3 Konsep Dasar Probabilitas

3.1 Hubungan Dasar Probabilitas

Probabilitas adalah harga perbandingan jumlah kejadian (A) yang mungkin dapat terjadi terhadap (N) jumlah keseluruhan kejadian yang mungkin terjadi dalam sebuah peristiwa.

$$P_{(A)} = \frac{n(A)}{n(N)} \tag{3.1}$$

Contoh:

Peluang untuk mendapatkan angka genap dari lemparan sebuah dadu. Jumlah kejadian A yaitu munculnya angka genap dalam 1 kali lemparan : 2, 4, 6 = n(A) = 3, dan jumlah seluruh kejadian yang mungkin terjadi dari 1 kali lemparan sebuah dadu:

$$1,2,3,4,5,6 = n(N) = 6, \text{ sehingga } P_{(A)} = \frac{n(A)}{n(N)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Berpeluang sama berarti kedua keadaan tersebut memiliki jumlah kemunculan kejadian yang sama.

Sebuah kejadian adakalanya terkait dengan kejadian yang lain, hubungan antar kejadian satu dan lainnya dapat kita bayangkan dengan mudah. Sebagai contoh hubungan **atau**, hubungan ini akan memperbesar nilai peluang. Peluang untuk mendapatkan angka 2 atau 3 dalam sebuah lemparan dadu adalah sebagai berikut:

$P_{(2 \text{ atau } 3)} = P_{(2)} + P_{(3)} = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$,

dalam hal ini $P_{(2 \text{ atau } 3)} > P_{(2)}$

$P_{(2 \text{ atau } 3)} > P_{(3)}$

Hubungan **dan**, hubungan ini akan memperkecil nilai peluang. Peluang untuk mendapatkan angka 2 dan 3 dalam lemparan dua buah dadu adalah sebagai berikut:

$P_{(2dan\ 3)} = P_{(2)} \cdot P_{(3)} = 1/6 \times 1/6 = 1/36$, dalam hal ini $P_{(2\ dan\ 3)} < P_{(2)}$

$P_{(2\ dan\ 3)} < P_{(3)}$

Permutasi adalah urutan unsur-unsur dengan memperhatikan urutannya, dan dinotasikan dengan $n\Pr$, yang artinya '*Permutasi r unsur dari n unsur yang tersedia*'

Contoh: a. ${}_3P_3 \longrightarrow$

a	b	c	a	c	b
b	a	c	b	c	a
c	a	b	c	b	a

secara keseluruhan ada 6 permutasi

b. ${}_3P_2 \longrightarrow$

a	b	b	a
a	c	c	a
c	b	b	c

secara keseluruhan ada 6 permutasi

jadi jika: ${}_1P_1$, ${}_2P_1$, ${}_3P_1$, ${}_3P_2$, ….., ${}_nP_r$ adalah;

$$n\Pr = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{3.2}$$

contoh: ${}_5P_4 = \dfrac{5!}{(5-1)!} = 5.4.3.2.1 = 120$ permutasi

Kombinasi adalah urutan r unsur dari n unsur yang tersedia dengan tidak memperhatikan urutannya, dan dirumuskan dengan:

$$nCr = C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!n!} \tag{3.3}$$

Bila kita telaah, persamaan kombinasi dapat dinyatakan dalam permutasi sebagai berikut:

$$nCr = \frac{n!}{(n-r)!n!} = \frac{n\Pr}{r!} \qquad (3.4)$$

Contoh :

1. Tentukan jumlah kombinasi 3 unsur dari 3 unsur yang tersedia dan 2 unsur dari 3 unsur yang tersedia!

   Jawab : Kombinasi 3 unsur dari 3 unsur yang tersedia:

   ${}_3C_3 =$ a b c $\rightarrow$ 1 kombinasi

   Kombinasi 2 unsur dari 3 unsur yang tersedia:

   ${}_3C_2 = \left.\begin{array}{l} \text{a b} \\ \text{a c} \\ \text{b c} \end{array}\right\}$ 3 kombinasi

2. Ada 4 pasang suami istri, maka berapa carakah yang dapat dilakukan agar dapat dibentuk kelompok yang terdiri atas 3 orang?, lalu berapa cara yang dapat dilakukan agar dapat dibentuk kelompok yang terdiri atas 3 orang (2 orang laki- laki dan 1 orang wanita)?.

Jawab: -kelompok yang terdiri atas 3 orang (tanpa jenis kelamin yang khusus), maka kemungkinannya:

$$C_3^8 = \frac{8!}{(8-5)!5!} = \frac{8.7.6.5!}{3.2.5!} = 56 \text{ cara}$$

kelompok yang terdiri atas 3 orang (2 orang laki-laki dan 1 orang wanita), maka kemungkinannya:

$$\text{laki- laki saja} \Rightarrow C_2^4 = \frac{4!}{2!.2!} = \frac{4.3.2!}{2!.2!} = 6 \text{ cara}$$

$$\text{wanita saja} \Rightarrow C_1^4 = \frac{4!}{3!.1!} = \frac{4.3!}{3!.1} = 4 \text{ cara}$$

$$C(2+1) = C_1 \; dan \; C_2 = 6.4 = 24 \text{ cara}$$

3.2 Distribusi Binomial

Fungsi distribusi adalah fungsi yang menggambarkan kumpulan dari beberapa peluang, adapun binomial mengandung arti dua, sedangkan distribusi binomial yang dimaksud adalah keadaan untuk menggambarkan peluang yang akan muncul dari suatu peristiwa yang diulang n kali percobaan dimana peristiwa tersebut memiliki dua kemungkinan kejadian. Sebagai contoh peristiwa binomial adalah:

- kemungkinan hasil eksperimen dapat gagal atau berhasil,
- lemparan sebuah mata uang dapat berupa gambar atau angka,
- keadaan spin partikel dapat up atau down.

Pada peristiwa yang menggunakan distribusi binomial akan memiliki dua keadaan (katakanlah A dan A'). Untuk satu kali peristiwa itu terjadi, peluang kejadian A dinyatakan dengan P(A) = p dan peluang kejadian bukan A (kejadian A') dinyatakan dengan P(A') = q, dalam hal ini hubungan antara p dan q dapat dinyatakan dengan :

$$p + q = 1 \tag{3.5}$$

Bagaimanakah kita dapat menentukan peluang yang akan muncul untuk keadaan tertentu jika peristiwanya kita ulang beberapa kali. Sebagai contoh:

- Tentukan peluang untuk mendapatkan 3 muka gambar dalam tiga kali lemparan sebuah mata uang.
- Tentukan peluang untuk mendapatkan 2 muka gambar dalam tiga kali lemparan sebuah mata uang.

- Tentukan peluang untuk mendapatkan 1 muka gambar dalam tiga kali lemparan sebuah mata uang.

Pola lemparan yang akan terjadi ditunjukkan pada tabel 3.1.

Tabel 3.1

Pola kombinasi tiga kali lemparan sebuah mata uang

No	Lemparan 1	Lemparan 2	Lemparan 3	KETERANGAN
1	G	G	G	3G
2	G	G	A	2G
3	G	A	G	
4	A	G	G	
5	A	A	G	1G
6	A	G	A	
7	G	A	A	
8	A	A	A	0G

Jika kita melihat hal ini maka untuk menjawab pertanyaan di atas dapat dilakukan dengan mudah:

- P(3G) = 1/8.
- P(2G) = 3/8.
- P(1G) = 3/8.

Namun untuk lemparan yang cukup banyak, misalnya empat lemparan, maka pola yang terbentuk menjadi seperti pada tabel 3.2.

Pola ini akan semakin berkembang jika jumlah lemparan diperbanyak. Perhatikan peluang untuk mendapatkan dua muka gambar dalam empat kali lemparan mata uang dapat diperlihatkan oleh tabel 3.2, P(2G) = 6/16. Harga peluang ini ada kaitannya dengan harga kombinasi yang harus dilakukan untuk menempatkan pola yang dapat terjadi. Untuk jumlah lemparan yang cukup banyak akan sangat kerepotan kita dalam menentukan pola kombinasi yang akan terjadi. Oleh karena itu kita perlu model matematis untuk menentukan harga probabilitas dalam distribusi binomial.

Tabel 3.2
Pola kombinasi empat kali lemparan sebuah mata uang

No	Lemparan 1	Lemparan 2	Lemparan 3	Lemparan 4	Keterangan
1	G	G	G	G	4G
2	G	G	G	A	3G
3	G	G	A	G	
4	G	A	G	G	
5	A	G	G	G	
6	A	A	G	G	2G
7	A	G	A	G	
8	A	G	G	A	
9	G	A	A	G	
10	G	A	G	A	
11	G	G	A	A	
12	A	A	A	G	1G
13	A	A	G	A	
14	A	G	A	A	
15	G	A	A	A	
16	A	A	A	A	0G

Model ini dapat kita asumsikan sebagai berikut, misal hasil sebuah eksperimen yang telah dilakukan memiliki dua kemungkinan yakni berhasil (h) dan gagal (g), bagaimanakah peluang utuk menentukan dua eksperimen yang berhasil dari semua eksperimen yang pernah dilakukan.

No kemungkinan / No eskperimen	1	2	3	..	..	.n-1	n
1	h	h	G				g
2	h	g	H				g
3	h	g	G				g
….							
N	g					g	g

Berdasarkan hasil uji coba maka diperoleh model matematis untuk distribusi binomial, yang dinyatakan dengan:

$$P(\text{binomial}) = C_n^N p^n q^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \tag{3.6}$$

Contoh penggunaannya adalah sebagai berikut:

$$P_3^3 = \frac{3!}{3!(3-3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{3-3} = 1.\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

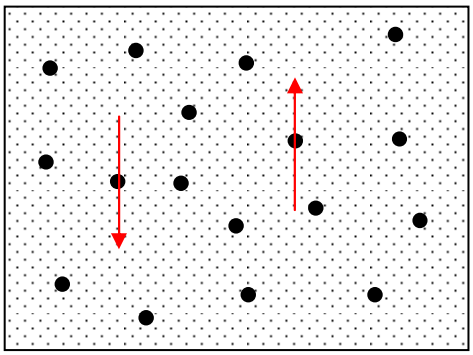
$$P_2^3 = \frac{3!}{2!(3-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{3-2} = 3.\frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

$$P_2^4 = \frac{4!}{2!(4-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = 6.\frac{1}{16} = \frac{6}{16}$$

$$P_3^4 = \frac{4!}{3!(4-3)!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = 4.\frac{1}{16} = \frac{4}{16}$$

3.3 Penerapan Distribusi Binomial dalam Kasus Fisika

Model distribusi binomial ini dapat diterapkan ke dalam beberapa kasus fisika seperti sistem N partikel dengan spin ½. Sebagai contoh sistem yang terdiri dari N partikel dimana setiap partikel memiliki variabel besaran fisika yakni momen magnetik partikel μ_o. Harga momen magnetik partikel tersebut memiliki dua macam harga bergantung dari keadaan spin partikel. Jika partikel dalam keadaan *up* maka harga momen magnetik partikelnya $+\mu_o$, jika partikel dalam keadaan *down* maka momen magnetik partikelnya $-\mu_o$.



Gambar 3.1
Sistem N partikel dengan spin ½.

Bagaimanakah kita dapat menghitung harga momen magnetik total dari sistem ini?. Jika peluang partikel dalam keadaan up dapat dinyatakan dengan p, dan peluang partikel dalam keadaan down dapat dinyatakan dengan q (dengan p + q = 1).

Asumsi yang digunakan adalah tidak adanya interaksi massa antar partikel, partikel hanya mengalami gerak translasi saja. Namun orientasi spin partikel dapat mempengaruhi keadaan lainnya sehingga keadaan spin partikel setiap saat dapat berubah. Oleh karena itu untuk memperoleh gambaran momen magnetik total sistem kita memerlukan langkah-langkah perhitungan berikut ini.
Untuk mendapatkan harga momen magnetik total, maka kita akan menjumlahkan semua harga momen magnetik yang dimiliki oleh semua partikel yaitu:

$$M_T = \mu_{o1} + \mu_{o2} + \mu_{o3} + \mu_{o4} + \ldots\ldots\ldots + \mu_{oN}$$

$$M_T = \sum_{i=1}^{i=N} \mu_{oi} \qquad (3.7)$$

Mengingat sistem ini berprilaku dinamis, maka pengukuran yang memungkinkan untuk harga momen magnetik total lebih tepat dinyatakan dengan:

$$M_T = \overline{M} \pm \Delta M \qquad (3.8)$$

dimana M_T = harga momen magnetik total sistem.

$\overline{M}$ = harga total momen magnetik rata-rata.

ΔM = standar deviasi/simpangan .

Sehinggga kita memerlukan harga $\overline{M}$ dan ΔM, harga total momen magnetik rata-rata dapat dinyatakan dengan:

$$\overline{M} = \overline{\sum_{i=1}^{i=N} \mu_i} = \sum_{i=1}^{i=N} \overline{\mu_i} \qquad (3.9)$$

Mengingat setiap partikel memiliki dua keadaan dengan peluang p dan q, maka dalam bentuk yang lebih sederhana harga total momen magnetik rata-rata dapat dinyatakan dengan:

$$\overline{M} = N.\overline{\mu} = N\left(\sum_{i=1}^{i=2} P_i\mu_i\right) = N\left(p.\mu_o + q.(-\mu_o)\right) = (p-q)N\mu_o \qquad (3.10)$$

Besar simpangan momen magnetik totalnya dapat dinyatakan dengan

$$\Delta M = M - \overline{M} = \sum_{i=1}^{i=N}(\mu_i - \overline{\mu}) = \sum_{i=1}^{i=N}\Delta\mu_i \qquad (3.11)$$

Untuk data yang cukup besar kita akan menggunakan konsep standar deviasi. Standar deviasi didefinisikan sebagai rata-rata dari simpangan yang dituliskan dengan:

$$\underline{\Delta M} = \overline{\Delta M}.$$

Namun jika kita perhatikan

$$\underline{\Delta M} = \overline{\Delta M} = \overline{\sum_{i=1}^{N}\mu_i - \overline{\mu}} = \sum_{i=1}^{N}\overline{\mu} - \overline{\mu} = 0$$

Sehingga harga standar deviasinya menjadi :

$$\underline{\Delta M} = \sqrt{\overline{(\Delta M)^2}} \qquad (3.12)$$

Mengingat N adalah jumlah partikel dengan orde yang cukup besar maka kita menggunakan harga standar deviasi seperti pada persamaan (3.12) di atas, penyelesaian untuk kasus ini menjadi:

$$\overline{(\Delta M)^2} = \sqrt{\overline{(\Delta M)^2}}$$

$$(\Delta M)^2 = (\Delta M)(\Delta M) = \left(\sum_{i=1}^{i=N} \Delta\mu_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{i=N} \Delta\mu_i\right) = (\Delta\mu_{b1} + \Delta\mu_{b2} + \Delta\mu_{b3} + \ldots) \cdot (\Delta\mu_{b1} + \Delta\mu_{b2} + \Delta\mu_{b3} + \ldots)$$

$$(\Delta M)^2 = \left\{(\Delta\mu_{b1})^2 + (\Delta\mu_{b2})^2 + (\Delta\mu_{b3})^2 + \ldots + (\Delta\mu_{bN})^2\right\} + \left\{(\Delta\mu_{b1}\Delta\mu_{b2}) + (\Delta\mu_{b1}\Delta\mu_{b3}) + (\Delta\mu_{b1}\Delta\mu_{b4}) + \ldots + (\Delta\mu_{b1}\Delta\mu_{bN})\right\} +$$
$$\left\{(\Delta\mu_{b2}\Delta\mu_{b1}) + (\Delta\mu_{b2}\Delta\mu_{b3}) + (\Delta\mu_{b2}\Delta\mu_{b4}) + \ldots + (\Delta\mu_{b2}\Delta\mu_{bN})\right\} + \ldots + (\Delta\mu_{bN}\Delta\mu_{bN})$$

$$(\Delta M)^2 = \sum_{i=1}^{i=N} (\Delta\mu_{bi})^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} (\Delta\mu_{bi})(\Delta\mu_{bj}), \text{ dengan } i \neq j \text{ sehingga}$$

$$\overline{(\Delta M)^2} = \overline{\sum_{i=1}^{i=N} (\Delta\mu_{bi})^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{N}\sum_{j=1}^{N} (\Delta\mu_{bi})(\Delta\mu_{bj})} = \sum_{i=1}^{i=N} \overline{(\Delta\mu_{bi})^2} + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{i=N}\sum_{j=1}^{j=N} \overline{(\Delta\mu_{bi})(\Delta\mu_{bj})} = \sum_{i=1}^{i=N} \overline{(\Delta\mu_{bi})^2} \tag{3.13}$$

Sehingga dalam hal ini kita memerlukan harga standar deviasi untuk momen magnetik **partikel**, harga ini dapat diturunkan sebagai berikut:

$$\overline{(\Delta\mu)^2} = \sum_{i=1}^{i=2} P_i (\Delta\mu)^2 = p(\mu_o - \overline{\mu})^2 + q(-\mu_o - \overline{\mu})^2, \text{ dengan} \rightarrow \overline{\mu} = (p-q)\mu_o,$$

sehingga

$$\overline{(\Delta\mu)^2} = p(\mu_o - (p-q)\mu_o)^2 + q(-\mu_o - (p-q)\mu_o)^2$$
$$= p(2q\mu_o)^2 + q(-2p\mu_o)^2 = 4pq^2\mu_o^{\ 2} + 4qp^2\mu_o^{\ 2}$$
$$\overline{(\Delta\mu)^2} = 4pq\mu_o^{\ 2}(p+q) = 4pq\mu_o^{\ 2} \tag{3.14}$$

Mengingat harga standar deviasi untuk momen magnetik partikel adalah sama maka harga standar deviasi momen magnetik total dapat dirumuskan dengan lebih mudah:

$$\overline{(\Delta M)^2} = N\overline{(\Delta\mu_o)^2} = 4Npq\mu_o^{\ 2}$$
$$\Delta M = \sqrt{\overline{(\Delta M)^2}} = \sqrt{4Npq\mu_o^{\ 2}} = 2\mu_o\sqrt{Npq} \tag{3.15}$$

Sehingga harga moment magnetik total sistem dapat dinyatakan dengan :

$$M_T = (p-q)N\mu_o \pm 2\mu_o\sqrt{Npq} \tag{3.16}$$

3.4 Distribusi Gauss / Distribusi Normal

Perhatikan kembali persamaan distribusi binomial yang diperlihatkan oleh persamaan (3.4), apabila N sangat besar maka perhitungan probabilitas P(n) terlihat sulit karena membutuhkan perhitungan faktorial yang sangat besar. Karena kesulitan inilah, memungkinkan kita untuk menggunakan aproksimasi sehingga diperoleh bentuk persamaan yang sederhana dari persamaan (5.1) tersebut untuk kasus N yang sangat besar seperti yang diperlihatkan oleh persamaan berikut:

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ Npq}} e^{-(n-Np)^2/2Npq} \tag{3.17}$$

dimana: nilai rata-rata: $\bar{n} = Np$

standar deviasi: $\underline{\Delta} = \sqrt{Npq}$

Persamaan di atas menunjukkan distribusi Gauss.

Contoh Soal

1. Sebuah koin mata uang bergambar angka (A) dan gambar(G) dilempar 400 kali. Tentukan probabilitas memperoleh 215 gambar (G) !

   Jawab :

   Dari persamaan distribusi Gauss:

   $$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\ Npq}} e^{-(n-Np)^2/2Npq}$$

   dimana:

   P(A)= ½ , dan P(G) = ½.

   $\bar{n} = np = 400.\frac{1}{2} = 200$; $\sigma = \sqrt{400.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}} = 10$.

   Maka diperoleh:

   $$P(215) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} e^{-(215-200)^2 / 2.100}$$

= 0.013.

2. Sebuah sistem terdiri dari N partikel dengan spin ½ (interaksi antar partikel dalam sistem sangat lemah ≡ sistem ideal). Momen magnetik partikel dinyatakan dalam μ_o, harga probabilitas partikel dalam keadaan *up* dan *down* dinyatakan oleh p dan q dengan menggunakan persamaan $P(M)dM = P''(M)\frac{dM}{2\mu_o}$ dan aproksimasi Gaussian untuk harga N yang besar, turunkan aproksimasi Gaussian untuk probabilitas P(M)dM yang momen magnetik total dari sistemnya mempunyai nilai antara M dan M+dM.

   Jawab:

   P”(M)=P’(m)=P(n)

   Dari aproksimasi Gaussian diperoleh:

$$P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta n}\exp\left[-\tfrac{1}{2}\left(\frac{n-\overline{n}}{\underline{\Delta n}}\right)^2\right]$$

   dimana:

   $\overline{M} = N(p-q)\mu_o$; $\underline{\Delta}M = 2\sqrt{Npq}\mu_o$

   maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$P(M) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\underline{\Delta}M}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{M-\overline{M}}{\underline{\Delta}M}\right)^2\right]$$

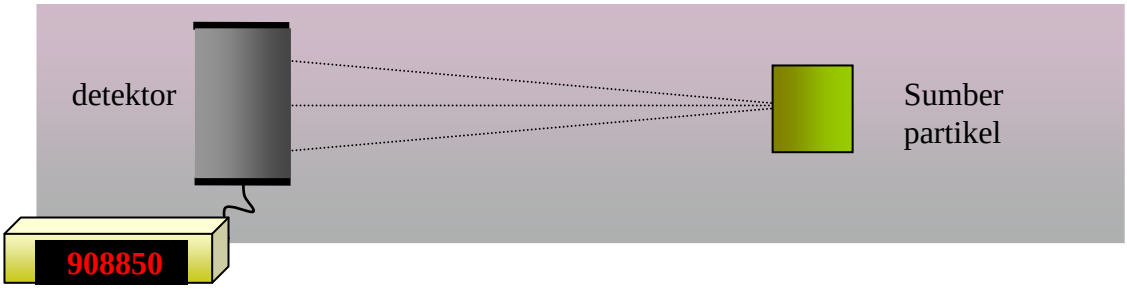
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}2\sqrt{Npq}\mu_o}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{M-N(p-q)\mu_o}{2\sqrt{Npq}\mu_o}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2\mu_o\sqrt{2\pi Npq}}exp\left[-\frac{\left(M-N(p-q)\mu_o\right)^2}{8Npq\mu_o^{\,2}}\right]$$

3.5 Distribusi Poisson

Apabila N keadaan yang ditinjau sangat besar tetapi memiliki peluang (p) sangat kecil maka persamaan distribusi binomial di atas dengan menggunakan aproksimasi akan diperoleh persamaan distribusi poisson. Distribusi poisson ini merupakan suatu sistem distribusi yang berkaitan dengan variabel kontinu, misalnya variabel waktu.

Tinjau kasus di bawah ini, dimana sebuah sumber partikel memancarkan partikel yang kemudian ditangkap oleh sebuah detektor.

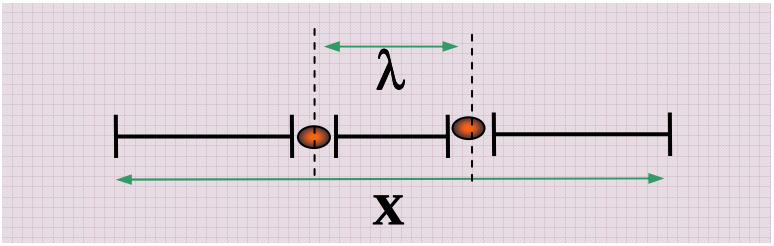


Gambar 3.2

Skema pancaran partikel yang diterima oleh detektor

Peristiwa ini merupakan salah satu contoh distribusi poisson karena waktu pengamatan berjalan secara kontinu, sedangkan partikel yang dipancarkan oleh sumber merupakan variabel diskrit yang dapat dihitung secara digital. Bagaimanakah kita dapat menentukan peluang untuk mendapatkan partikel dalam sistem yang seperti ini?

Kita tinjau sistem berikut ini, misal kita amati jalannya dua partikel yang berurutan selama penyinaran maka akan terlihat :



Gambar 3.3
Posisi hamburan dua partikel berturut-turut terhadap waktu

Dari gambar, X adalah lamanya pengamatan dan λ adalah selang waktu antara partikel yang berdekatan. Yang menjadi bahasan dalam distribusi Poisson adalah bagaimana menentukan gambaran peluang untuk mendapatkan n partikel dalam selang waktu tertentu (X)?

Sebagai gambaran, kalau dalam selang waktu dx ditemukan partikel maka harga peluangnya dapat dinyatakan dengan perbandingan $P_n(dx/\lambda)$, sedangkan kalau tidak ditemukannya partikel dalam selang (x + dx) dinyatakan dengan: $P_0\left(\frac{x+dx}{\lambda}\right)$.

Jika dalam selang dx ada 1 partikel, maka peluang untuk menemukan 1 partikel dalam selang dx adalah 1, sehingga $P_1\left(\frac{dx}{\lambda}\right)=1$. Maka pernyataan peluang tidak menemukan 1 partikel dalam selang dx menjadi $P_0(dx/\lambda)=(1-(dx/\lambda))$ dan peluang tidak menemukan partikel dalam selang x menjadi $P_0\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

Sehingga untuk menggambarkan peluang tidak ditemukannya partikel dalam selang waktu (x+dx):

$$P_o\left[\frac{x+dx}{\lambda}\right]=P_o\left[\frac{x}{\lambda}\right]\left[1-\frac{dx}{\lambda}\right] \tag{3.18}$$

Dalam deret Taylor, dimisalkan:

$$f(x) = P_o\left(x/\lambda\right)$$

$$f(x+dx) = f(x) + \frac{f'(x)}{1!}dx + \frac{f''(x)}{2!}d^2x + \ldots$$

Dengan mengambil dua suku pertama, maka diperoleh:

$$P_o\left(\frac{x+dx}{\lambda}\right) = P_o\left(x/\lambda\right) + \frac{dP_o\left(x/\lambda\right)}{dx}dx \qquad (3.19)$$

Dari persamaan (3.18) dan (3.19) diperoleh:

$$P_o\left(x/\lambda\right) - P_o\left(x/\lambda\right)\frac{dx}{\lambda} = P_o\left(x/\lambda\right) + \frac{d}{dx}P_o\left(x/\lambda\right)dx$$

$$-\frac{dx}{\lambda} = \frac{d\left\{P_o\left(x/\lambda\right)\right\}}{P_o\left(x/\lambda\right)}$$

$$-\frac{x}{\lambda} = \ln P_o\left(x/\lambda\right)$$

$$P_o\left(\frac{x}{\lambda}\right) = Ce^{-x/\lambda}$$

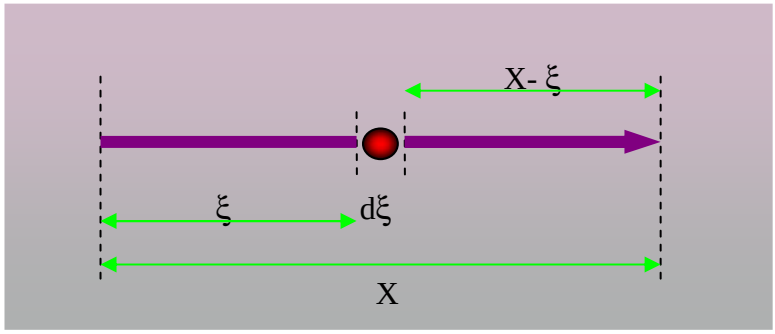
Jika dalam waktu X = 0, berarti belum ada partikel yang dipancarkan sehingga peluang untuk tidak menemukan partikel dalam selang waktu X adalah 1 maka akan diperoleh:

$$1 = C.e^0$$

dan didapatkan C = 1, sehingga:

$$P_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) = e^{-x/\lambda} \qquad (3.20)$$

Persamaan di atas merupakan peluang untuk tidak menemukan partikel dalam selang waktu X pengamatan. Bagaimana mengetahui peluang untuk menemukan 1 partikel dalam selang waktu X pengamatan?. Perhatikan gambar berikut:



Gambar 3.4

Ilustrasi munculnya satu buah partikel dalam waktu X pengamatan

Perhatikan ada tiga keadaan untuk menggambarkan kondisi ini:

1. Peluang tidak ditemukannya partikel dalam selang ξ maka:

$$P_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) = e^{-x/\lambda}$$

2. Peluang ditemukannya partikel dalam selang dξ:

$$P_1\left(\frac{d\xi}{\lambda}\right)$$

3. Peluang tidak ditemukannya partikel dalam selang (x-ξ) maka:

$$P_0\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) = e^{-(x-\xi)/\lambda}$$

Karena waktu adalah suatu variabel yang kontinu maka peluang untuk menemukan 1 partikel dalam selang X dinyatakan dengan:

$$P_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \int_0^x e^{\frac{-\xi}{\lambda}}\left(\frac{d\xi}{\lambda}\right) e^{\frac{-(x-\xi)}{\lambda}}.$$

$$P_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \int_0^x e^{\frac{-x}{\lambda}}\left(\frac{d\xi}{\lambda}\right).$$

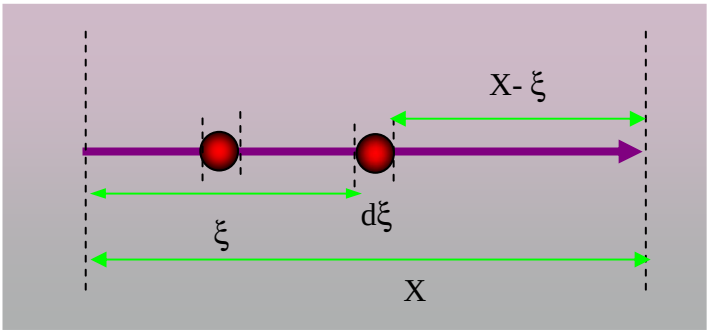
Karena $e^{\frac{x}{\lambda}}$ dan λ adalah konstanta, maka:

$$P_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{e^{\frac{-x}{\lambda}}}{\lambda}\xi\Big|_0^x = \frac{x.e^{\frac{-x}{\lambda}}}{\lambda}$$

Jadi peluang untuk menemukan 1 partikel dalam selang waktu X dinyatakan dengan:

$$P_1\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{x.e^{\frac{-x}{\lambda}}}{\lambda} \tag{3.21}$$

Sekarang akan diturunkan bagaimana mencari peluang menemukan 2 partikel dalam selang X. Terlebih dahulu perhatikan gambar berikut:



Gambar 3.4

Ilustrasi munculnya dua buah partikel dalam waktu X pengamatan

Dengan gambaran yang sama, maka kita akan mendapatkan 3 keadaan sebagai berikut:

1. Peluang ditemukannya 1 partikel dalam selang ξ adalah

$$P_1\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \frac{\xi.e^{\frac{-\xi}{\lambda}}}{\lambda}$$

2. Ditemukannya 1 partikel dalam selang dξ menjadi

$$P_1\left(\frac{\xi}{\lambda}\right)$$

3. Peluang tidak ditemukannya partikel dalam selang (x-ξ):

$$P_0\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right) = e^{-(x-\xi)/\lambda}$$

Maka peluang untuk menemukan 2 partikel dalam selang waktu x adalah :

$$P_2\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\int_0^x \frac{\xi}{\lambda}e^{\frac{-\xi}{\lambda}}.\left(\frac{d\xi}{\lambda}\right).e^{\frac{-(x-\xi)}{\lambda}}$$

$$P_2\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\frac{e^{-\frac{x}{\lambda}}}{\lambda^2}\int_0^x \xi d\xi=\frac{e^{\frac{-x}{\lambda}}}{2\lambda^2}\xi^2\Big|_0^x=\frac{x^2.e^{\frac{-x}{\lambda}}}{\lambda^2.2}$$

$$P_2\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\frac{x^2.e^{\frac{-x}{\lambda}}}{2.\lambda^2} \qquad (3.22)$$

Dengan cara yang sama, cobalah anda temukan persamaan untuk mendapatkan 3 partikel dalam selang X pengamatan !

Cocokan hasil anda

$$P_3\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\frac{1}{6}.\left(\frac{x}{\lambda}\right)^3.e^{-\frac{x}{\lambda}} \qquad (3.23)$$

Dari persamaan di atas maka dapat diperoleh bahwa peluang untuk menemukan n partikel dalam selang waktu x adalah

$$\boxed{P_n\left(\frac{x}{\lambda}\right)=\frac{1}{n!}.\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n.e^{-\frac{x}{\lambda}}} \qquad (3.24)$$

Contoh soal

1. Buktikan bahwa distribusi ini ternormalisasi yaitu $\sum_n P(n) = 1$

   Jawab:

$$P_n\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n e^{-\frac{x}{\lambda}}$$

$$= e^{-\frac{x}{\lambda}} \sum_n \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n$$

   Ingat bahwa $e^{\frac{x}{\lambda}} = 1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 + \ldots$

$$e^{\frac{x}{\lambda}} = \sum_n \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n,$$

   maka persamaan diatas dapat ditulis :

$$p\left(\frac{x}{\lambda}\right) = e^{-\frac{x}{\lambda}}.e^{\frac{x}{\lambda}} = 1$$

2. Anggap bahwa kesalahan ketik yang dilakukan oleh seorang juru ketik terjadi secara acak. Misalkan sebuah buku dengan tebal 600 halaman terdiri dari 600 kesalahan ketik. Dengan menggunakan distribusi poisson, hitung probabilitas:

   a. sebuah halaman tidak terdapat kesalahan ketik !

   b. sebuah halaman terdapat kesalahan ketik paling sedikit tiga !

   Jawab:

   a. N = 600; P = 1/600

   sehingga diperoleh:

$$\frac{x}{\lambda} = 600x1/600 = 1$$

Dari persamaan distribusi Poison akan didapatkan :

$$P_0(1) = \frac{1}{0!}(1)^0 e - 1 = 0{,}367.$$

b. $P_0(1) = 0{,}367$; $P_1(1) = 0{,}367$; $P_2(1) = 0{,}184$

maka akan diperoleh :

$$P_{>3}(1) = 1 - (P_0(1) + P_1(1) + P_2(1))$$
$$= 1-(0{,}367 + 0{,}367 + 0{,}184)$$
$$= 0{,}08.$$

Soal Latihan

1. Jika dalam waktu 3 detik suatu sumber partikel memancarkan partikel dengan 31 partikel/detik, tentukan peluang 3 partikel dalam selang waktu tersebut!
2. a. Jelaskan apa dimaksud dengan Ensambel statistik!

   b. Dalam pembahasan Fisika Statistik, ada 3 informasi penting yang akan memberikan spesifikasi makroskopik. Sebutkan dan jelaskan ketiga informasi tersebut!
3. Suatu sistem terdiri dari banyak ruangan dengan jumlah total partikel *N* dan jumlah partikel dalam sistem yang ditinjau adalah *n*. Jika *p* adalah kemungkinan untuk mendapatkan satu ruangan yang ditinjau dan *q* adalah kemungkinan untuk mendapatkan ruangan lainnya. Buktikan :

   $$P_n = {}_N C_n . p^n . q^{N-n} \,!$$

   dengan P_n adalah kemungkinan mendapatkan *n* ruangan yang diinginkan.
4. Sebuah elektron bergerak sepanjang sumbu x seperti gambar dalam selang a ≤ x ≤ 4a dan amplitudo gelombang elektron tersebut adalah ψ(x)= c.x. Tentukan kemungkinan untuk mendapatkan elektron pada daerah 2a ≤ x ≤ 3a !

5. Dalam suatu sistem yang volumenya V_o dengan jumlah molekulnya *N* terdapat sistem lain yang akan ditinjau volumenya adalah Δ*V* dan jumlah molekulnya adalah *n*. Jika *p* adalah kemungkinan untuk mendapatkan molekul pada daerah yang ditinjau dan *q* adalah kemungkinan untuk mendapatkan molekul pada daerah yang lain, tentukan jumlah rata-rata molekul berada pada daerah yang kita tinjau!
6. Sistem gas N_2 berada dalam kesetimbangan menempati sebuah kotak tembaga yang berada dalam temperatur kamar. Energi rata-rata yang dimiliki partikel gas yang berada dekat dengan dinding diasumsikan sama dengan energi rata-rata partikel tembaga yaitu $\bar{e} = \frac{1}{2} m\bar{v}^2$. Setiap partikel tembaga bergetar harmonik sederhana, jika $E_p = E_k$, massa jenis tembaga 8,9 gr/cm^3 dan berat atom tembaga 63,5. Tentukan:

a. Kecepatan rata-rata gerakan atom tembaga dalam kesetimbangan!

b. Jarak antar partikel terdekat!

c. Besar gaya yang bekerja tiap satuan luas, jika gaya tarik yang bekerja pada penampang kotak A menyebabkan pertambahan panjang kotak Δl, dapat dinyatakan dengan : $F/A = \gamma \Delta i/i$ dengan γ adalah modulus young = $1{,}28.10^{12}$ dyne/cm^2, gaya tersebut menyebabkan pergeseran atom sejauh x.

d. Besar energi potensial yang menyebabkan atom bergeser sejauh x!

7. Di dalam sebuah tabung berisi gas ideal dengan N jumlah partikel dalam keadaan setimbang dengan volume V_o. Dengan mengambil n partikel dalam subruang V maka dapat dinyatakan probabilitas untuk mendapatkan partikel dalam subruang V yang dinyatakan dengan $P = V/V_o$, tentukan:

   a. Nilai rata-rata banyaknya partikel dalam subruang V (nyatakan dalam N, V dan V_o)!

   b. Standar deviasi Δn!

   c. Standar deviasinya jika $V << V_o$

8. Suatu bangunan terdiri dari 20 ruang, dimana terdapat 8 ruang jenis A, 4 ruang jenis B, 5 ruang jenis C dan sisanya D. Ruang A dan ruang B berkarakteristik x, ruang C dan ruang D berkarakteristik y, kemudian disebarkan 6 partikel. Tentukan peluang untuk mendapatkan bangunan yang berkarakteristik xy dengan 3 partikel di ruang A, dan 1 partikel di ruang D!

9. a. Dalam mengungkapkan sifat-sifat makroskopik suatu sistem ada 2 metode yang digunakan yaitu metode thermodinamika dan metode fisika statistik. Jelaskan masing-masing tersebut!

   b. Jelaskan dimana kegagalan metode thermodinamika dalam menjelaskan sifat makroskopik suatu sistem, mengapa metode mekanika statistik dapat menjelaskannya!

10. Tinjau sebuah inti yang memiliki spin 1. Komponen momen magnetik μ sepanjang arah tertentu dapat memiliki tiga kemungkinan nilai, yaitu $+\mu_0$, 0, $-\mu_0$. Misalkan bentuk intinya tidak simetri bola melainkan elipsoidal. Akibatnya, inti cenderung lebih menyukai orientasi tertentu yaitu sumbu mayornya sejajar dengan arah tertentu dalam kristal padat dimana inti tersebut berada. Sehingga terdapat probabilitas p dimana $\mu = \mu_0$, dan probabilitas p dimana $\mu = -\mu_0$, probabilitas untuk $\mu = 0$ adalah $1-2p$.
    a. Hitunglah $\overline{\mu}$ dan $\overline{\mu^2}$!
    b. Hitunglah $\overline{(\Delta\mu)^2}$!
    c. Misalkan bahwa zat padat yang ditinjau memiliki N inti yang interaksinya dengan yang lain dapat diabaikan. Anggap M menyatakan komponen momen magnetik total sepanjang arah tertentu dari semua inti dalam zat padat tersebut. Hitunglah $\overline{M}$ dan deviasi standarnya $\underline{\Delta M}$ dalam bentuk N, p dan μ_0.

11. Elektron bermuatan e diemisikan secara acak dari sebuah filamen panas pada sebuah tabung vakum. Sebagai pendekatan, emisi satu elektron tertentu tidak mempengaruhi emisi elektron yang lain. Tinjau selang waktu sangat singkat Δt. Kemudian terdapat probabilitas p dimana sebuah elektron diemisikan dari filamen selama selang waktu tersebut. (dan probabilitas $q = 1 - p$ dimana elektron tidak teremisikan). Karena Δt sangat singkat, probabilitas elektron teremisi p selama selang waktu ini sangat kecil ($p \ll 1$) dan probabilitas lebih dari satu elektron yang teremisikan selama selang waktu Δt dapat diabaikan. Tinjau sembarang selang waktu t yang lebih besar dari Δt. Selama selang waktu ini terdapat $N = t / \Delta t$ kemungkinan selang waktu Δt dimana elektron dapat diemisikan. Muatan total yang diemisikan dalam selang waktu t dapat ditulis sebagai:

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + \ . \ . \ . + q_n$$

Dimana q_i menyatakan muatan yang diemisikan selama selang waktu Δt ke i; sehingga $q_i = e$ jika sebuah elektron diemisikan dan $q_i = 0$ jika tidak.

a. Hitunglah muatan rata-rata $\overline{Q}$ yang diemisikan filamen selama selang waktu t?

b. Hitunglah dispersi muatan $\overline{(\Delta Q)^2}$ yang diemisikan filamen selama selang waktu t? Gunakan pendekatan p<<1 untuk menyederhanakan solusinya.

c. Arus I yang diemisikan filamen selama selang waktu t didefinisikan oleh Q/t. Hubungkan dispersi arus $\overline{(\Delta I)^2}$ dengan arus rata-rata $\bar{I}$, buktikan bahwa

$$\overline{(\Delta I)^2} = \frac{e}{t}\bar{I}$$

d. Hitunglah deviasi standar arus $\underline{\Delta I}$ jika arus rata-ratanya I = 1 μA dan selang waktu pengukurannya 1 detik.

12. Sebuah batrei dengan ggl total V dihubungkan dengan sebuah resistor R. Akibatnya, sejumlah daya $P = V^2/R$ didisipasikan pada resistor tersebut. Batrei tersebut terdiri dari N buah sel individu yang disusun secara seri sehingga V merupakan penjumlahan dari ggl seluruh sel individu. Kondisi batrei sudah cukup lama sehingga tidak semua sel individu berada dalam kondisi sempurna. Sehingga terdapat probabilitas p dimana ggl dari tiap sel individu memiliki nilai yang normal v; dan probabilitas (1 – p) dimana ggl dari tiap sel individu nol karena telah terjadi konsleting. Tiap sel individu tidak saling berkaitan satu dengan yang lain (statistically independent). Pada kondisi seperti ini, hitunglah daya rata-rata P yang didisipasikan dalam resistor. Nyatakan solusinya dalam N, v, p, dan R.

13. Sebuah molekul pada gas bebas bergerak dalam tiga dimensi. Misalkan **s** menyatakan perpindahannya setelah tumbukan berurutan dengan molekul yang lain. Perpindahan molekul setelah tumbukan berurutan tidak saling berkaitan (statistically independent). Kemudian, karena tidak ada arah tertentu yang lebih disukai oleh molekul dalam ruang, molekul bergerak acak sehingga perpindahan rata-ratanya $\bar{\mathbf{s}} = 0$ (rata-rata tiap komponen

perpindahan $\bar{s}_x = \bar{s}_y = \bar{s}_z = 0$). Perpindahan total **R** molekul setelah mengalami N tumbukan berturut-turut dapat dituliskan sebagai:

$$\mathbf{R} = \mathbf{s_1} + \mathbf{s_2} + \mathbf{s_3} + \ldots\ldots\ldots + \mathbf{s_N}$$

dimana $\mathbf{s}_i$ menyatakan perpindahan ke i dari molekul.

a. Hitunglah perpindahan total rata-rata $\overline{\mathbf{R}}$ dari molekul setelah mengalami N kali tumbukan berturut-turut.

b. Hitunglah standar deviasi $\underline{\Delta R} = \overline{\left(\mathbf{R} - \overline{\mathbf{R}}\right)^2}$ dari perpindahan ini setelah molekul mengalami N kali tumbukan berturut-turut.

c. Hitunglah $\underline{\Delta R}$ jika besar tiap perpindahan **s** sama dengan l.