Mata Kuliah

GELOMBANG-OPTIK

TOPIK I

SUB TOPIK

OSILASI GANDENG

andhy setiawan

C. SISTEM OSILASI DUA DERAJAT KEBEBASAN:OSILASI GANDENG

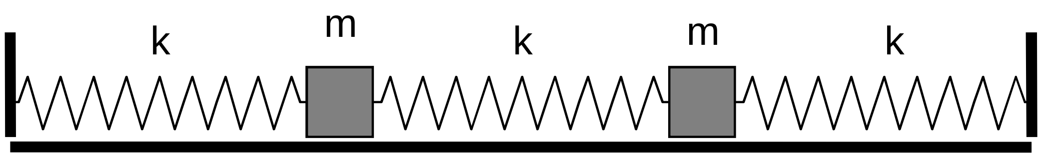
- Satu derajat kebebasan:

  Misalkan: pegas yang memiliki satu simpangan

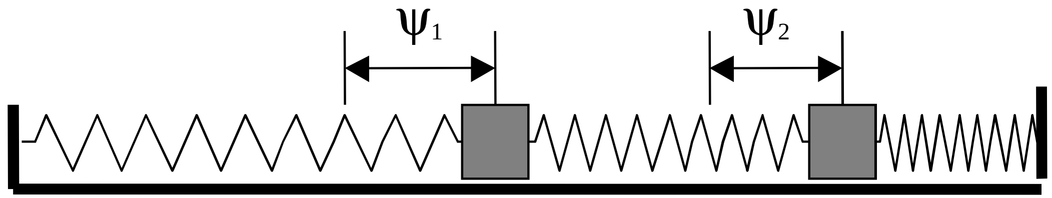
- Dua derajat kebebasan:

  Misalkan: pegas yang memiliki dua simpangan berbeda

C.1 OSILASI GANDENG PEGAS



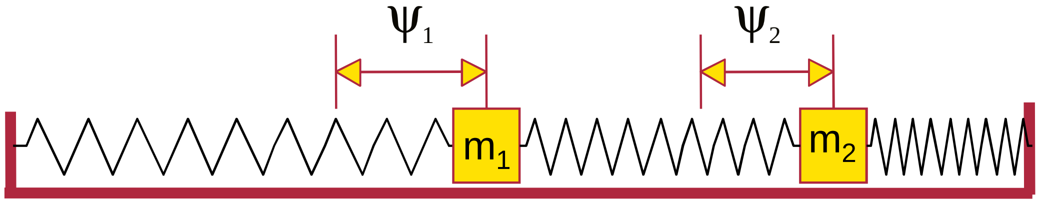
Keadaan Setimbang



Keadaan Umum

Sistem pegas gandeng, terdiri dari tiga pegas yang konstanta pegasnya sama yakni k, dan dua benda yang massanya sama juga yakni m. Sistem ini terletak pada permukaan datar tanpa gesekan.

Untuk benda m_1, hukum II Newton: $\sum F = m_1 a$



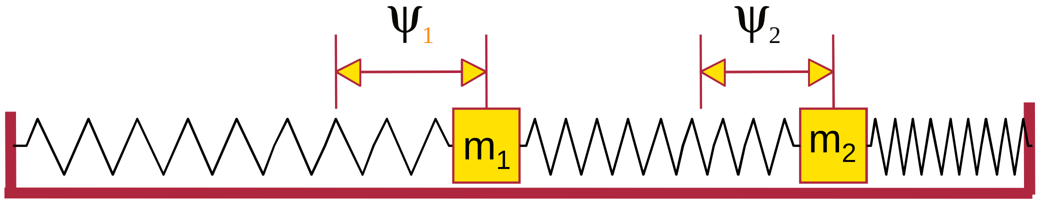
$$f_{p1} + f_{p2} = m_1 \frac{d^2\psi_1}{dt^2}$$

$$m_1 \frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -k_1\psi_1 - k_2\left(\psi_1 - \psi_2\right)$$

$$m_1 \frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\left(k_1 + k_2\right)\psi_1 + k_2\psi_2$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\frac{\left(k_1 + k_2\right)}{m_1}\psi_1 + \frac{k_2}{m_1}\psi_2 \quad \ldots \quad (1.14)$$

Untuk benda m_2, hukum II Newton: $\sum F = m_2 a$



$$f_{p2} + f_{p3} = m_2 \frac{d^2\psi_2}{dt^2}$$

$$m_2 \frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -k_2\left(\psi_2 - \psi_1\right) - k_3\psi_2$$

$$m_2 \frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -\left(k_2 + k_3\right)\psi_2 + k_2\psi_1$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = \frac{k_2}{m_2}\psi_1 - \frac{\left(k_2 + k_3\right)}{m_2}\psi_2 \qquad \ldots \quad (1.15)$$

Persamaan umum gelombang

$$\psi_n = A_n \cos(\omega t + \phi)$$

dengan

$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -a_{11}\psi_1 - a_{12}\psi_2 \qquad \ldots (1.16)$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = -a_{21}\psi_1 - a_{22}\psi_2 \qquad \ldots (1.17)$$

Masukan solusi umum penyelesaian persamaan gelombang kedalam (1.16) dan (1.17)

$$-A_1\omega^2 \cos(\omega t + \phi) + a_{11}A_1 \cos(\omega t + \phi) +$$
$$a_{21} \cos(\omega t + \phi) = 0$$

$$-A_2\omega^2 \cos(\omega t + \phi) + a_{21}A_1 \cos(\omega t + \phi) +$$
$$a_{22} \cos(\omega t + \phi) = 0$$

Atau dalam bentuk matrik:

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -\omega^2 + a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = 0$$

Dengan determinan $\det A = 0$

$$\left(-\omega^2 + a_{11}\right)\left(-\omega^2 + a_{22}\right) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\underbrace{\left(\omega^2\right)^2 - \left(a_{11} + a_{22}\right)\omega^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0}$$

Persamaan kuadrat dalam ω^2

Ingat Rumus abc (akar2 pers. Kuadrat)!

$$\omega_{I,II}^2 = \frac{\left(a_{11} + a_{22}\right)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(a_{11} + a_{22}\right) - 4\left(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}\right)}$$

andhy setiawan

Jika $\omega_1{}^2 > \omega_2{}^2$

Maka $\omega_1{}^2 \longrightarrow$ Mode tinggi

Perbandingan amplitudo

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & -\omega^2 + a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\left(-\omega^2 + a_{11}\right) A_1 + a_{12} A_2 = 0$$

Mode I $\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{a_{12}}{\left(\omega_I{}^2 - a_{11}\right)}}$

Mode II $\longrightarrow$ $\boxed{\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{a_{12}}{\left(\omega_{II}{}^2 - a_{11}\right)}}$

$$a_{21} A_1 + \left(-\omega^2 + a_{22}\right) A_2 = 0$$?

Untuk kasus $k_1 = k_2 = k_3 = k$ dan $m_1 = m_2 = m$

Maka
$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\frac{2k}{m}\psi_1 + \frac{k}{m}\psi_2$$
$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = +\frac{k}{m}\psi_1 - \frac{2k}{m}\psi_2$$
+

$$\frac{d^2}{dt^2}(\psi_1 + \psi_2) = -\frac{2k}{m}(\psi_1 + \psi_2) + \frac{k}{m}(\psi_1 + \psi_2)$$

Jika $(\psi_1 + \psi_2) = \psi_I = A_I \cos(\omega_I t + \phi)$
$$= (A_1 + A_2)\cos(\omega_I t + \phi)$$

$$\omega_I{}^2 = \frac{k}{m}$$

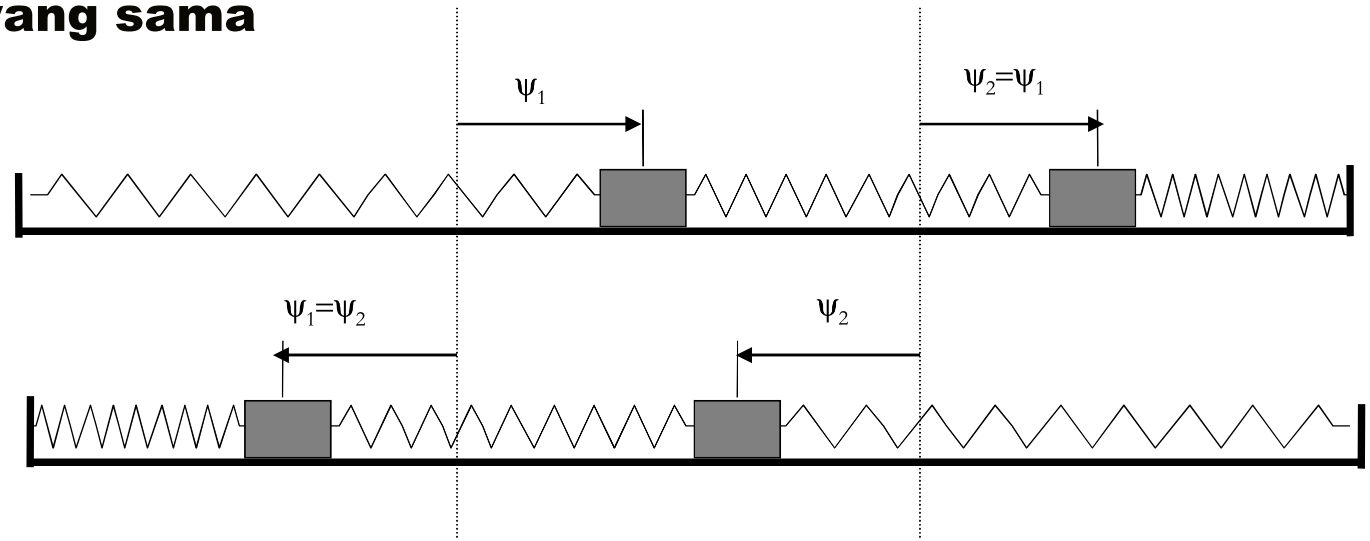
maka
$$\boxed{\frac{d^2\psi_I}{dt^2} = \frac{k}{m}\psi_I - \frac{2k}{m}\psi_I} \quad \boxed{\frac{d^2\psi_I}{dt^2} = -\frac{k}{m}\psi_I \rightarrow \text{mode rendah}}$$

Solusi persamaan

$$\left(\psi_1+\psi_2\right)=\psi_I=A_I\cos\left(\omega_I t+\phi\right)$$
$$=\left(A_1+A_2\right)\cos\left(\omega_I t+\phi\right)$$

merupakan osilasi pusat massa

gerak osilasi pusat massa ini mempunyai frekuensi yang sama dengan frekuensi osilasi pegas tunggal, pegas penggandeng hanya berfungsi sebagai penyelaras gerak osilasi. Perpindahan masing-masing benda mempunyai besar dan arah yang sama



$$\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\frac{2k}{m}\psi_1 + \frac{k}{m}\psi_2$$

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} = +\frac{k}{m}\psi_1 - \frac{2k}{m}\psi_2 \qquad -$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\psi_1 - \psi_2) = -\frac{2k}{m}(\psi_1 - \psi_2) + \frac{k}{m}(\psi_1 - \psi_2)$$

Jika $(\psi_1 - \psi_2) = \psi_{II} = A_{II}\cos(\omega_{II} t + \phi)$

$$= (A_1 - A_2)\cos(\omega_{II} t + \phi)$$

maka $\dfrac{d^2\psi_{II}}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}\psi_{II} - \dfrac{2k}{m}\psi_{II}$

$$\boxed{\frac{d^2\psi_{II}}{dt^2} = -\frac{3k}{m}\psi_{II}} \rightarrow \text{mode tinggi} \rightarrow \boxed{\omega_{II}{}^2 = \frac{3k}{m}}$$

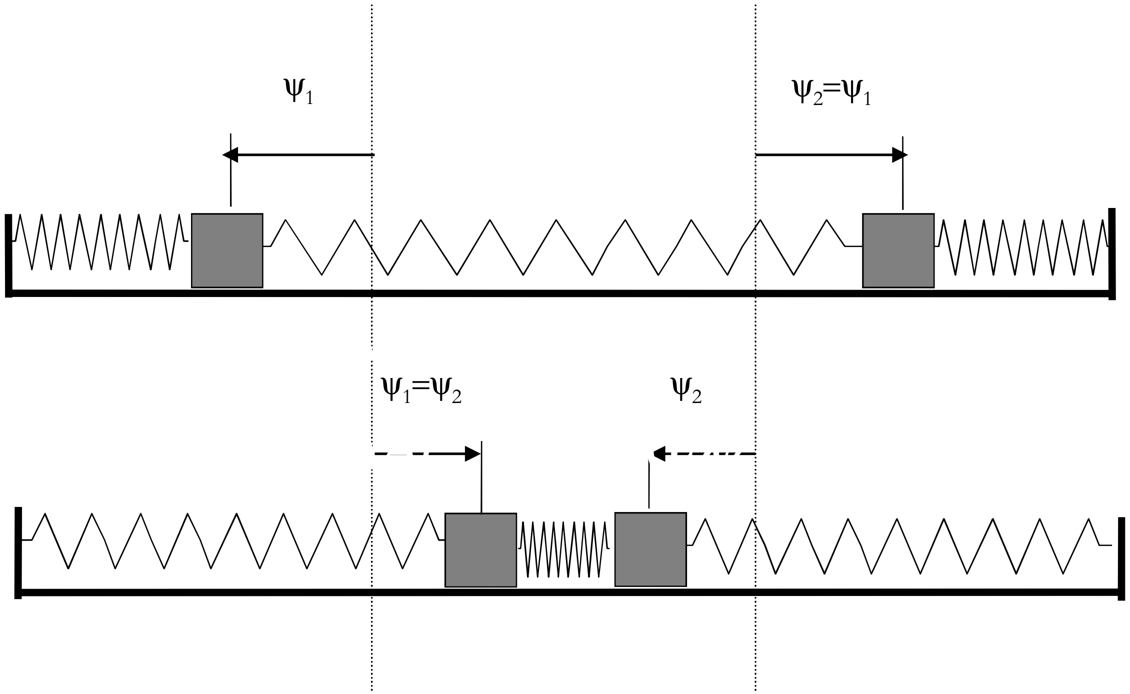
andhy setiawan

Solusi persamaan

$$\left(\psi_1-\psi_2\right)=\psi_{II}=A_{II}\cos\left(\omega_{II}t+\phi\right)$$

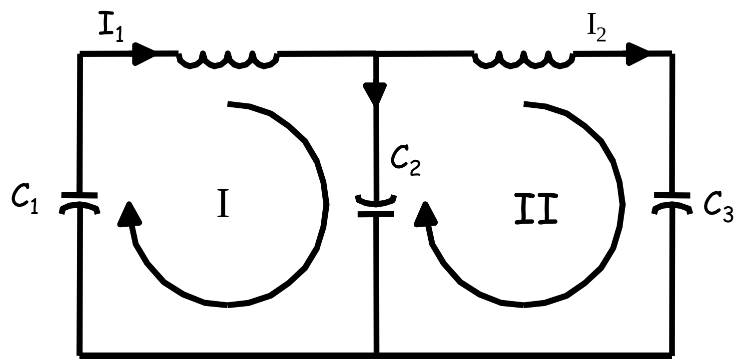
$$=\left(A_1-A_2\right)\cos\left(\omega_{II}t+\phi\right)$$

merupakan osilasi relatif



Gerak osilasi seluruh sistem merupakan superposisi linier dari kedua osilasi harmonik tersebut, yaitu: $\psi=\psi_I+\psi_{II}$

OSILASI GANDENG RANGKAIAN LC



Osilasi Gandeng Rangkaian LC

Rangkaian LC gandeng yang terdiri dari tiga kapasitor yang kapasitansinya sama yakni C, dan dua induktor yang induktansinya juga sama yakni L, seperti pada gambar. Mula-mula rangkaian ini dihubungkan dengan suatu sumber, dan setelah tercapai resonansi sumber dilepas kembali.

Hukum II Kirchoff, dalam rangkaian tertutup $\sum V = 0$

Loop I : $V_{L_1} + V_{C_1} + V_{C_2} = 0$

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} = 0$$

$$L_1 \frac{d^2 Q_1}{dt^2} + \frac{1}{C_1}\frac{dQ_1}{dt} + \frac{1}{C_2}\frac{dQ_2}{dt} = 0 \qquad (1.18)$$

BACK

$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{1}{L_1C_1}\frac{dQ_1}{dt} + \frac{1}{L_1C_2}\frac{dQ_2}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{1}{L_1C_1} I_1 + \frac{1}{L_1C_2} I_2 = 0$$

Dari hukum I Kirchoff $I_1 = I_2 + I_3 \rightarrow I_2 = I_1 - I_3$ Maka :

$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{1}{L_1C_1} I_1 + \frac{1}{L_1C_2}\left(I_1 - I_3\right) = 0$$

$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} + \left(\frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{L_1C_2}\right) I_1 - I_3 \frac{1}{L_1C_2} = 0 \qquad \ldots (1.19)$$

Loop II $V_{L_2} + V_{C_3} + V_{C_2} = 0$

$$\boxed{L_2 \frac{dI_3}{dt} - \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2 I_3}{dt^2} - \frac{1}{L_2 C_2} I_2 + \frac{1}{L_2 C_3} I_3 = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2 I_3}{dt^2} - \frac{1}{L_2 C_2}\left(I_1 - I_3\right) + \frac{1}{L_2 C_3} I_3 = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2 I_3}{dt^2} - \frac{1}{L_2 C_2} I_1 + \left(\frac{1}{L_2 C_3} + \frac{1}{L_2 C_2}\right) I_3 = 0} \quad \ldots (1.20)$$

Mode normal $\longrightarrow$ $I_n = I_{0n} \sin(\omega_n t - \varphi)$

$$\frac{d^2 I_1}{dt^2} = -\omega^2 I_1$$ $\longrightarrow$ Subsitusikan pada pers. (1.19)

$$\frac{d^2 I_3}{dt^2} = -\omega^2 I_3$$ $\longrightarrow$ Subsitusikan pada pers. (1.20)

$$-\omega^2 I_1 + \left(\frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{L_1C_2}\right) I_1 - I_3 \frac{1}{L_1C_2} = 0$$

$$\boxed{\left(-\omega^2 + \left(\frac{1}{L_1C_1} + \frac{1}{L_1C_2}\right)\right) I_1 - I_3 \frac{1}{L_1C_2} = 0}$$

$$\left(-\omega^2+\left(\frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_1C_2}\right)\right)I_1-I_3\frac{1}{L_1C_2}=0$$

$$\boxed{-\omega^2 I_3-\frac{1}{L_2C_2}I_1+\left(\frac{1}{L_2C_3}+\frac{1}{L_2C_2}\right)I_3=0}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{L_2C_3}+\frac{1}{L_2C_2}-\omega^2\right)I_3-\frac{1}{L_2C_2}I_1=0}$$

Dalam bentuk matrik

$$\boxed{\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{L_2C_3}+\frac{1}{L_2C_2}-\omega^2\right) & -\frac{1}{L_1C_2}\\ -\frac{1}{L_2C_2} & \left(\frac{1}{L_2C_2}+\frac{1}{L_2C_3}-\omega^2\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\ I_3\end{bmatrix}=0}$$

Determinan matrik

$$\left(\frac{1}{\mathrm{L}_2\mathrm{C}_3}+\frac{1}{\mathrm{L}_2\mathrm{C}_2}-\omega^2\right)\left(\frac{1}{\mathrm{L}_2\mathrm{C}_3}+\frac{1}{\mathrm{L}_2\mathrm{C}_2}-\omega^2\right)-\left(\frac{1}{L_1C_2}\right)\left(\frac{1}{L_2C_2}\right)=0$$

$$\left(\omega^2\right)^2-\left(\frac{1}{L_2C_2}+\frac{1}{L_2C_3}\right)\left(\omega^2\right)-\left(\frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_1C_2}\right)\left(\omega^2\right)+$$
$$\left[\left(\frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_1C_2}\right)+\left(\frac{1}{L_2C_2}+\frac{1}{L_2C_3}\right)\right]-\left(\frac{1}{L_1C_2}\,X\,\frac{1}{L_2C_2}\right)=0$$

Ingat!!!
Rumus
abc

$$A\left(\omega^2\right)^2-B\left(\omega^2\right)-C=0$$

Persamaan kuadrat

Silahkan selesaikan!!!!

ANALISIS OSILASI HARMONIS

Fungsi gangguan ψ(t) yang periodik dapat diuraikan sebagai superposisi linier dari fungsi harmonik sederhana dengan amplitudo dan frekuensi tertentu, melalui uraian deret Fourier sebagai berikut:

$$\psi(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}\left\{a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right\} \qquad (1.21)$$

dengan a_n dan b_n disebut koefisien-koefisien Fourier.

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \psi(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad (1.22)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \psi(t)\sin(n\omega t)\,dt \qquad (1.23)$$

dengan n = 0,1,2,3,...., dan $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Untuk gangguan ψ(t) yang tidak periodik dapat diuraikan sebagai superposisi linier dari fungsi harmonik sederhana, melalui transformasi Fourier sebagai berikut:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{-i\omega t} \, d\omega \qquad (1.24)$$

dengan

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt \qquad (1.25)$$

Persamaan 1.24 menunjukkan bahwa gangguan yang tidak periodik dapat dinyatakan sebagai superposisi linier dan fungsi harmonik dalam spektrum **ω** yang kontinu.

Analisis energi potensial dari sistem osilasi:

$$V(\psi) = \int_0^{\psi} F(\psi) . d\psi = \frac{1}{2} k \psi^2 \qquad (1.26)$$

Jadi, fungsi energi potensial V(ψ) yang sebanding dengan ψ^2,mengungkapkan gerak osilasi harmonis dari sistem tersebut.

Sebaliknya dapat ditunjukkan bahwa setiap sistem dengan fungsi energi potensial yang berharga minimum pada suatu titik tertentu (misalnya di $\psi = \psi_0$), maka sistem tersebut akan berosilasi di sekitar titik ψ_0 tersebut.

Syarat Minimum:

$$\left.\frac{dV}{d\psi}\right|_{\psi=\psi_0} = 0 \quad \text{dan} \qquad (1.27)$$

$$\left.\frac{d^2V}{d\psi^2}\right|_{\psi=\psi_0} > 0$$

Fungsi potensial $V(\psi)$ diekspansikan kedalam deret Taylor untuk $\psi = \psi_0$ maka

$$V(\psi) = V(\psi_0) + (\psi-\psi_0)\left.\frac{dV}{d\psi}\right|_{\psi=\psi_0} + \frac{(\psi-\psi_0)^2}{2!}\left.\frac{d^2V}{d\psi^2}\right|_{\psi=\psi_0} + \ldots$$

Mengingat persamaan (1.27), maka persamaan terakhir ini dapat dituliskan dalam bentuk :

$$V(\psi) - V(\psi_0) = \frac{(\psi - \psi_0)^2}{2!} \left. \frac{d^2V}{d\psi^2} \right|_{\psi=\psi_0} \qquad (1.28)$$

Tampak bahwa persamaan (1.28) ini merupakan bentuk yang sama dengan persamaan (1.26), ini terpenuhi bila osilasinya mempunyai simpangan (aproksimasi) yang kecil.

Thanks for your Attention!!!