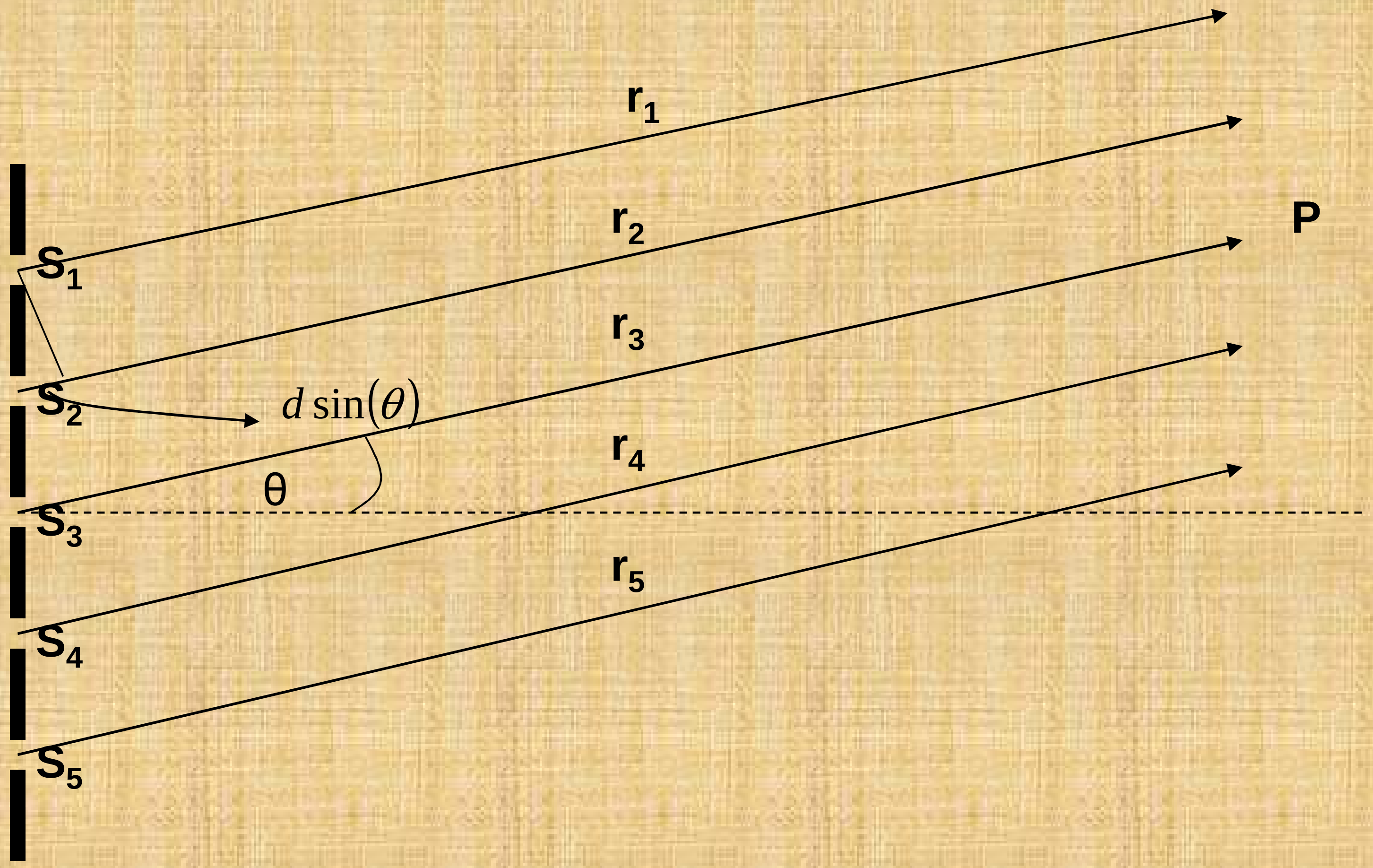
Maka :

$$\Delta y = \frac{\lambda (R + L)}{2R\delta}$$

karena δ yang minimum : $\delta = (n-1)\alpha$

$$\Delta y = \frac{\lambda (R + L)}{2R(n-1)\alpha}$$

A.1.3. Interfereometer Young Banyak Celah



Gambar 6. Interferensi dari N celah

- Semakin jauh celah maka Δφ semakin besar.
- Beda fase antara dua gelombang yang masuk ke celah secara berurutan

menghasilkan Δφ = k.Δr

$$r_2 = r_1 + \Delta r \qquad r_3 = r_2 + \Delta r = r_1 + 2\Delta r$$

$$r_n = r_1 + (n-1)\Delta r$$

Fungsi gelombang :

$$E_1 = E_0 e^{i(kr_1 - \omega t)} \qquad E_2 = E_0 e^{i(kr_2 - \omega t)}$$

$$E_n = E_0 e^{i(kr_n - \omega t)} \rightarrow E_n = E_0 e^{i(k(r_1 + (n-1)\Delta r) - \omega t)}$$

Fungsi gelombang di titik P merupakan perpaduan gelombang cahaya yang melewati celah 1 sd N, maka:

$$\boxed{E = \sum_{n=1}^{N} E_0 e^{i(k(r_1 + (n-1)\Delta r - \omega t))}}$$

$$\boxed{E=\sum_{n=1}^{N}E_0e^{i(k(r_1+(n-1)\Delta r-\omega t))}}$$

Dapat ditulis ulang sebagai :

$$E=E_0e^{i(kr_1-\omega t)}\sum_{n=1}^{N}e^{i(k(n-1)\Delta r)}$$

$$\Delta\varphi=k.\Delta r$$

$$E(r,t)=E_0e^{i(kr_1-\omega t)}\underbrace{\sum_{n=1}^{N}e^{i((n-1)\Delta\varphi)}}_{S}\text{........9)}$$

Selanjutnya bagian S diekspansikan dalam deret :

$$\sum_{n=1}^{N}e^{i((n-1)\Delta\varphi)}=1+e^{i\Delta\varphi}+e^{i2\Delta\varphi}+e^{i3\Delta\varphi}\ldots$$

Merupakan deret ukur dengan rasio $R=e^{i\Delta\varphi}$

Deret ukur dengan rasio R memiliki jumlah

$$S_N = \frac{R^N - 1}{R - 1}$$

Sehingga :

$$\sum_{n=1}^{N} e^{i(n-1)\Delta\varphi} = \frac{e^{iN\Delta\varphi} - 1}{e^{i\Delta\varphi} - 1}$$

$$= \frac{e^{i\left(\frac{1}{2}N\Delta\varphi + \frac{1}{2}N\Delta\varphi\right)} - e^{i\left(\frac{1}{2}N\Delta\varphi - \frac{1}{2}N\Delta\varphi\right)}}{e^{i\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi + \frac{1}{2}\Delta\varphi\right)} - e^{i\left(\frac{1}{2}\Delta\varphi - \frac{1}{2}\Delta\varphi\right)}}$$

$$= \frac{e^{i\frac{N}{2}\Delta\varphi}\left(e^{i\frac{N}{2}\Delta\varphi} - e^{-i\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}\right)}{e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}}\left(e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} - e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}}\right)}$$

$$\sum_{n=1}^{N} e^{i(n-1)\Delta\varphi} = e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}(N-1)}\left[\frac{\sin N\Delta\varphi/2}{\sin \Delta\varphi/2}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{N} e^{i(n-1)\Delta\varphi} = e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}(N-1)}\left[\frac{\sin N\Delta\varphi/2}{\sin \Delta\varphi/2}\right]$$

maka persamaan 9 menjadi :

$$E(r,t) = E_0 e^{i(kr_1-\omega t)} e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}(N-1)}\left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}\right]$$

Jika $\phi = kr_1 + \frac{1}{2}(N-1)\Delta\varphi - \omega t$

Maka :

$$E(r,t) = E_0 e^{i\phi}\left[\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\Delta\varphi\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}\right]$$

$$I \approx |E|^2 \Longrightarrow I \approx E_0^{\,2}\left[\frac{\sin\frac{N}{2}\Delta\varphi}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}\right]^2 e^{i\phi}.e^{-i\phi} \Longrightarrow \boxed{I = I_0\left[\frac{\sin\frac{N}{2}\Delta\varphi}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}\right]^2}$$

Untuk kasus celah ganda (dua celah) maka N = 2 :

$$I = I_0 \left[\frac{\sin \Delta\varphi}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \right]^2 = I_0 \left[\frac{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2} . \cos \frac{\Delta\varphi}{2}}{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}} \right]^2$$

$$I = 4I_0 \left[\cos \frac{\Delta\varphi}{2} \right]^2$$

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\Delta\varphi}{2}$$

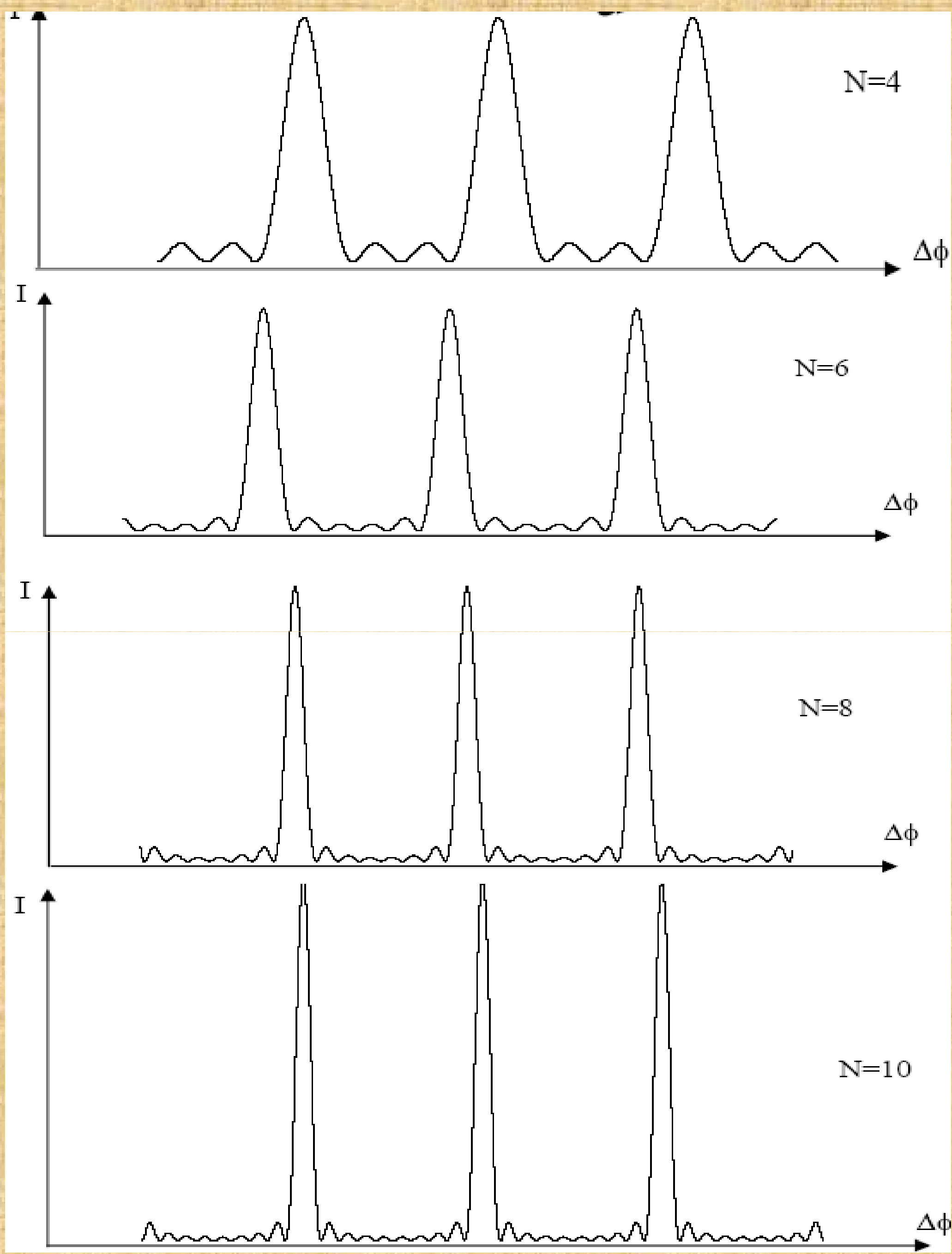
$$\Delta\varphi = k\Delta r$$

$$\Delta r = d \sin\theta \approx d \tan\theta \rightarrow \Delta r = d \frac{y}{L}$$

$$\Delta\varphi = kd \frac{y}{L}$$

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{kdy}{2L} \Longrightarrow \boxed{I = 4I_0 \cos^2 \frac{\pi dy}{\lambda L}}$$

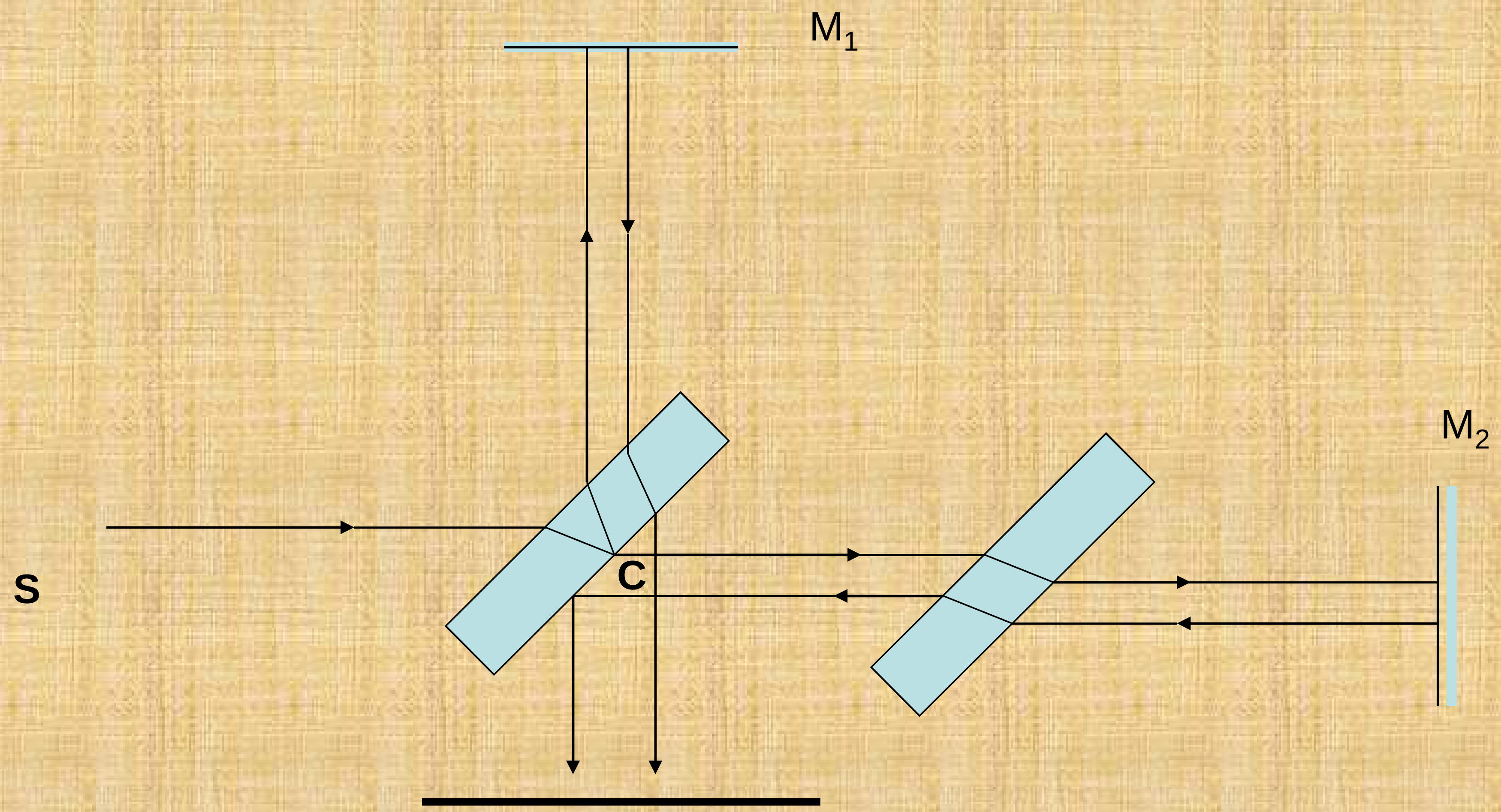
kasus celah ganda



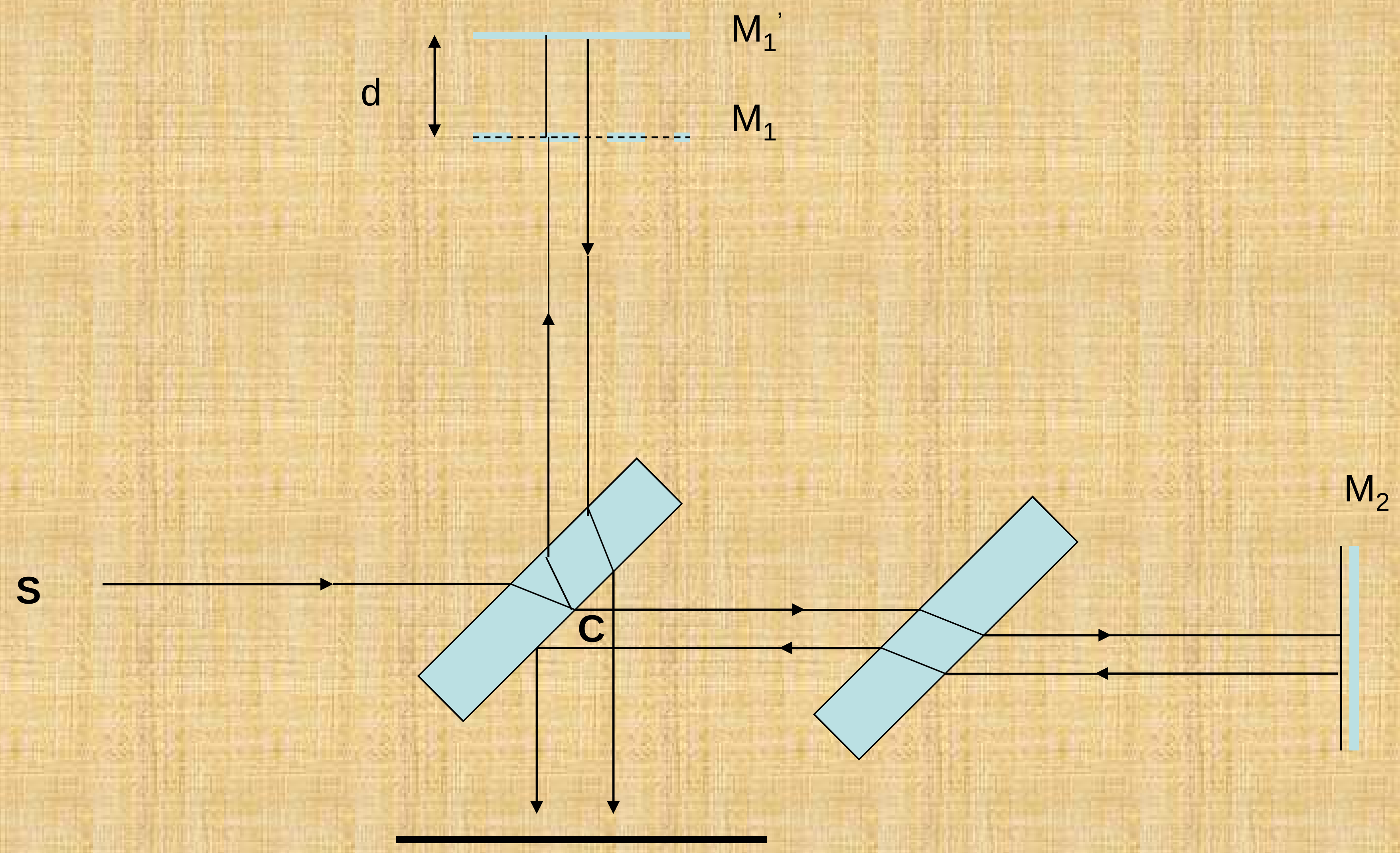
I
N=4
Δϕ
I
N=6
Δϕ
I
N=8
Δϕ
I
N=10
Δϕ

A.2. inferometer Pembelah Ampliudo (Pemecah Berkas)

A.2.1. Interferometer Michelson



Gambar Interferometer Michelson



M1'
d
M1
M2
S
C

"Kaca planpararel pada interferometer berfungsi untuk menyamakan lintasan optik"

Pada awalnya:

$CM_1 = CM_2$ dan $r_1 = r_2$

Selanjutanya ketika M1 digeser sebesar d, maka :

$$CM_1' = CM_1 + d$$

$r_1' = r_1 + 2d$ karena $r_1 = r_2$

$$r_1' = r_2 + 2d$$

Persamaan gelombangnya :

$E_1 = E_0 e^{i(k(r_1 + 2d) - \omega t)}$ dan $E_2 = E_0 e^{i(kr_2 - \omega t)}$

$$\Delta r = r_1' - r_1 = r_1' - r_2$$

$$\Delta r = \left(r_1 + 2d\right) - r_1$$

$$\Delta r = 2d \rightarrow r_1' = r_1 + 2d$$

$$E_1 = E_0 e^{i(kr_1' - \omega t)} = E_0 e^{i(k\left(r_1 + 2d\right) - \omega t)}$$

$$E_2 = E_0 (e^{i(kr_2 - \omega t)}$$

Superposisi :

$$E = E_1 + E_2$$

$$E = E_0 (e^{i(k(r_1 + 2d) - \omega t)} + e^{i(kr_2 - \omega t)})$$

Intensitas :

$$I \approx \left|E\right|^2$$

$$I \approx E_0{}^2\left[e^{i(k(r_1+2d)-\omega t)} + e^{i(kr_2-\omega t)}\right]\left[e^{-i(k(r_1+2d)-\omega t)} + e^{-i(kr_2-\omega t)}\right]$$

$$I \approx E_0{}^2\left[1 + e^{-i(k(r_2-(r_1+2d)))} + e^{i(k(r_2-(r_1+2d)))} + 1\right]$$

karena $r_2 = r_1$ maka $\quad I \approx E_0{}^2\left[2 + e^{-i(k2d)} + e^{i(k2d)}\right]$

$$I \approx E_0{}^2\left[2 + 2\cos 2kd\right]$$

karena $\quad I_0 \approx \left|E_0\right|^2 \approx E_0^2$ maka

$$I = 2I_0\left[1 + \cos(2kd)\right]$$

$$I = 2I_0\left[1 + 2\cos^2(kd) - 1\right]$$

$$I = 4I_0\cos^2(kd)$$

$$\boxed{I = 4I_0 \cos^2(kd)}$$

I akan maksimum jika : $\cos^2(kd) = 1$

$$\Longrightarrow \quad kd = n\pi \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} d = n\pi$$

$$2d = n\lambda \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2$$

terang ke-n diperoleh dengan mengeser M1 sebesar

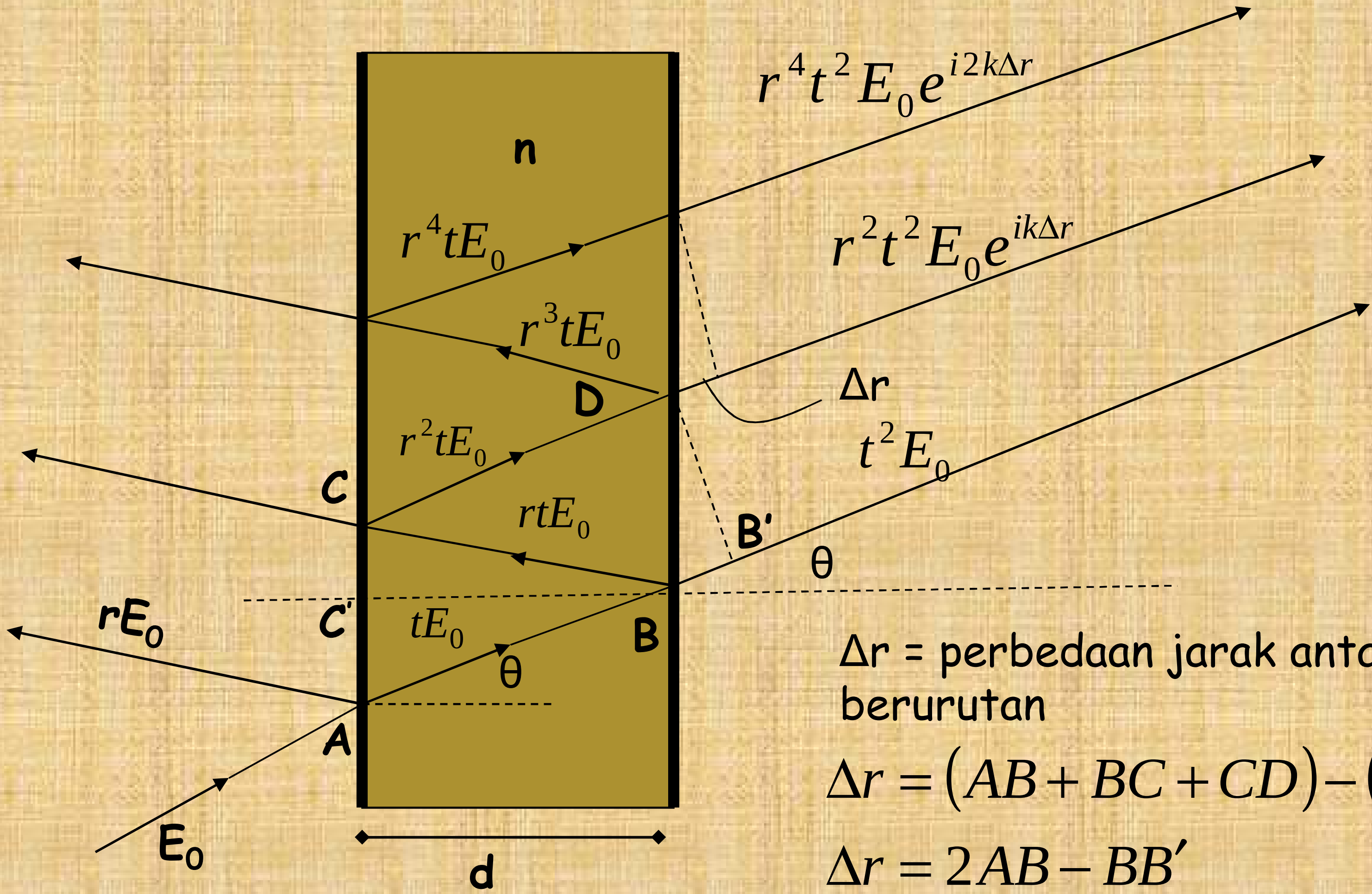
$$d = n\frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda = \frac{2d}{n}$$

I akan minimum jika : $\cos^2(kd) = 0 \Longrightarrow kd = \left[\frac{2n+1}{2}\right]\pi$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2$$

$$d = \left[\frac{2n+1}{4}\right]\lambda \rightarrow \lambda = \frac{4d}{2n+1}$$

A.2.2. Interferometer Fabry Perot



Δr = perbedaan jarak antara dua lintasan berurutan

$$\Delta r = (AB + BC + CD) - (AB + BB')$$

$$\Delta r = 2AB - BB'$$

Gambar 11. Pemantulan ganda pada Interferometer Fabry Perot segitiga ABC'

$$\cos\theta = \frac{d}{AB} \longrightarrow AB = \frac{d}{\cos\theta}$$

$$\sin\theta = \frac{AC'}{AB} = \frac{AC'\cos\theta}{d} \longrightarrow AC' = d\tan\theta = CC'$$

segitiga $BB'D$

$$\sin\theta = \frac{BB'}{BD} \longrightarrow \sin\theta = \frac{BB'}{2CC'} \longrightarrow BB' = 2\sin\theta . d\tan\theta$$

$$\Delta r = 2AB - BB' \longrightarrow \Delta r = \frac{2d}{\cos\theta} - 2d\tan\theta\sin\theta$$

$$\Longrightarrow \Delta r = 2\left[\frac{d}{\cos\theta} - \frac{d\sin^2\theta}{\cos\theta}\right] \Longrightarrow \Delta r = 2d\left[\frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta}\right]$$

$$\Longrightarrow \Delta r = 2d\left[\frac{\cos^2\theta}{\cos\theta}\right] \Longrightarrow \Delta r = 2d\cos\theta$$

$$\varphi = k.\Delta r$$

$$\varphi = 2kd\cos\theta$$

Fungsi Gelombang:

$$E = E_0 t^2 + r^2 t^2 E_0 e^{ik\varphi} + r^4 t^2 E_0 e^{i2k\varphi} + \cdots$$

$$E = E_0 t^2 \left[1 + r^2 e^{ik\varphi} + r^4 e^{i2k\varphi}\right]$$

Deret ukur tak hingga dengan rasio $\rho = r^2 e^{ik\varphi}$

$$E = E_0 t^2 . \frac{1}{1 - r^2 e^{ik\varphi}}$$

$$S_\infty = \frac{1}{1-\rho} \longrightarrow S_\infty = \frac{1}{1 - r^2 e^{ik\varphi}}$$

Intensitas:

$$\boxed{I \approx \frac{E_0{}^2 t^4}{\left|1 - r^2 e^{ik\varphi}\right|^2}}$$

$$\left|1 - r^2 e^{ik\varphi}\right|^2 = \left(1 - r^2 e^{i\varphi}\right)\left(1 - r^2 e^{-i\varphi}\right)$$
$$= 1 - r^2\left(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi}\right) + r^4$$
$$= 1 - 2r^2 \cos\varphi + r^4$$
$$= \underbrace{1 - 2r^2 + r^4}\ \underbrace{+ 2r^2 - 2r^2 \cos\varphi}$$
$$= \left(1 - r^2\right)^2 + 2r^2\left(1 - \cos\varphi\right)$$

...

Karena reflektansi $R = r^2$

maka

$$\boxed{\left|1 - r^2 e^{ik\varphi}\right|^2 = (1 - R)^2 + 2R(1 - \cos\varphi)}$$

$$\boxed{\left|1-r^2e^{ik\varphi}\right|^2 = (1-R)^2 + 2R(1-\cos\varphi)} \qquad \cos\varphi = \left(1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\left|1-r^2e^{ik\varphi}\right|^2 = (1-R)^2 + \left(4R\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\left|1-r^2e^{ik\varphi}\right|^2 = (1-R)^2\left(1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

Sehingga intensitas:

$$\boxed{I \approx \frac{E_0{}^2t^4}{\left|1-r^2e^{i\varphi}\right|^2}}$$

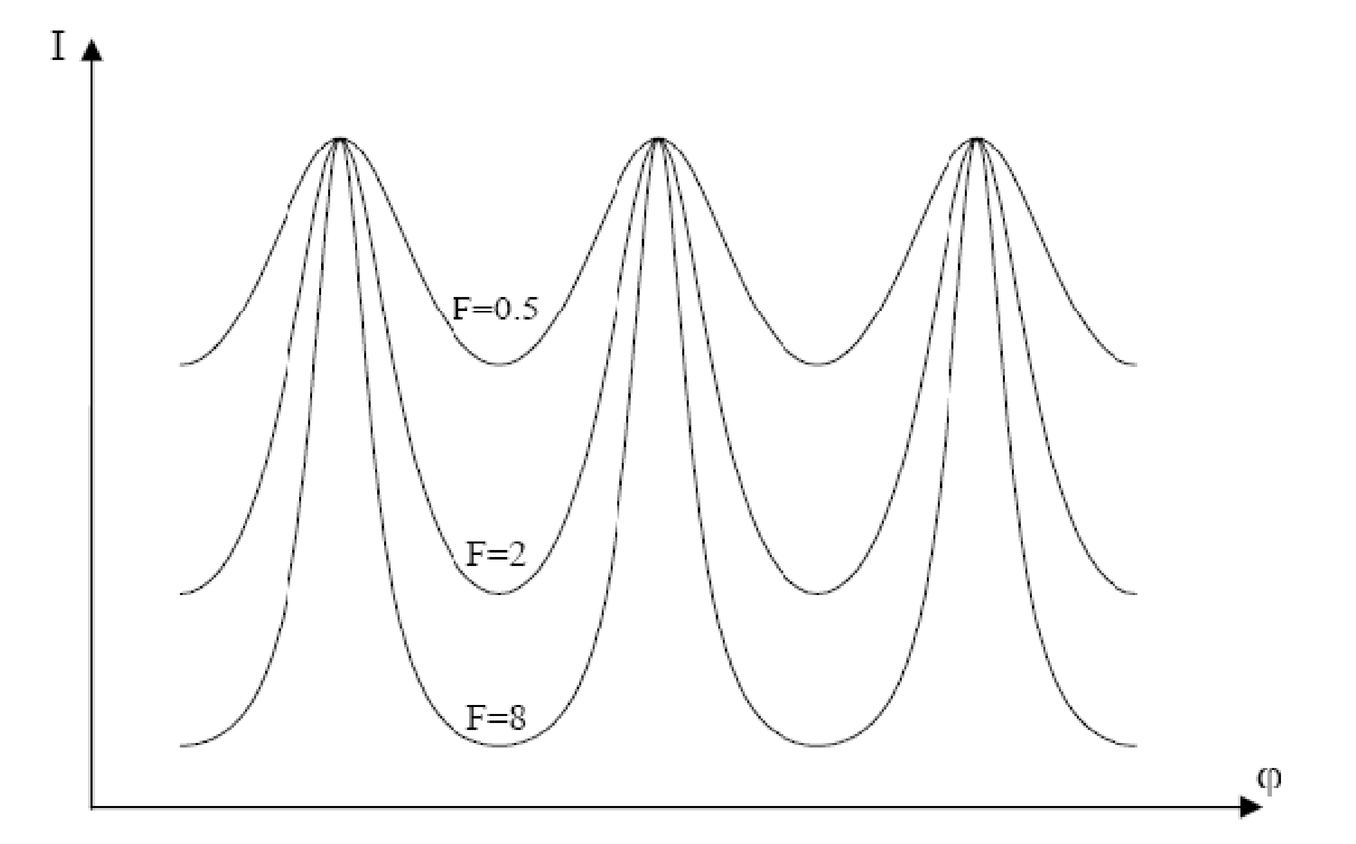
menjadi:

$$\boxed{I = \frac{I_0t^4}{(1-R)^2\left(1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}}$$

$$I = I_{maks}\underbrace{\left(1+F\sin^2\frac{\Delta\varphi}{2}\right)^{-1}}$$

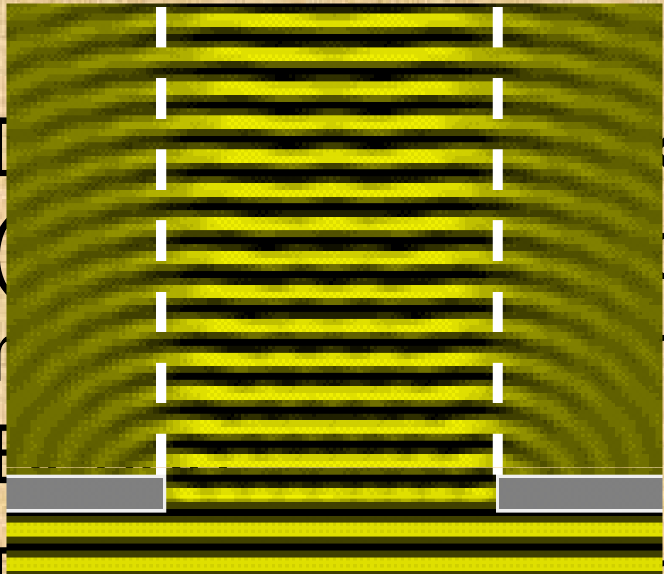
F dinamakan sebagai koefisisen *finess* (kehalusan)

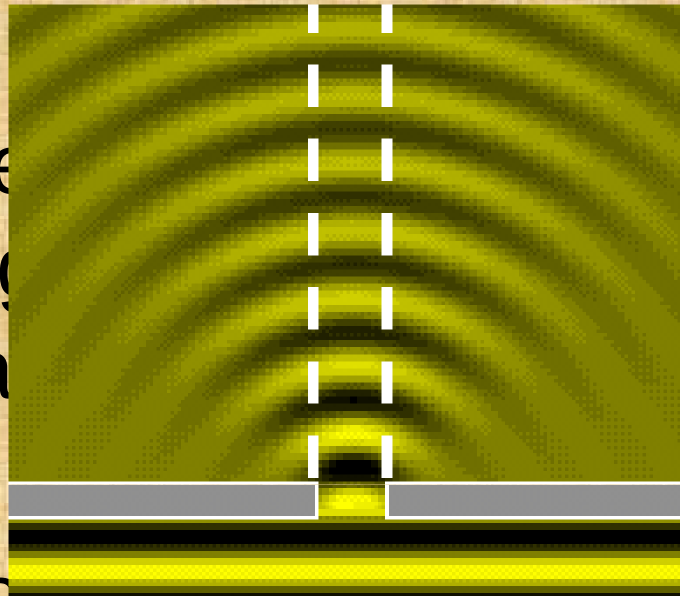
Fungsi Airy : menentukan pola interferensi



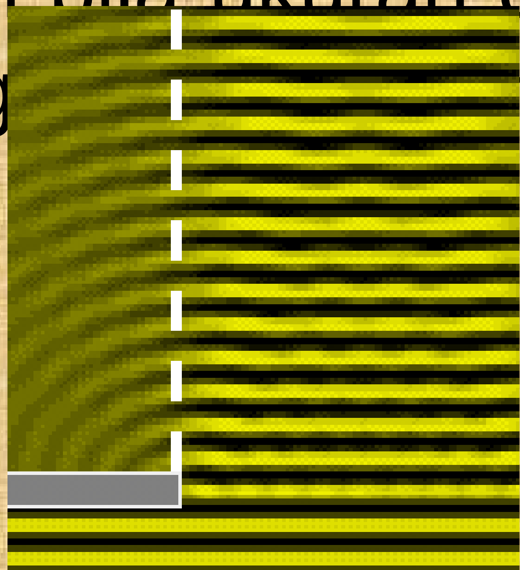
Pola intensitas pada interferometer Fabry Perot

B. Difraksi





- D kan ge n
  (ombang r
  r pit ata u
  E
- Difraksi terjadi bila ukuran celah lebih kecil dari panjang g

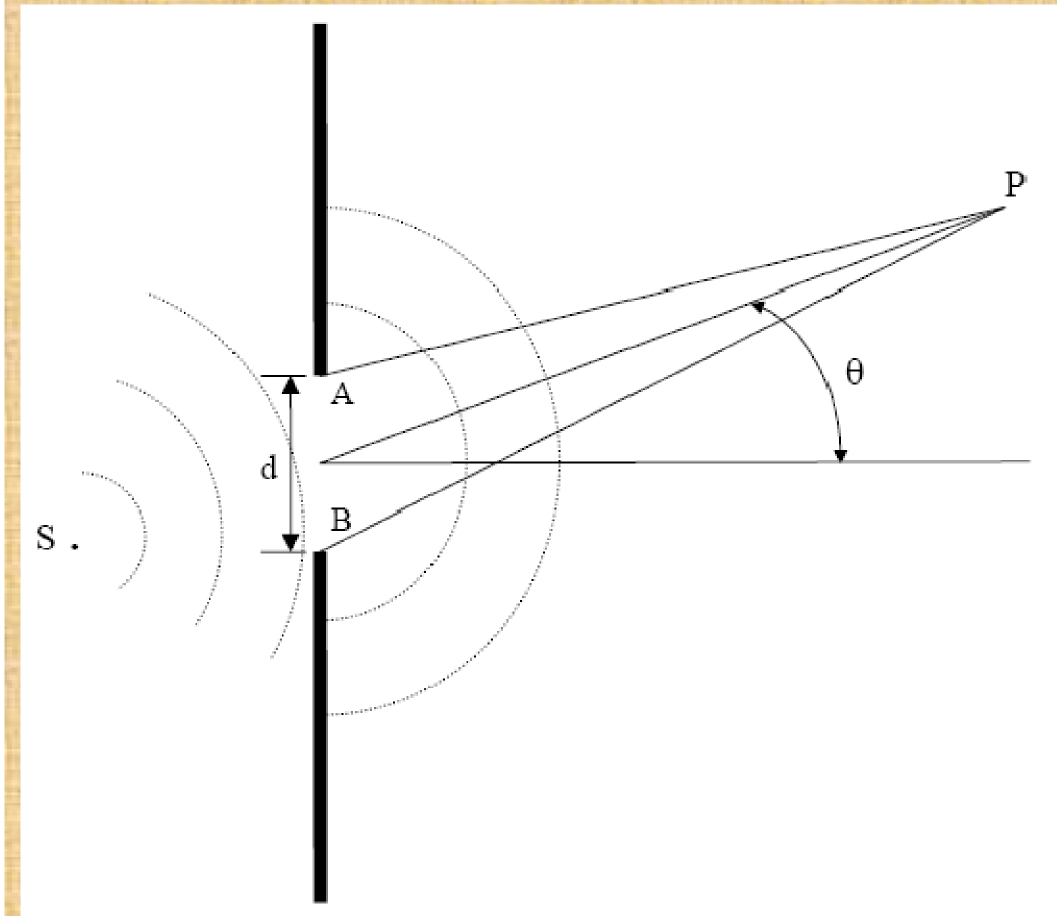


ng melaluinya.

Teori yang mendasari gejala difraksi

Prinsip Huygens-Fresnel:
Dalam proses perambatan gelombang bebas, setiap titik pada suatu muka gelombang berfungsi sebagai sumber sekunder sferis untuk anak gelombang (wavelet), dengan frekuensi yang sama dengan gelombang primernya.

B.1. Difraksi Fresnel dan Difraksi Fraunhofer



Gambar gejala difraksi dari suatu gelombang datar yang menjalar melalui suatu celah.

•Menurut prinsip Huygens-Fresnel titik A dan B pada tepi celah, merupakan sumber sekunder dengan fase yang sama.

•Efek difraksi diamati pada sutu titik P pada arah θ terhadap sumbu celah.

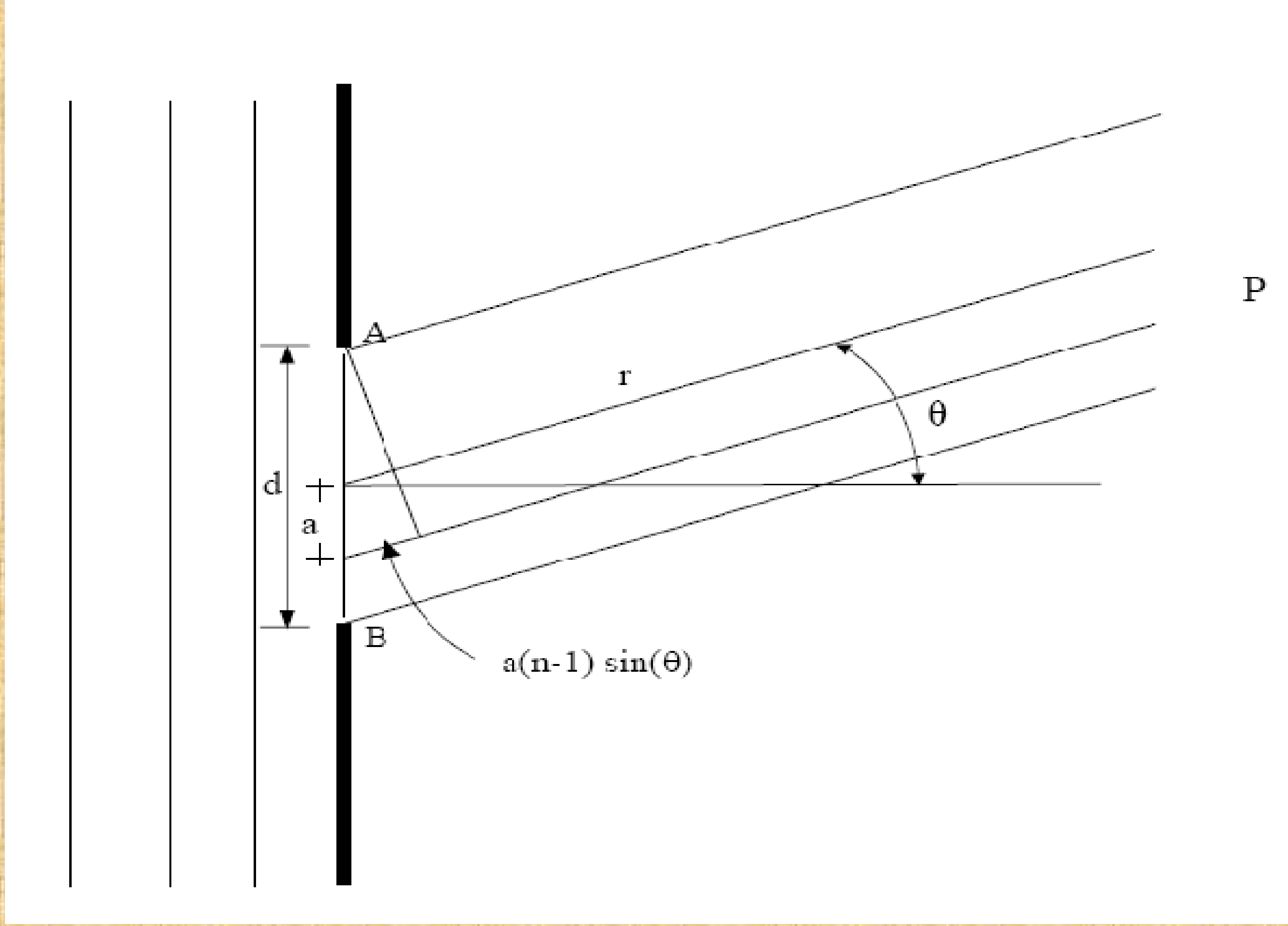
Difraksi Fresnel: jika titik P dan sumber gelombang datang tidak begitu jauh dari celah, sehingga gelombang datang tidak dapat dianggap sebagai gelombang datar.

•Difraksi Fraunhofer: jika titik P dan sumber gelombang datang cukup jauh dari celah, sehingga gelombang datang dapat dianggap sebagai gelombang datar.

Difraksi Celah Tunggal: Difraksi Fraunhofer

- gelombang datang berupa gelombang datar
- jartak titik P ke celah, jauh lebih besar dari lebar celah, r >> d .

Difraksi gelombang datang berupa gelombang datar



•Titik-titik pada celah antara A dan B, dapat dipandang sebagai sumber-sumber gelombang sekunder.

•Jadi Pola difraksi celah ini, dapat didekati sebagai pola interferensi sistim banyak celah sempit, masing-masing berjarak a.

Apabila fungsi gelombang yang berasal dari celah sempit pertama (celah sempit paling atas dititk A) adalah:

Misalkan: $$E_1 = E_0 e^{-i\omega t}$$

$$E_n = E_0 e^{-i(\omega t - k(n-1)a \sin\theta)}$$

Sehingga di titik P akan terjadi superposisi dari $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n = \sum_{n=1}^{n} E_n \longrightarrow E = E_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=1}^{N} e^{ika(n-1)\sin\theta}$$

$$E = E_0 e^{-i\omega t} + E_0 e^{-i(\omega t - ka\sin\theta)} + E_0 e^{-i(\omega t - 2ka\sin\theta)} + \ldots + E_0 e^{-i(\omega t - k(N-1)a\sin\theta)}$$

$$E = E_0 e^{-i\omega t} \underbrace{\left(1 + e^{ika\sin\theta} + e^{2ia\sin\theta} + \ldots + e^{ika(N-1)\sin\theta}\right)}_{\text{deret ukur dengan rasio } r = e^{ika\sin\theta}}$$

$$S_N = \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{e^{ikaN \sin\theta} - 1}{e^{ika \sin\theta} - 1}$$

$$S_N = \frac{e^{ika\frac{N}{2}\sin\theta}\left(e^{ika\frac{N}{2}\sin\theta} - e^{-ika\frac{N}{2}\sin\theta}\right)}{e^{i\frac{ka}{2}\sin\theta}\left(e^{i\frac{ka}{2}\sin\theta} - e^{-i\frac{ka}{2}\sin\theta}\right)}$$

$$S_N = e^{i\frac{ka}{2}(N-1)\sin\theta}\frac{\left[2i\sin\left(ka\frac{N}{2}\sin\theta\right)\right]}{\left[2i\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)\right]}$$

$$= e^{i\frac{ka}{2}(N-1)\sin\theta}\left(\frac{\sin\left(ka\frac{N}{2}\sin\theta\right)}{\sin\left(\frac{ka}{2}\sin\theta\right)}\right)$$

Maka persamaan ..1 berubah menjadi:

$$E = E_0 e^{-i\omega t}\left[e^{i\frac{ka}{2}(N-1)\sin\theta} \frac{\left[\sin\left(ka\frac{N}{2}\sin\theta\right)\right]}{\sin\left[\frac{ka}{2}\sin\theta\right]}\right]$$

$$E = E_0 e^{-i\omega t+\frac{1}{2}ika(N-1)\sin\theta}\left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2}kaN\sin\theta\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}ka\sin\theta\right]}\right]$$

misalnya $(N-1)a = b$

Kemudian bila jumlah sempit N diperbanyak sehingga menuju tak hingga, maka

$$(N-1)a \cong Na = b$$

$$E = E_0 e^{-i\omega t + \frac{1}{2} ikb\sin\theta} \left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2} kb\sin\theta \right) \right]}{N\sin\left[\frac{1}{2} ka\sin\theta \right]} \right] N$$

karena $\sin\left(\frac{1}{2} ka\sin\theta \right) \approx \frac{1}{2} ka\sin\theta$

$$E = E_0 e^{-i\omega t + \frac{1}{2} ikb\sin\theta} \left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2} kb\sin\theta \right) \right]}{\frac{1}{2} kb\sin\theta} \right] N$$

$$E = E_0 e^{-i\omega t + \frac{1}{2} ikb \sin\theta} \left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2} kb \sin\theta \right) \right]}{\frac{1}{2} kb \sin\theta} \right] N$$

misal $r = \frac{1}{2} b \sin\theta$

$$E = E_0 e^{-i\omega t + ikr} \left[\frac{[\sin(kr)]}{kr} \right] N$$

Jika $\beta = kr = \frac{1}{2} kb \sin\theta$

Maka :

$$E = E_0 e^{-i(\omega t - \beta)} \left[\frac{\sin\beta}{\beta} \right] N$$

$$E = E_0 e^{-i(\omega t - kr)} \left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] N$$

Superposisi gelombang di titik P

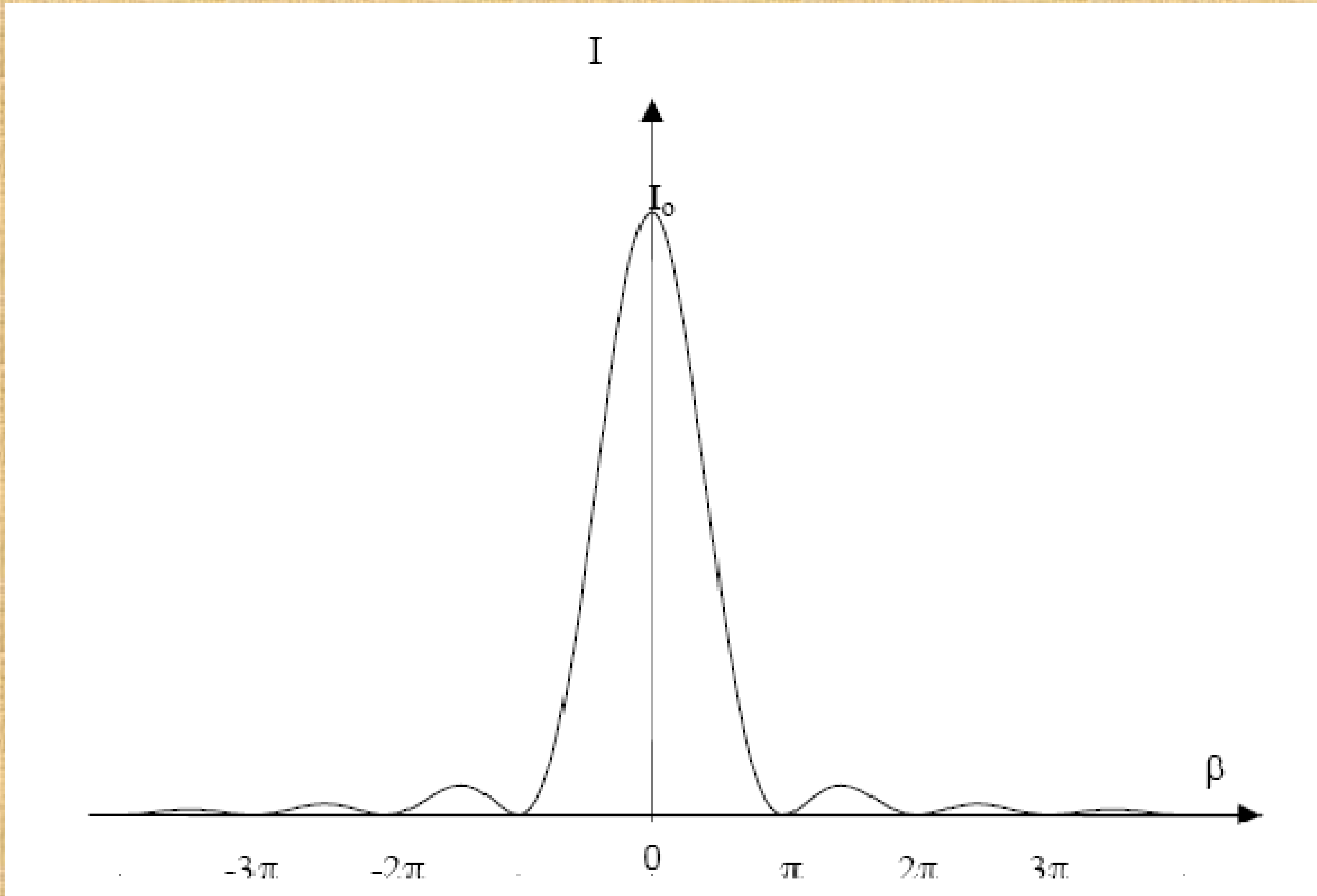
Maka pola difraksinya dapat diperoleh melalui Intensitas gelombang dititik P

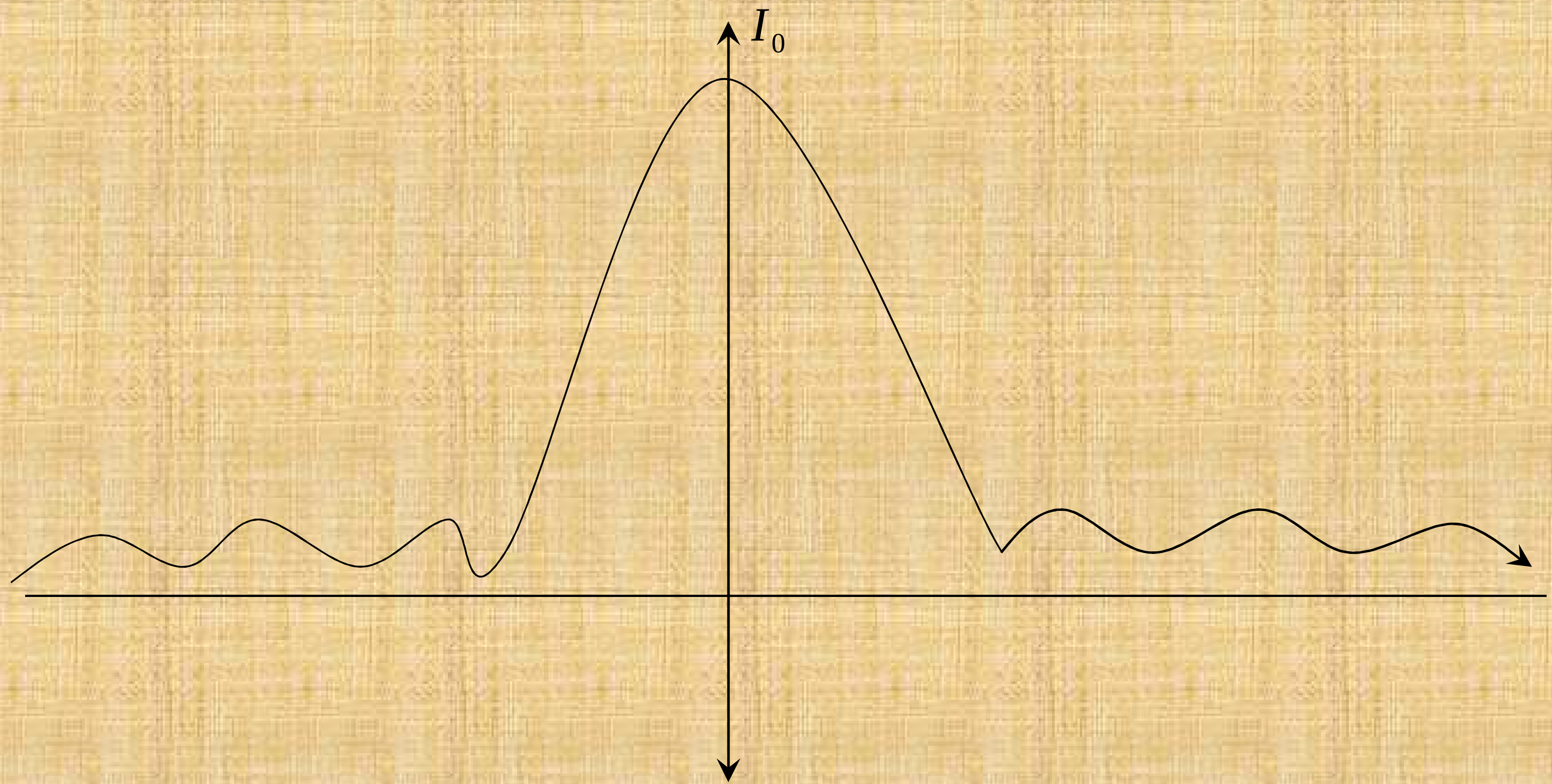
$$\boxed{I = I_0 \left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right]^2 N^2}$$

Untuk θ = 0 diperoleh pucak intensitas maksimum sebesar I_0,

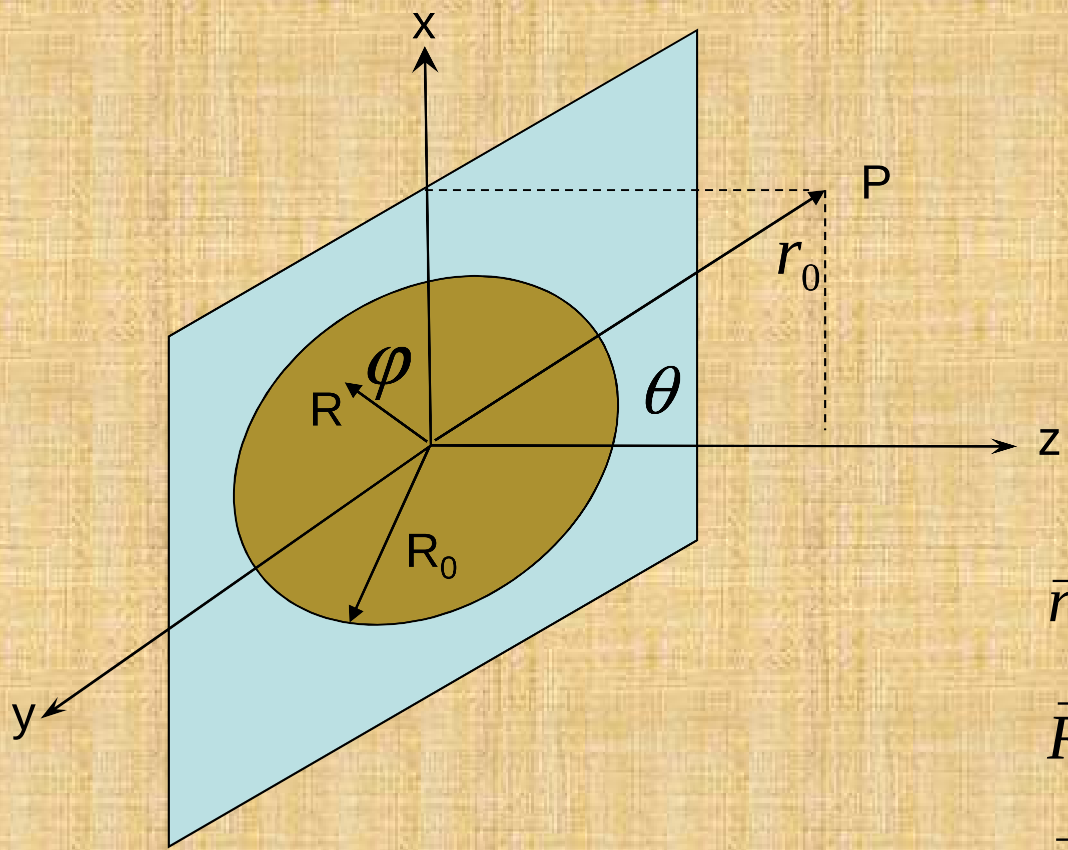
jadi intensitas maksimum terletak pada arah sumbu celah

Pola difraksi celah tunggal




I_0

Untuk bukaan (aperture) yang tidak berbentuk celah, misalnya bebentuk lingkaran dengan jari-jari R, maka :



$$\vec{r} = \vec{r}_0 . \vec{R}$$

$$\vec{r}_0 = (\sin\theta, 0 . \cos\theta)$$

$$\vec{R} = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, .0)$$

$$\vec{r}_0 \cdot \vec{R} = R\cos\varphi\sin\theta$$

$$dE = \frac{E_0}{\pi R^2} e^{-i(kR\cos\varphi\sin\theta - \omega t)} RdRd\theta$$

$$dS = RdRd\theta$$

$$E = \frac{2E_0}{R^2} e^{-i\omega t} \frac{1}{2\pi} \int_0^d \left[\int_0^{2\pi} e^{ikR\sin\theta\cos\varphi} d\varphi \right] RdR$$

Misal :

$$\rho = kR\sin\theta \qquad R = \frac{\rho}{k\sin\theta}$$

$$d\rho = k\sin\theta dR$$

$$dR = \frac{d\rho}{k\sin\theta}$$

$$RdR = \frac{\rho d\rho}{(k\sin\theta)^2}$$

Subtitusikan ke persamaan ...1 akan diperoleh persamaan

$$E=\frac{2E_0}{R^2}e^{-i\omega t}\frac{1}{2\pi}\int_0^d\left[\int_0^{2\pi}e^{i\rho\cos\varphi}d\varphi\right]RdR$$

$$E=\frac{2E_0}{R^2}e^{-i\omega t}\frac{1}{2\pi}\int_0^{kd\sin\theta}\left[\int_0^{2\pi}e^{i\rho\cos\varphi}d\varphi\frac{\rho d\rho}{(k\sin\theta)^2}\right] \quad E=\frac{2E_0}{R^2}e^{-i\omega t}\frac{1}{2\pi}\frac{1}{(k\sin\theta)^2}\int_0^{kd\sin\theta}\left[\int_0^{2\pi}e^{i\rho\cos\varphi}d\varphi\right]\rho d\rho$$

$$E=\frac{2E_0}{R^2}e^{-i\omega t}\frac{1}{(k\sin\theta)^2}\int_0^{kd\sin\theta}\rho J_0(\rho)d\rho$$

Dengan menggunakan fungsi Bessel

$$J_0(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\rho\cos\varphi}d\varphi$$

$$\rho(d)=kd\sin\theta$$

$$J_1(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(\varphi+\rho\cos\varphi)}d\varphi$$

$$E = \frac{2E_0}{R^2} e^{-i\omega t} \frac{1}{(k\sin\theta)^2} \int_0^{dk\sin\theta} \rho J_0(\rho) d\rho$$

$$u = Rk\sin\theta$$

$$E = 2E_0 \frac{1}{(Rk\sin\theta)^2} e^{-i\omega t} \int_0^{kd\sin\theta} J_0(\rho)\rho d\rho$$

$$J(u) = \int_0^{u(d)} J_0(u) d\rho$$

$$E = 2E_0 \frac{1}{(u)^2} e^{-i\omega t} \int_0^{kd\sin\theta} J_0(\rho) u d\rho$$

$$E = 2E_0 e^{-i\omega t} \frac{J(u)}{u}$$

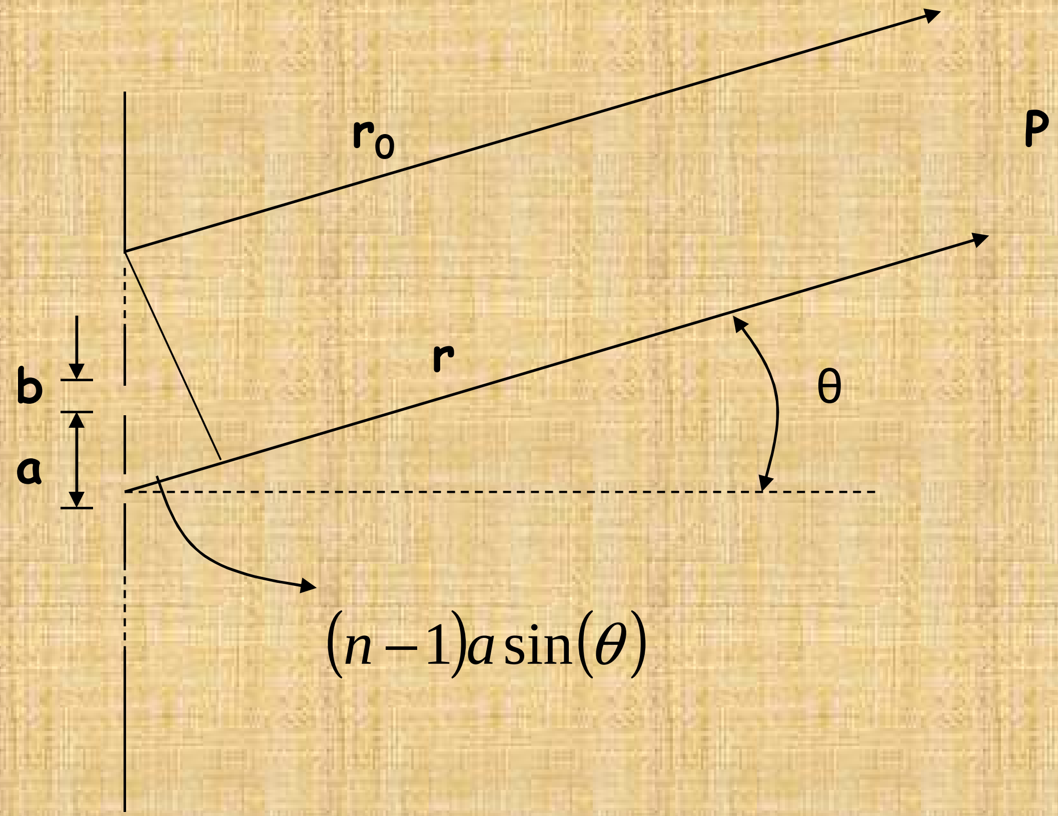
$$E = 2E_0 \frac{1}{u} e^{-i\omega t} J(u)$$

Intensitas pada arah θ adalah

$$I = I_0 \left[\frac{2J(u)}{u} \right]^2$$

Kisi Difraksi

Kisi Difraksi merupakan sistem N buah celah, dengan lebar celah yang teratur. Diraksi oleh kisi seferti ini akan menghasilkan pola difraksi tunggal tak sempit dengan pola interferensi N buah sumber yang sinkron.



Gambar 6.13 Diraksi oleh N buah celah

Gambar 6.13 memperlihatkan difraksi oleh sebuah kisi, lebar celah dan jarak antara celah masing-masing b dan a. Bila kisi ini disinari cahaya monokromatik, osilasi listrik di titik P yang ditimbulkan oleh celah ke nomor ke n adalah:

$$E_n = E_0 e^{-i(kr-u-\omega t)}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right]$$

Dimana $\Delta r = r - r_o$

$$r = \Delta r + r_o$$

$$\Delta r = (n-1)a\sin\theta$$

$$r = r_o + (n-1)a\sin\theta$$

$r_o =$ Jarak tepi celah pertama sampai ke titik P

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n$$ Yang memberikan hasil:

$$E = \sum_{n=1}^{N} E_n(\theta)$$

$$E = E_{01}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{-i(kr_o + 0 - u - \omega t)} + E_{01}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{-i(k(r_o + a\sin\theta - u - \omega t)} + \cdots + E_{01}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{-i(k(r_o + (n-1)a\sin\theta - u - \omega t)}$$

$$E = E_{01}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{-i(-u-\omega t)} e^{ikr_o}\left[1 + e^{ika\sin\theta} + \ldots + e^{i(n-1)ka\sin\theta}\right] \quad \ldots\ldots 1$$

Dengan $e^{ika\sin\vartheta}$

$$S = \frac{r^n - 1}{r - 1} = \frac{e^{ikaN\sin\theta} - 1}{e^{ika\sin\theta} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots 2$$

$$S=\frac{e^{ika\frac{N}{2}\sin\theta}\left(e^{ika\frac{N}{2}\sin\theta}-e^{-ika\frac{N}{2}\sin\theta}\right)}{e^{i\frac{ka}{2}\sin\theta}\left(e^{i\frac{ka}{2}\sin\theta}-e^{-i\frac{ka}{2}\sin\theta}\right)}$$

$$S=e^{\frac{1}{2}ika(N-1)\sin\theta}\left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2}kaN\sin\theta\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}ka\sin\theta\right]}\right]$$

Untuk lebar celah sempit a mendekati nol. Maka

$$(N-1)a = Na = Nb$$

$$E = E_{01} e^{-i(kr_o - u - \omega t)} \left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{\frac{1}{2} ika \sin\theta} \left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2}Nkb\sin\theta\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}kb\sin\theta\right]}\right]$$

$$E = E_{01} e^{-i(kr_o - u - \omega t)} \left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{\frac{1}{2} ikb \sin\theta} \left[\frac{\left[\sin\left(\frac{1}{2}Nkb\sin\theta\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}kb\sin\theta\right]}\right]$$

misal $\delta = kb\sin\theta$

$$E = E_{01}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right] e^{-i(k\delta-\omega t)}\left[\frac{\left[\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right] \quad .....2$$

sehingga

$$I = NE_{o1}{}^{2}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right]^{2}\left[\frac{\left[\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)\right]}{N\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right]^{2}$$

$$I = I_{0}\left[\frac{\sin\beta}{\beta}\right]^{2}\left[\frac{\left[\sin\left(\frac{N\delta}{2}\right)\right]}{N\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right]^{2}$$

Intensitas maksimum utama (primer) dicapai bila $\frac{\delta}{2} = m\pi$

dengan m bilangan bulat

$$\frac{\delta}{2} = m\pi$$

$$\frac{1}{2} kb \sin\theta = m\pi$$

$$\sin\theta = \frac{2m\pi}{kb}$$

$$\sin\theta = \frac{2m\pi}{\frac{2\pi b}{\lambda}}$$

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{b}$$

Maksimum tambahan (sekunder) dicapai apabila

$$\frac{N\delta}{2} = \frac{(2m-1)}{2}\pi \quad \text{dengan} \quad m = \pm 1, \pm 2$$

$$\frac{1}{2} kNb \sin\theta = \frac{(2m+1)\pi}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{(2m+1)\pi}{Nb}$$

Minimum (titik nol) terjadi bila

$$\frac{N\delta}{2} = m\pi \quad \text{dengan} \quad m = \pm 1, \pm 2$$

$$\frac{1}{2} kNb \sin\theta = m\pi$$

$$\sin\theta = \frac{m\lambda}{Nb}$$

Apabila cahaya yang datang terdiri dari dua panjang gelombang yang berbeda, maka kedudukan maksimum utama dari kedua panjang gelombang tersebut pada orde m yang sama akan terpisah bila

$$\Delta\theta = m\frac{\Delta\lambda}{a\cos\theta}$$

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{aN\cos\theta}$$

$$atau$$

$$m\frac{\Delta\lambda}{a\cos\theta} = \frac{\lambda}{aN\cos\theta}$$

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$

Besaran ini sering dinyatakan dengan daya pisah (DP) jadi

$$DP = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$