Application of Physics to Finance and Economics: Quantum Field Theory in Forward Rates and Hedging

Arif Hidayat[1], Nidaul Hidayah[2] Bram Hadianto[3]
[1]Department of Physics Education, UPI (Universitas Pendidikan Indonesia) Bandung -Indonesia
[3]FPOK UPI (Universitas Pendidikan Indonesia) Bandung -Indonesia
[2]Department of Economics, Universitas Kristen Maranatha Bandung-Indonesia
insanarifhidayat@yahoo.com

Abstract

Quantum theory in physics is used to model secondary financial markets. Contrary to stochastic description, the formalism emphasizes the importance of trading in determining the value of security. All possible realization of investors holding securities and cash is as the basis of the Hilbert space of market states. The asymptotic volatility of a stock related to long-term probability that is traded. This paper investigates volatility of forward rates in secondary financial market. In recent formulation of a quantum field theory of forward rates, the volatility of the forward rates was taken to be deterministic. The field theory of the forward rates is generalized to the case of stochastic volatility. Two cases are analyzed, firstly when volatility is taken to be a function of forward rates, and secondly when volatility is taken to be an independent quantum field. Since volatility is a positive quantum field, the full theory turns out to be an interacting non-linear quantum field in two dimensions. The state space and Hamiltonian for the interacting theory are obtained, and shown to have a nontrivial structure due to the manifold move with constant velocity. The no arbitrage condition and hedging is reformulated in terms of the Hamiltonian of the system, and then solved for the nonlinear interacting case.

Keywords : volatility, forward rates, quantum field theory, arbitrage.

Abstraksi

Teori Medan Kuantum dalam fisika digunakan untuk memodelkan pasar finansial sekunder. Berbeda dengan deskripsi stokastik, perumusan menggunakan teori medan kuantum menekankan pada pentingnya aktifitas perdagangan dalam menentukan nilai dari suatu sekuritas. Semua kemungkinan yang dapat mempengaruhi investor dan keuangan merupakan basis dalam Runga Hilbert dari keadaan pasar. Asimptotis volatilitas menunjukkan probabilitas jangka panjang dari saham dan produk derivatif yang diperdagangkan. Makalah ini membahas mengenai volatilitas laju kontrak forward (*forward rates*) dalam pasar sekunder. V*olatilitas forward rates* pada teori sebelumnya telah ditinjau sebagai suatu variabel yang deterministik. Teori medan kuantum dalam paper ini kemudian dikaji generalisasinya untuk kasus volatilitas yang stokastik. Kemudian dianalisis dua kasus: pertama ketika volatilitas ditinjau sebagai fungsi dari *forward rates*, dan yang kedua meninjau volatilitas sebagai suatu medan kuantum yang independen. Karena volatilitas teori medan kuantum bernilai positif, maka teori yang seluruhnya berlaku adalah interaksi non-linier teori medan kuantum dua dimensi. Diperoleh deskripsi ruang keadaan dan Hamiltonian untuk interaksinya dan menunjukkan memiliki suatu struktur non-trivial selama manifold bergerak dengan kecepatan konstan. Kemudian dirumuskan juga Hamiltonian sistem untuk keadaan tanpa arbitrase dan hedging (lindung nilai) kemudian dipecahkan secara eksak untuk kasus interaksi non-linier.

Kata kunci: volatilitas, *forward rates*, teori medan kuantum, arbitrase, *hedging*.

1. PENDAHULUAN

Terdapat tujuh instrumen dalam pasar modal yaitu saham, obligasi, obligasi konvertibel, *rights*, warran, reksadana, serta *aset back securities*. Disamping itu ada pula instrumen deriatifnya meliputi *options* (baik yang berbasif *forward* ataupun yang berbasis *futures*) serta swap. Makalah ini akan menekankan kepada *forward* valuta asing. Kontrak *forward* di pasar valuta asing terjadi antara suatu bank dengan nasabahnya (mungkin juga sesama bank) untuk mensepakati pengiriman pada tanggal tertentu, sejumlah mata uang, dan kursnya ditetapkan pada waktu kontrak disepakati.

Semakin besar nilai valuta (aset) yang di-*forward*-kan maka akan semakin tinggi kemungkinan perbedaan dengan harga eksekusi (baik itu naik ataupun turun), inilah yang kemudian banyak disebut sebagai volatilitas. Volatilitas paling sering menjadi referensi dalam hal standar devasi dari perubahan nilai instrumen keuangan terhadap waktu. Volatilitas juga dapat menggambarkan tingkat resiko keuangan pada suatu masa tertentu. Untuk instrumen yang mengikuti *Gaussian Random Walk* dan Proses Weiner maka volatilitas akan naik seiring dengan bertambahnya waktu. Secara konsep, hal ini terjadi karena seiring bertambahnya waktu maka bertambah pula kemungkinan harga instrumen keuangan itu bergerak menjauh dari harga mula-mula.

Forward rates, dengan volatilitasnya, merupakan salah satu aspek yang esensi dalam pasar hutang (*debt market*) serta banyak di pakai dalam hal finansial, terutama untuk kontrak finansial jangka panjang sampai masa jatuh tempo tertentu (maturitas) dan juga digunakan dalam mekanisme *hedging* (lindung nilai). Model mengenai *forward rates* yang digunakan umum selama ini adalah model *Heath-Jarrow-Morton* (HJM) [1], dan pada perkembangannya ada sejumlah cara dimana model HJM ini digeneralisasi. Dalam referensi [2] dan [3] telah diperkenalkan mengenai korelasi antara *forward rates* dengan maturitas yang bervariasi, dan pada [4], [5] *forward rates* dimodelkan sebagai suatu string stokastik.

Penerapan teknik-teknik fisika dalam finansial [6] [7] telah dibuktikan bermanfaat dalam aplikasinya, khususnya penggunaan teknik integral lintasan dalam berbagai masalah finansial [8]. Dalam [9], teknik integral lintasan telah dapat diterapkan dalam mempelajari suatu produk sekuritas dengan volatilitas stokastik. Dalam [10], model HJM digeneralisir dengan meninjau *forward rates* sebagai suatu medan kuantum. Studi empiris yang dilakukan oleh [11] menunjukkan bahwa model teori medan kuantum untuk *forward rates* ketika dibandingkan dengan data pasar ternyata cocok.

Volatilitas *forward rates* merupakan suatu perhitungan yang sentral guna menentukan derajat fluktuasi *forward rates*. Dalam model yang dipelajari di [10] volatilitas yang diambil dalam *forward rates* merupakan variabel yang deterministik. Pertanyaan kemudian muncul seiring dengan perkembangan fakta bahwa volatilitas sesungguhnya merupakan suatu kuatitas random yang selalu berfluktuasi. Sifat Random volatilitas ini kemudian dapat menentukan sejauh mana volatilitas berfluktuasi. Data pasar untuk eurodullar *futures* menyajikan suatu perhitungan yang akurat untuk *forward rates* dan untuk imbal baliknya (yield) juga merupakan fungsi random dari volatilitas *forward rates*.

Fluktuasi dalam *forward* rate dalam [17] berkisar 10% dan ini cukup signifikan. Dari hal tersebut disiimpulkan bahwa volatilitas *forward rates* butuh untuk ditinjau sebagai suatu medan kuantum (string kuantum) yang selalu berfluktuasi. Pembahasan mendalam mengenai hal ini telah dilakukan oleh model HJM [1] yang kemudian dikembangkan lebih lanjut oleh [12] untuk menghitung volatilitas stokastik. Amin dan Ng [13] mempelajari data pasar dari opsi *Eurodollar* untuk memperoleh implikasi dari laju *forward rates* yang volatilistik, sementara Bouchaud [14] menganalisis laju volatilitas dari *forward rates* untuk kontrak *futures*. Kedua referensi itu kemudian menyimpulkan bahwa banyak hal-hal di dalam pasar, khususnya volatilitas stokastik dari kurva *forward rates*, yang tidak dapat dijelaskan dengan model HJM.

Model tentang *forward rates* yang diajukan dalam [10] adalah model teori medan kuantum yang diajukan Baaquie [17], yang merupakan generalisasi dari model HJM dan memungkinkan untuk mengembangkan model ini guna menentukan volatilitas stoksatik *forward rates*. Berlawanan dengan teori medan kuantum, perumusan *forward rates* sebagai suatu string stokastik di [4], [5] tidak dapat dikembangkan dalam kasus volatilitas adalah stokastik selama hambatan-hambatan non linearitas tidak ditangani secara baik.

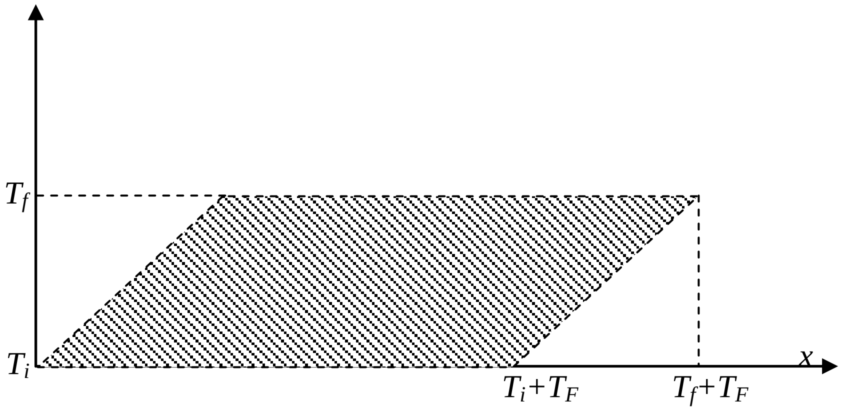
2. TEORI MEDAN KUANTUM UNTUK FORWARD RATES DENGAN VOLATILITAS STOKASTIK

Forward rates sendiri terdiri atas sekumpulan laju bunga untuk kontrak berjangka yang mulai berlaku pada waktu t untuk jatuh tempo pada waktu $x > t$. Pada saat tertentu t, kontrak berjangka ini akan eksis dalam pasar *forward rates* untuk selang waktu T_{FR} di masa mendatang; Sebagai contoh, jika t mengacu ada waktu sekarang, kemudian *forward rates*nya akan berlangsung dalam selang waktu t_0 sampai dengan waktu t_0+T_{FR}. Dalam pasar T_{FR} biasanya maksimal 30 tahun. Umumnya, pada saat t, semua *forward rates* akan eksis sampai pada waktu $t+T_{FR}$ [10]. *Forward rates* pada waktu t dilambangkan dengan $f(t,x)$, dengan $t < x < t + T_{FR}$ yang kemudian di sebut dengan kurva *forward rates*.

Karena pada waktu sesaat t terdapat banyak *forward rates* maka hal ini mirip dengan kuantum string (non relativistik) sehingga dibutuhkan sejumlah variabel independen dalam mendeskripsikan evolusi acaknya. Kuantitas yang dapat mendeskripsikan secara generik adalah sistem medan kuantum[15]. Untuk memodelkan *forward rates* dan obligasi, dalam makalah ini digunakan studi teori medan kuantum dua dimensi dalam domain euclidian berhingga. Ketika meninjau *forward rates* $f(t,x)$ sebagai suatu medan kuantum; maka $f(t,x)$ diambil sebagai suatu variabel independen yang acak untuk tiap x dan tiap t. Sebagai penyederhanaan notasi maka ditinjau kedua x dan t adalah kontinu dan pendiskritisasian parameter ini hanya dilakukan ketika perlu untuk mendiskusikan evolusi waktu dari sistem untuk yang lebih detail.

2.1. *LAGRANGIAN FORWARD RATES* DENGAN VOLATILITAS DETERMINISTIK

Pertama akan dibahas secara singkat tentang pentingnya teori medan *forward rates* dengan volatilitas deterministik. Sebagai bentuk konkretnya, misalkan *forward rates* di mulai dari waktu T_i sampai pada masa mendatang di $t = T_f$. Karena semua *forward rates* $f(t,x)$ selalu untuk masa mendatang, maka dalam hal ini $x > t$, oleh karena itu medan kuantum $f(t,x)$ didefinisikan sebagai medan dengan domain berbentuk jajaran genjang $\mathcal{P}$ yang dibatasi oleh garis-garis sejajar $x = t$ dan $x = T_{FR} + t$ dalam arah sumbu maturitas ; serta garis $t = T_i$ dan $t = T_f$ dalam arah sumbu waktu sebagaimana digambarkan dalam gambar 3.1. dibawah ini:



Gambar 3.1. Domain $\mathcal{P}$ Forward Rates

Setiap titik dalam domain $\mathcal{P}$ merepresentasikan suatu variabel integrasi $f\left(t,x\right)$ yang independen.

Interpretasi teori medan pada evolusi *forward rates* sebagaimana dinyatakan dalam domain $\mathcal{P}$ yaitu suatu string kuantum (non-relativistik) yang berpindah dengan satuan kecepatan dalam arah *x*.

Dari model HJM, *forward rates* memiliki kecepatan *drift* $\alpha\left(t,x\right)$ dan volatilitas $\sigma\left(t,x\right)$, dan kedua kuantitas ini akan tampak dalam persamaan *Lagrangian* untuk *forward rates*. Guna mendefiniskan *Lagrangian*, pertama kita membutuhkan suku kinetik, yang dilambangkan dengan $\mathcal{L}_{\text{kinetik}}$, guna mendefinisikan standar waktu evolusi *forward rates*.

Guna mendefinisikan Lagrangian maka perlu diperkenalkan suku lain sebagai gangguan yang merubah bentuk *forward rates* dalam arah sumbu *x*. Analogi dengan hal ini dalam string biasa adalah suku potensial dalam *Lagrangian* yang membuat bentuk runcing dalam string, karena bentuk string sendiri sebenarnya mengandung suku potensial.

Untuk memodelkan sifat-sifat yang mirip dengan string pada *forward rates*, tidak dapat menggunakan suku turunan $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$ dalam *Lagrangian*nya, karena hal ini hanya berlaku pada kondisi tanpa kehadiran arbitrase saja. Kondisi tanpa arbistrase diperlukan ini agar *Lagrangian* mengandung suku turunan dengan orde yang lebih tinggi, khususnya suku dengan bentuk $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\right)^2$; yang mirip dengan sistem string yang memiliki rigiditas berhingga. Istilah seperti ini dalam Lagrangian *forward rates* dinamakan $\mathcal{L}_{\text{rigiditas}}$ dengan parameter baru μ, diberikan oleh $\frac{1}{\mu^2}$, yang menunjukkan kuantitas fluktuasi dari *forward rates* terhadap waktu dalam arah sumbu *x*. Jika diberlakukan limit $\mu \to 0$, akan diperoleh hasil yang sama dengan model HJM, yang juga akan mirip dengan string dengan rigiditas tak hingga.

Aksi dari *forward rates* diberikan oleh persamaan :

$$S[f] = \int_{T_i}^{T_f} dt \int_t^{t+T_{FR}} dx \mathcal{L}[f] \tag{1}$$

$$\equiv \int_{\mathcal{P}} \mathcal{L}[f] \tag{2}$$

Dengan rapat *Lagrangian* $\mathcal{L}[f]$diberikan oleh :

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}_{kinetik}[f] + \mathcal{L}_{rigiditas}[f] \tag{3}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} - \alpha(t,x)}{\sigma(t,x)}\right\}^2 + \frac{1}{\mu^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} - \alpha(t,x)}{\sigma(t,x)}\right)\right\}^2\right]$$

$$-\infty \le f(t,x) \le +\infty \tag{4}$$

Adanya suku kedua dalam persamaan aksi yang diberikan persamaan (3) tidak dicantumkan dalam [14] ketika kondisinya tanpa arbitrase, dan studi empiris yang dilakukan [11] menguatkan bukti bahwa suku ini merupakan suku evolusi *forward rates*. Singkatnya, menurut [11] *forward rates* berlaku seperti string kuantum, dengan ruang dan waktu bergantung kepada kecepatan drift $\alpha(t,x)$, massa efektifnya diberikan oleh $\frac{1}{\sigma(t,x)}$, dan rigiditas string sebanding dengan $\frac{1}{\mu^2}$.

Karena teori medan didefinisikan dalam dalam domain $\mathcal{P}$, maka perlu untuk menspesifikasi syarat batas untuk seluruh empat batas jajaran genjang tersebut.

a. Kondisi Terikat Dirichlet (awal dan akhir)

Syarat batas awal dan akhir untuk kondisi Dirichlet dalam arah sumbu t diberikan oleh :

$$T_i(T_f) < x < T_i(T_f) + T_{FR} \quad : f(T_i, x), \quad f(T_f, x) \tag{5}$$

yang meliputi kurva *forward rates* dari awal sampai akhir.

b. Kondisi Bebas Neumann

Dalam menspesifikasi syarat batas dalam arah sumbu *x*, perlu menganalisis aksi yang diberikan oleh persamaan (1) guna menentukan bahwa dalam kondisi itu aksi tidak mengandung suku permukaan. Analisis ini kemudian menghasilkan kondisi Neumann dengan versi sebagai berikut :

$$T_i < t < T_f \quad , \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} - \alpha(t,x)}{\sigma(t,x)}\right) = 0 \tag{6}$$

dan

$$x = t \text{ atau } \quad x = t + T_{FR} \tag{7}$$

Forward rates dalam teori medan kuantum didefinisikan oleh Integral Lintasan Feynmann dengan mengintegrasikan terhadap semua konfigurasi yang mungkin, dan hasil untuk $f(t,x)$ adalah:

$$Z = \int D f \, e^{S[f]} \tag{8}$$

$$\int D f = \prod_{(t,x)\in \mathcal{P}} \int_{-\infty}^{+\infty} df(t,x) \tag{9}$$

Perhatikan bahwa $e^{S[f]}/Z$ adalah probabilitas untuk konfigurasi medan yang berbeda yang terjadi ketika dibentuk integral fungsional $f(t,x)$.

2.2 *Lagrangian Forward Rates* dengan Volatilitas Stokastik

Untuk menyatakan fungsi volatlitas $\sigma(t,x)$ stokastik, dalam formalisme teori medan kuantum perlu untuk menaikkan $\sigma(t,x)$ dari fungsi yang deterministik ke dalam fungsi yang random. Ada dua cara yang dapat digunakan guna menaikkan volatilitas menjadi kuantitas yang stokastik, yaitu:

a. Meninjau volatilitas sebagai suatu fungsi dari *forward rates* $f(t,x)$
b. Meninjau volatlitas sebagai suatu medan kuantum yang independen

dalam makalah ini akan dikaji kemungkinan keduanya.

2.2.1. Volatilitas sebagai Fungsi *Forward Rates*

Dalam [13] telah diindikasikan bahwa volatilitas sebenarnya merupakan fungsi dari *forward rates*. Model standar menggunakan pendekatan ini dengan persamaan volatilitas secara ringkas diberikan oleh :

$$\sigma(t,x)\,,\ f(t,x) = \sigma_0(t,x)\ f^{\nu}(t,x) \tag{10}$$

dengan

$$\sigma_0(t,x) \text{ adalah fungsi deterministik} \tag{11}$$

karena volatilitas $\sigma(t,x) > 0$, maka $f(t,x)$ juga >0, berlawanan dengan persamaan (4), diperoleh:

$$f(t,x) = f_0\, e^{\phi(t,x)} > 0 \quad ; \quad -\infty \le \phi(t,x) \le +\infty \tag{12}$$

dengan $f(t,x) > 0$ karena *forward rates* di pasar finansial selalu positif dan hal ini akan dipakai dalam perhitungan selanjutnya. Dengan limit $\mu \to 0$ dalam persamaan (10) akan menghasilkan cakupan volatilitas model HJM.

Adapun pandangan-pandangan empiris volatilitas sebelumnya menurut [13] diberikan dalam tabel 3.1. berikut:

Model	**Volatilitas**
Ho dan Lee (1986)	$\sigma(t,x,f(t,x)) = \sigma_0$
CIR (1985)	$\sigma(t,x,f(t,x)) = \sigma_0\ f^{\frac{1}{2}}(t,x)$
Courtadon (1982)	$\sigma(t,x,f(t,x)) = \sigma_0\ f(t,x)$
Vasicek (1997)	$\sigma(t,x,f(t,x)) = \sigma_0 \exp(-\lambda(x-t))$
Heath-Jarrow-Morton / HJM (1992)	$\sigma(t,x,f(t,x)) = [\sigma_0 + \sigma_1(x,t),\ f(t,x)]$

Tabel 3.1. Berbagai Rumusan Volatilitas

Makalah ini akan membahas bentuk umum *Lagrangian* dalam persamaan (3) untuk kasus *forward rates* yang selalu positip. Interpretasi *Lagrangian* dalam persamaan (3) akan valid jika semua *forward rates* mendekati nilai tertentu f_0. Oleh karena itu menghasilkan persamaan:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = f_0 e^{(t,x)} \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} \tag{13}$$

$$\approx f_0 \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} + O\left(\phi^2\right) \tag{14}$$

oleh karena itu dibuat mapping sebagai berikut:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} \rightarrow f_0 \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} \tag{15}$$

Persamaan (3) kemudian digeneralisir menjadi :

$$\mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}_{kinetik}[\phi] + \mathcal{L}_{rigiditas}[\phi]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{f_0 \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} - \alpha(t,x)}{\sigma_0(t,x)e^{v\phi(t,x)}}\right\}^2 + \frac{1}{\mu^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_0 \frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} - \alpha(t,x)}{\sigma_0(t,x)e^{v\phi(t,x)}}\right)\right\}^2\right] \tag{16}$$

nantinya dalam penurunan Hamiltonian- sistem akan memerlukan perhitungan dengan solusi trivial dalam integrasinya

Fungsi Partisi didefinisikan secara teori oleh Integral Lintasan Feynmann sebagai berikut:

$$Z = \int D\phi \;\; f^{-v} e^{S[\phi]} \tag{17}$$

$$\int D\phi \;\; f^{-v} \;\; \equiv \prod_{(t,x)\in P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\phi(t,x) \;\; f^{-v}(t,x) \tag{18}$$

dengan syarat batas yang diberikan untuk $f(t,x)$ dalam persamaan (5) dan (6) tetap berlaku untuk mempertahankan volatilitas stokastik dalam *Lagrangian* di persamaan (16).

2.2.2. Volatilitas sebagai Suatu Medan Kuantum yang Independen

Sekarang akan dibahas asumsi yang kedua, yaitu jika volatilitas $\sigma_0(t,x)$ ditinjau sebagai suatu medan kuantum yang independen. Karena hanya dapat menentukan efek dari volatilitas pada *forward rates*, maka seluruh efek-efek dari volatilitas stokastik akan dimanifestasikan hanya melalui perilaku *forward rates* saja.

Guna penyederhanaan, ditinjau *forward rates* sebagai suatu medan kuantum sebagaimana dalam persamaan (4), dengan:

$$f(t,x): -\infty \le f(t,x) \le +\infty \tag{19}$$

karena fungsi volalititas $\sigma_0(t,x)$ selalu positif, yaitu $\sigma_0(t,x) > 0$ maka diperkenalkan sebuah medan kuantum lain $h(t,x)$dengan hubungan sebagai berikut :

$$\sigma_0(t,x) = \sigma_0\, e^{-h(t,x)}, \qquad -\infty \le h(t,x) \le +\infty \tag{20}$$

tanda – (negatif) diambil bertujuan untuk meyakinkan secara notasi saja.

Sekarang sistem terdiri atas dua medan kuantum yang saling berinteraksi, dinamakan dengan $f(t,x)$dan $h(t,x)$ serta mengikuti aturan-aturan sebagai berikut :

- Parameter ξ adalah kuantitas yang menentukan bahwa medan $h(t,x)$ tidak deterministik. Suatu Limit $\xi \to 0$ akan membekukan semua fluktuasi medan $h(t,x)$ dan mereduksinya menjadi fungsi yang deterministik.
- Parameter κ berfungsi mengendalikan fluktuasi $h(t,x)$ dalam arah sumbu *x*, yang hal ini sama dengan parameter μ yang mengendalikan fluktuasi dari *forward rates* $f(t,x)$dalam arah sumbu *x* juga.
- Parameter ρ dengan: $-1 \le \rho \le +1$ adalah kuantitas korelasi medan kuantum *forward rates* $f(t,x)$dengan medan kuantum volatilitas $h(t,x)$.
- Suku *drift* dari volatilitas dinamakan $\beta(t,x)$, dimana analog dengan suku *drift* $\alpha(t,x)$ untuk *forward rates*.

Lagrangian untuk sistem yang berinteraksi di sini tidak unik, artinya ada sejumlah pilihan yang dapat memenuhi kondisi di atas. Suatu *Lagrangian* yang mungkin untuk sistem yang berinteraksi dituliskan dengan analogi *Lagrangian* untuk kasus volatilitas stokastik pada sekuritas tunggal di [9], yaitu :

$$L = -\frac{1}{2(1-\rho)^2}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial t}-\alpha}{\sigma} - \rho\frac{\frac{\partial h}{\partial t}-\beta}{\xi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t}-\beta}{\xi}\right)^2 - \frac{1}{2\mu^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial t}-\alpha}{\sigma}\right)\right)^2 - \frac{1}{2\kappa^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t}-\beta}{\xi}\right)^2\right) \tag{21}$$

dengan persamaan aksi :

$$S[f,h] = \int_{\mathcal{P}} \mathcal{L} \tag{22}$$

disini perlu untuk menspesifikasi syarat batas bagi sistem yang berinteraksi. Kondisi awal dan akhir dari *forward rates* $f(t,x)$ yang diberikan oleh persamaan (5) tetap dipertahankan untuk kasus sistem yang berinteraksi, dan untuk medan volatilitas syarat batasnya mirip, sebagai berikut :

a. Syarat Batas Terikat Dirichlet (awal dan akhir)

Nilai awal dispesifikasi dari data sebagai berikut:

$$T_i\left(T_f\right) < x < +T_{FR}\,,\ \sigma(T_i,x), \sigma(T_f,x) \tag{23}$$

yang berlaku khusus kurva volatlitas awal dan akhir.

Syarat batas dalam arah sumbu *x* untuk *forward rates* $f(t,x)$ sebagaimana dalam persamaan (6) tetap dipertahankan pada kasus sistem yang berinteraksi, dan untuk medan volatilitas syaratnya sebagai berikut :

b. Syarat Batas Bebas Neumann

$$T_i < x < T_f\ ;\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h(t,x)}{\partial t} - \beta(t,x)\right) = 0 \tag{24}$$

$$;x = t \text{ atau } x = t + T_{FR} \tag{25}$$

untuk keperluan kuantisasi medan volatilitas $\sigma(t,x)$, syarat batas *forward rates* $f(t,x)$ yang diberikan oleh persamaan (6) sebenarnya tidak biasa. Guna memecahkan kondisi tanpa arbitrase, ditemukan bahwasanya α merupakan fungsional berbentuk kuadratik dari medan volatilitas $\sigma(t,x)$. Oleh karena itu syarat batas dalam persamaan (6) sesungguhnya adalah bentuk interaksi antara medan $f(t,x)$ dan medan $h(t,x)$.

Dalam hal ini perlu mendefinisikan perhitungan integrasi untuk medan $h(t,x)$. Hamiltonian untuk sistem yang berinteraksi adalah sebagai berikut :

$$\int D\, f\, D\, \sigma^{-1} \;=\; \prod_{(t,x)\in\mathcal{P}} \int_{-\infty}^{+\infty} df(t,x)\, d\sigma^{-1}(t,x) \tag{26}$$

$$\prod_{(t,x)\in\mathcal{P}} \int_{-\infty}^{+\infty} df(t,x)\; dh(t,x) e^{h(t,x)} \tag{27}$$

Fungsi partisi teori medan kuantum untuk *forward rates* dengan volatilitas stokastik didefinisikan oleh Integral Lintasan Feynmann sebagai berikut :

$$Z \;=\; \int D\, f\, D\, \sigma^{-1} \tag{28}$$

Nilai pasar yang diamati oleh suatu instrumen keuangan, disebut $O[f,h]$, menyatakan nilai rata-rata instrumen keuangan yang melingkupi semua nilai-nilai yang mungkin dari medan kuantum $f(t,x)$ dan $h(t,x)$ -dinotasikan dengan $\langle\; O[f,h]\;\rangle$-, dengan rapat probabilitas diberikan oleh aksi (yang telah dinormalisasi) dengan simbol :

$$< O[f,h] > = \frac{1}{Z}\int D\, f\;\; D\sigma^{-1}\; O[f,h] e^{S[f,h]} \tag{29}$$

Jika ditinjau limitnya volatilitas akan terseduksi menjadi fungsi yang deterministik, dimana untuk limit ini nilai ξ, ρ dan $\kappa \to 0$. Suku kinetik medan $h(t,x)$ dalam aksi di persamaan (22) memiliki limit :

$$\lim_{\xi\to 0} \prod_{t,x\in\mathcal{P}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_{\mathcal{P}} \left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t} - \beta}{\xi} \right)^2 \right\} \to \prod_{t,x\in\mathcal{P}} \delta\left(\frac{\partial h}{\partial t} - \beta \right) \tag{30}$$

yang mengimplikasikan bahwa:

$$< \sigma(t,x) > = \sigma_0 < e^{-h(t,x)} > \tag{31}$$

$$= \sigma_0 \exp\left\{-\int_{t_0}^{t} dt' \ \beta(t', x)\right\} + O(\xi, \kappa, \rho) \qquad (32)$$

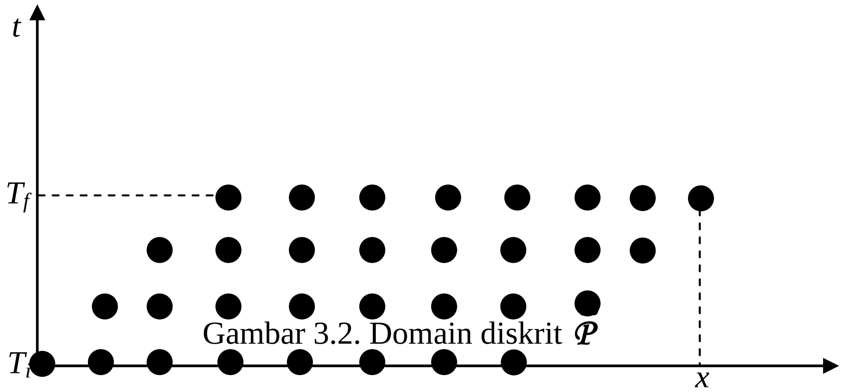
2.3. Hamiltonian dan Ruang Keadaan

Integral Lintasan Feynmann yang diberikan di persamaan (17) dan (18) berfungsi untuk menghitung nilai ekspektasi dari medan kuantum. Guna mempelajari evolusi waktu dari kuantitas-kuantitas laju bunga, maka perlu untuk menurunkan Hamiltonian sistem dari persamaan *Lagrangian*nya. Cara yang ditempuh dalam makalah ini akan berlawanan dengan cara [9], dimana dalam [9] *Lagrangian* untuk harga saham dengan volatilitas stokastik justru diturunkan dari Hamiltonian sistemnya.

Ruang keadaan dari teori medan adalah ruang keadaan vektor linier, yang dinotasikan dengan $\mathcal{V}$, terdiri atas sejumlah fungsional medan konfigurasi pada waktu terikat *t* [9]. Dua ruang keadaan dari $\mathcal{V}$ –dinotasikan dengan $\mathcal{V}_{\text{rangkap}}$- terdiri atas semua pemetaan linier dari $\mathcal{V}$ menjadi bilangan kompleks, yang juga merupakan ruang vektor linier. Tinjau sebuah elemen $\mathcal{V}$ dinotasikan oleh $|g\rangle$ dan sebuah elemen $\mathcal{V}_{\text{rangkap}}$ dinotasikan oleh $\langle p|$; maka $\langle p|g\rangle$ adalah suatu bilangan kompleks. Dalam hal ini ditinjau $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{V}_{\text{rangkap}}$ sebagai ruang keadaan suatu sistem. $\mathcal{H}$, operator Hamiltonian –yang dalam kuantum analog dengan energi- adalah sebuah elemen tensor produk ruang $\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}_{rangkap}$. Matriks elemen $\mathcal{H}$ adalah bilangan kompleks yang diberikan oleh $\langle p|g\rangle$.

Dalam kasus ini, akan dipelajari lebih lanjut mengenai ruang keadaan dan Hamiltonian *forward rates*. Untuk mudahnya notasi ditinjau medan kuantum *forward rates* $f(t, x)$ memenuhi medan kuantum $f(t, x)$ dan $h(t, x)$. Karena *Lagrangian* di persamaan (21) merupakan turunan pertama terhadap waktu saja, maka akan ada sebuah generator infinitesimal yang disebut dengan hamiltonian $\mathcal{H}$. Merumuskan hamiltonian untuk *forward rates* adalah hal yang sulit karena domain $\mathcal{P}$ memiliki struktur non-trivial, dan medan kuantum *forward rates* akan memiliki ruang keadaan yang berbeda-beda untuk tiap waktu sesaat *t*.

Untuk mengatasinya, perlu mendiskritisasi baik *t* dan *x* dalam suatu kisi yang berhingga, dengan ruang kisi meliputi arah *t* dan *x* dinotasikan dengan $\in$ (untuk sebuah string yang bergerak dengan kecepatan ν, maturitas kisi akan berjarak $\in \nu$). Dalam kisi ini, waktu minimum suatu kontrak berjangka dinotasikan dengan waktu $\in$; dan untuk aplikasinya $\in = 1$ hari. Domain yang baru $\tilde{\mathcal{P}}$ adalah sebagai berikut:



Gambar 3.2. Domain diskrit $\mathcal{P}$

Definisi diskrit dari domain $\tilde{\mathcal{P}}$ diberikan oleh :

$$(t,x) \rightarrow \in (n,l) \text{ dengan } n,l \text{ integer} \tag{33}$$

$$(T_i, T_f, T_{FR}) \rightarrow \in (N_i, N_f, N_{FR}) \tag{34}$$

$$\text{kisi } \tilde{\mathcal{P}} = \{(n,l) | N_i \le n \le N_f : n \le l \le (n + N_{FR})\} \tag{35}$$

$$f(t,x) \rightarrow f_{n,l} \tag{36}$$

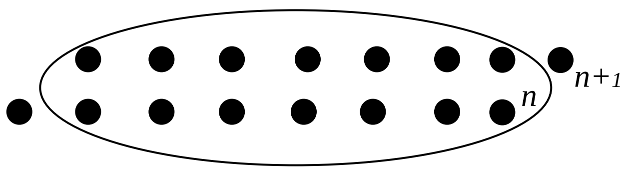
$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} \approx \frac{f_{n+1,l} - f_{n,l}}{\in} ; \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} \approx \frac{f_{n,l+1} - f_{n,l}}{\in} \tag{37}$$

fungsi partisinya sekarang berupa integral lipat berhingga yang dinamakan:

$$Z = \prod_{(n,l)\in \tilde{P}} \int df_{n,l} \, e^{S[f]} \tag{38}$$

$$S = \sum_n S(n) \tag{39}$$

Sekarang tinjau dua irisan kisi yang berdekatan yang diberi label n dan $n+1$ sebagaimana ditunjukkan dalam gambar 3.3 dibawah ini. $S(n)$ adalah aksi yang berkaitan dengan *forward rates* pada dua irisan waktu ini.



Gambar 3.3.Potongan dua kisi untuk $t = n\varepsilon$ dan $t = (n+1)\varepsilon$

Dapat dilihat dalam Gambar 3.3, untuk 2 irisan kisi waktu ini ada dua tempat kisi di sudut yang tidak sebanding, kisi pada lokasi kisi (n, n) pada waktu *n* dan $(n+1, n+1+N_{FR})$ pada waktu $n+1$ tidak umum. Kita akan mengisolasi variabel yang tidak sebanding ini sebagai berikut:

Variabel-variabel pada waktu *n* berlaku:

$$\{f_{n,n}\ ,\tilde{F}_n\}; \qquad \tilde{F}_n \equiv \{f_{n+1,l} | n \le l \le n + N_{FR}\} \tag{40}$$

Variabel-variabel yang berada pada waktu $(n+1)$berlaku :

$$\{F_n, f_{n+1,n+1+N_{FR}}\}; \qquad F_n \equiv \{f_{n+1,l} | n+1 \le l \le n+1+N_{FR}\} \tag{41}$$

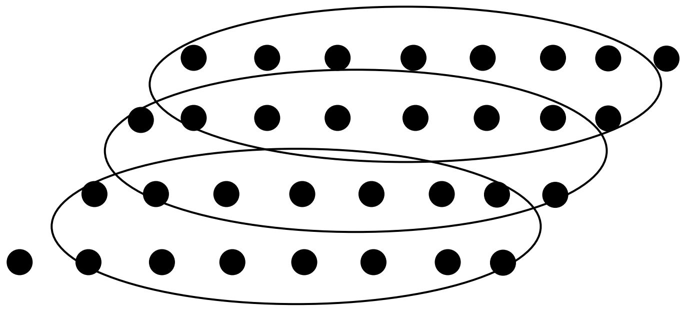
Perhatikan bahwasanya meskipun variabel F_n mengacu kepada waktu $(n+1)$, tetapi tetap diarahkan labelnya dengan waktu sebelumnya untuk pembuktian lebih lanjut. Dari gambar 3.3, sejumlah variabel F_n dan $\tilde{F}_n$ melingkupi lokasi kisi yang sama dalam arah *x* yaitu pada $n+1 \le l \le n + N_{FR}$, dan oleh karena itu memiliki jumlah *forward rates* yang sama yang dinamakan $N_{FR} - 1$. Hamiltonian akan dapat diekspresikan dalam ungkapan variabel-variabel ini.

Dari turunan diskrit waktu yang didefinisikan di pers (37), aksi diskrit $S(n)$ mengandung suku-suku yang berpasangan karena adanya titik-titik bersama dalam kisi untuk 2 irisan kisi waktu yang nama-nama variabelnya dimiliki oleh sejumlah $\tilde{F}_n ; F_n$. Untuk itu aksinya adalah:

$$S(n) = \in \sum_{\{l\}} \mathcal{L}_n \left[f_{n,l}\ ,\ f_{n+1,l} \right] \tag{42}$$

$$S(n) = \in \sum_{\{l\}} \mathcal{L}_n \left[\tilde{F}_n ; F_n \right] \tag{43}$$

sebagaimana ditunjukkan dalam gambar 3.4, aksi untuk seluruh domain $\tilde{\mathcal{P}}$ yang ditunjukkan oleh gambar 3.2 dapat dibangun dengan mengulang konstruksi di gambar 3.3 dan menjumlahkan seluruh aksi $S(n)$ terhadap semua waktu $N_i \le n \le N_f$.



Gambar 3.4. Merupakan rekonstruksi kisi dari dua irisan waktu

Hamiltonian dari *forward rates* adalah sebuah operator yang bekerja pada ruang keadaan *forward rates*; oleh karena itu perlu untuk menentukan koordinat-koordinat dari ruang keadaannya.

Tinjau lagi 2 irisan waktu yang berurutan *n* dan *n+1* dari Gambar 3.4. Sekarang interpretasikan 2 *forward rates* sesaat pada 2 irisan waktu yang berurutan, $\{f_{n,n}, \tilde{F}_n\}$ dan $\{F_n, f_{n+1,n+1+N_{FR}}\}$ yang diberikan di persamaan (40) - yang tampak dalam persamaan aksi di (42)- sebagai koordinat ruang keadaan $\mathcal{V}$ dan $\mathcal{V}_{\text{dual}}$

Untuk tiap waktu sesaat *n*, ada sejumlah ruang keadaan $\mathcal{V}_n$ dan $\mathcal{V}_{\text{rangkap, n}}$. Koordinat-kordinat ruang keadaan $\mathcal{V}_n$ dan $\mathcal{V}_{\text{n+1}}$ diberikan oleh tensor produk dari ruang keadaan untuk setiap titik maturitas *l*, yang dinamakan:

$$\langle \tilde{f}_n | = \bigotimes_{n \le l \le n+N_{FR}} \langle f_{n,l} | \equiv \langle f_{n,n} | \langle \tilde{F}_n | \qquad (44)$$

yaitu koordinat keadaan untuk $\mathcal{V}_{\text{rangkap}, n}$

$$| f_{n+1} \rangle = \bigotimes_{n+1 \le l \le n+1+N_{FR}} | f_{n+1,l} \rangle \equiv | F_n \rangle | f_{n,n+1+N_{FR}} \rangle \qquad (45)$$

yaitu koordinat keadaan untuk $\mathcal{V}_{n+1}$

Vektor keadaan $|F_n\rangle$ milik yang ruang keadaan $\mathcal{V}_{\text{n+1}}$, tapi kembali diinterpretasikan bahwa $|F_n\rangle$ sebagai ruang keadaan $\mathcal{F}_n$ pada waktu sebelum *n*, maka dari interpretasi ini dapat dipelajari sistem secara sesaat menggunakan formalisme Hamiltonian. Ruang keadaan $\mathcal{V}_n$ terdiri dari semua unsur kemungkinan fungsi N_R *forward rates* $\{f_{n,n}, \tilde{F}_n\}$. Ruang keadaan $\mathcal{V}_n$ ini berbeda untuk tiap *n* yang berbeda, karena sejumlah *forward rates* berisi sejumlah variabel yang independen.

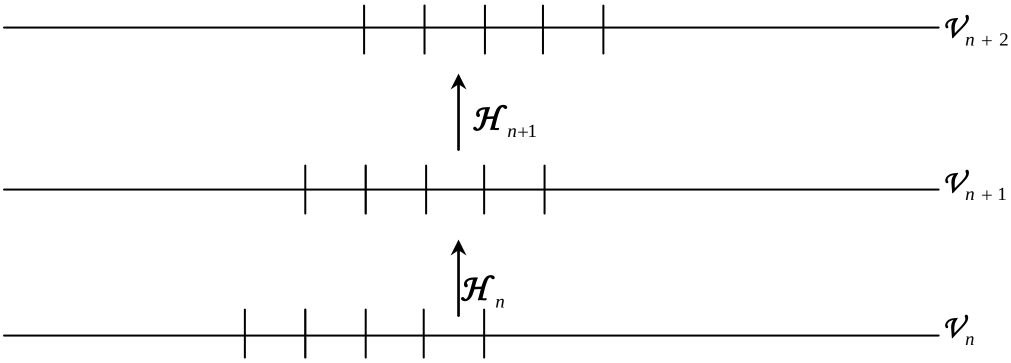
Meskipun ruang keadaan $\mathcal{V}_n$ dan $\mathcal{V}_{n+1}$ tidak identik, ada suatu irisan dua ruang ini yang disebut $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}_{n+1}$ yang melingkupi interval yang sama dalam arah maturitas, dan terkopel oleh aksi $S(n)$. Irisan ini menghasilkan sebuah ruang keadaan $\mathcal{F}_n$ dimana didalamnya berlangsung Hamiltonian evolusi *forward rates*. Dalam simbol-simbolnya, kita memiliki :

$$\mathcal{V}_{n+1} = \mathcal{F}_n \otimes \left| f_{n+1,\, n+1+N_{FR}} \right\rangle \tag{46}$$

$$\mathcal{V}_{rangkap,n} = \left\langle f_{n.n} \right| \otimes \mathcal{F}_{rangkap,n} \tag{47}$$

$$\mathcal{H}_n \quad : \quad \mathcal{F}_n \ \rightarrow \ \mathcal{F}_n \Rightarrow H_n \in \ \mathcal{V}_{rangkap,n} \otimes \mathcal{V}_{n+1} \tag{48}$$

Hamiltonian $\mathcal{H}_n$ adalah elemen produk tensor ruang yang dilingkupi oleh operator $\left|F_n\right\rangle\left\langle \tilde{F}_n\right|$, penamaan operator ruang diberikan oleh $\mathcal{F}_n \otimes \mathcal{F}_{rangkap,n}$. Ruang vektor $\mathcal{V}_n$ dan Hamiltonian $\mathcal{H}_n$ bekerja pada ruang seperti ditunjukkan dalam Gambar 3.5 berikut



Gambar 3.5. : Propagasi Hamiltonian $\mathcal{H}_n$ dalam Ruang *Forward rates* $\mathcal{V}_n$

Perhatikan bahwa kedua keadaan $\left|\left|F_n\right\rangle\right\rangle$ dan $\left|\tilde{F}_n\right\rangle$ memiliki ruang keadaan yang sama $\mathcal{F}_n$**,** dan dengan menggunakan aturan putar untuk mengindikasikan dua keadaan ini berbeda; sebagai contoh dua keadan $\left|f\right\rangle$ dan $\left\langle f\right|$ mengidikasikan bahwa satu keadaan adalah rangkap dari keadaan lainnya.

Setelah dikaji semua kemungkinan nilai *forward rates* dan $\hat{f}$, maka sekarang perlu untuk mengkaji basis lengkap dari ruang keadaan $\mathcal{V}_n$, terutama operator untuk $\mathcal{V}_n$, dilambangkan I_n yang merefleksikan bahwa basis ruang keadaan adalah lengkap. Persamaannya menurut [9] diberikan oleh:

$$\mathcal{I}_n = \prod_{n \le l \le n+N_{FR}} \int df_{n,l} \left| f_n \right\rangle \left\langle f_n \right| \tag{49}$$

$$\equiv \int df_{n,n} \; . \; d\tilde{F}_n \left| f_{n,n} ; \tilde{F}_n \right\rangle \left\langle f_{n,n} ; \tilde{F}_n \right| \tag{50}$$

Hamiltonian sistem $\mathcal{H}$ didefinisikan oleh Formulasi Feynmann (sampai di normalisasi) dari persamaan (42), yaitu:

$$\rho_n \, e^{\in \sum_{\{l\}} \mathcal{L}_n [f_{n,l} \; , \; f_{n+1+l}]} = \left\langle f_{n,n} \, , \tilde{F}_n \right| e^{-\in \mathcal{H}_n} \left| F_n \, , \, f_{n+1, n+1+N_{FR}} \right\rangle \tag{51}$$

dimana secara umum ρ_n adalah suatu suku medan independen. Dengan menggunakan sifat aksi diskrit yang diberikan di persamaan (43), kita peroleh:

$$\rho_n \, e^{\in \sum_{\{l\}} \mathcal{L}_n [F_n \; , \; \tilde{F}_n]} = \left\langle f_{n,n} \, , \tilde{F}_n \right| e^{-\in \mathcal{H}_n} \left| F_n \, , \, f_{n+1, n+1+N_{FR}} \right\rangle \tag{52}$$

$$= \left\langle \tilde{F}_n \right| e^{-\in \mathcal{H}_n} \left| F_n \right\rangle \tag{53}$$

Berangkat dari persamaan (50) ke persamaan (53) ternyata hubungan irisan kisi waktu n dan $n+1$ masing-masing tidak mengandung variabel $f_{n,n}$ dan $f_{n+1+N_{FR}}$. Hal ini menjadikan Hamiltonian tidak bergantung pada variabel-varibel ini. Interpretasi persamaan (53) adalah bahwa Hamiltonaian mempropagasi keadaan awal $\left\langle \tilde{F}_n \right|$ dalam waktu $\in$ menjadi keadaan akhir $\left| F_n \right\rangle$. Perhatikan hubungan ini:

$$\left\langle f_{n,n} \, , \tilde{F}_n \right| e^{-\in \mathcal{H}_n} \left| F_n , \, f_{n+1, n+1+N_{FR}} \right\rangle = \left\langle \tilde{F}_n \right| e^{-\in \mathcal{H}_n} \left| F_n \right\rangle \tag{54}$$

menunjukkan bahwa ada suatu asimetri dalam arah waktu, dengan Hamiltonian masih tidak bergantung pada *forward rates* paling awal $f_{n,n}$ di keadaan mula-mula dan *forward rates* terakhir $f_{n+1+N_{FR}}$ di keadaan akhir. Inilah asimetri dalam propagasi *forward rates* yang menghasilkan domain jajaran genjang $\tilde{\mathcal{P}}$ di gambar 3.2, dan merefleksikan bahwa *forward rates* $f(t,x)$ hanya eksis untuk $x > t$.

Guna penyederhanaan notasi, mulai sekarang digunakan notasi kontinu kembali, khususnya ruang keadaan dilabelkan dengan $\mathcal{V}_t$, vektor keadaan oleh $|f_t\rangle$. Elemen dari ruang keadaan *forward rates* $\mathcal{V}_t$ mencakup semua instrumen keuangan yang diperdagangkan di pasar pada waktu *t*. Dalam notasi kontinu dari persamaan (45) diperoleh:

$$|f_t\rangle = \bigotimes_{t\le x\le t+T_{FR}} |f(t,x)\rangle \tag{55}$$

$$|F_t\rangle = \bigotimes_{t\le x\le t+T_{FR}} |f(t,x)\rangle \tag{56}$$

dalam notasi kontinu, perbedaan antara vektor keadaan $|f_t\rangle$ dan $|F_t\rangle$ hanya di persamaan (56), yaitu saat titik $x = t$ tidak termasuk dalam tensor produk untuk yang kontinu.

Fungsi pastisi ***Z*** yang diberikan di persamaan (38) dapat direkonstruksi dari Hamiltonian dengan menerapkan secara rekursif prosedur yang dibahas untuk dua irisan kisi waktu yang berurutan. Maka untuk notasi kontinu kita peroleh:

$$Z = \int D\ f\, e^{S[f]} \tag{57}$$

$$= \langle f_{mula-mula} |\, \mathcal{T} \left\{ \exp\left(-\int_{T_i}^{T_f} \mathcal{H}_t\, dt \right) \right\} | f_{akhir}\rangle \tag{58}$$

dimana simbol $\mathcal{T}$ dalam persamaan diatas berkedudukan sebagai operator waktu (*non-commut*) dalam argument, dengan waktu paling mula-mula diletakkan di kiri.

2.3.1. Vektor Keadaan Obligasi

Vektor keadaan yang paling penting dalam keuangan adalah kupon obligasi biasa dan obligasi tanpa bunga (*zero coupon bonds*). Tinjau sebuah obligasi tanpa bunga bebas resiko yang jatuh tempo (maturitas) pada waktu *T* dengan pembayaran sebesar $1. Harga obligasi pada waktu $t < T$ t diberikan oleh :

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,x)dx} \equiv P[f;t,T] \tag{59}$$

vektor keadaan $|P(t,T)\rangle$ adalah sebuah elemen ruang keadaan $\mathcal{V}_t$. vektor keadaan saham dapat dituliskan sebagai berikut:

$$P(t,T) \equiv \langle f_t | P(t,T)\rangle \tag{60}$$

$$= e^{-\int_t^T f(x)dx} \tag{61}$$

vektor keadaan yang lain adalah kupon obligasi biasa $|\mathcal{B}\rangle$ dengan pembayaran sejumlah c_l pada saat T_l, dan pembayaran akhir *L* pada waktu *T*. Vektor keadaan obligasi biasa adalah superposisi linier dengan *zero coupon bond* dan diberikan oleh persamaan:

$$|\mathcal{B}(t)\rangle = \sum_l c_l |P(t,T_l)\rangle + L|P(t,T)\rangle \tag{62}$$

2.4. Hamiltonian untuk *Forward Rates* dengan Volatilitas Stokastik

Sebelumnya telah diperoleh persamaan umum untuk Hamiltonian dan ungkapan suku aksi *S* sebagaimana dalam persamaan (53), dan perlu untuk menerapkan formula ini dalam kasus khusus Largangian *forward rates* guna memperoleh persamaan Hamiltoniannya secara eksplisit. Dari persamaan (53) diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\rho_n e^{S(n)} = e^{\in\sum_{\{l\}}\mathcal{L}_n[H_n, \tilde{H}_n; F_n, \tilde{F}_n]} \tag{63}$$

$$= \langle \tilde{F}_n ; \tilde{H}_n | e^{-\in\mathcal{H}_n} | F_n ; H_n \rangle \tag{64}$$

dimana dalam persamaan diatas secara eksplisit sudah memuat volatilitas medan kuantum $h(t,x)$.

Untuk penyederhaan notasi, tinjau sumbu arah *x* maturitas adalah kontinu, dan tinjau hanya waktu yang diskrit. Dalam notasi kontinu keberadaan variabel waktu *t* dan $t+\in$ dihitung dan di analisis variabel yang tampak pada batas interval $[t \le x \le t + T_{FR}]$. Aksi $S(n)$ untuk $t = n\in$ sebagai berikut:

$$S(n) = \in \int \mathcal{L}_n(t,x) \tag{65}$$

$$\int \equiv \int_t^{t=T_{FR}} dx \tag{66}$$

2.4.1.Hamiltonian untuk *Forward Rates* dengan Volatilitas Stokastik

Sebelumnya telah diperoleh Hamiltonian untuk kasus sederhana dari volatilitas sebagai suatu fungsi *forward rates*. Mengingat kembali *Lagrangian* sistem yang diberikan oleh :

$$\mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}_{kinetik}[\phi] + \mathcal{L}_{rigiditas}[\phi]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{f_0 \frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t} - \alpha(t,x)}{\sigma_0(t,x)e^{v\phi(t,x)}}\right\}^2 + \frac{1}{\mu^2}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_0 \frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t} - \alpha(t,x)}{\sigma_0(t,x)e^{v\phi(t,x)}}\right)\right\}^2\right] \tag{67}$$

Pada diskritisasi *Lagrangian* yang diperoleh menggunakan syarat batas persamaan (6), bahwa:

$$S(n) = \in \int \mathcal{L}_n = -\frac{1}{2}\int A\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)A \tag{68}$$

$$A = f_0\, \sigma_0^{-1}\, e^{-v\phi}\left(\phi_{t+\in} - \phi_t - \in f_0^{-1}\alpha\right) \tag{69}$$

Sekarang kembali menuliskan persamaan (68) menggunakan Integrasi Gaussian akan diperoleh : (konstanta yang tidak berhubungan diabaikan)

$$e^{S(n)} = \prod_x \int dp(x)\, \exp\left\{-\frac{\in}{2}\int p(x)D(x,x';t)\,p(x') + i\int p(x)A(x)\right\} \tag{70}$$

dengan

$$\left(1 - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)D(x,x';t) = \delta(x - x')$$

merupakan syarat batas kondisi Neumann.

Sebuah turunan eksplisit didefinisikan dari propagator $D(x,x';t)$ menghasilkan :

$$D(x,x';t) = \frac{\mu}{2\sinh(\mu T_{FR})}\left[\cosh\left(\mu T_{FR} - \mu|x - x'|\right) + \cosh\left(\mu T_{FR} - \mu(x + x' - 2t)\right)\right] \tag{71}$$

Tinjau definisikan suku yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\rho_n = \prod_x f^{-\nu}(n \in, x) \tag{72}$$

dengan menskala kembali $p(x)$ sebagai berikut :

$$p \rightarrow f_0^{-1}\sigma_0 e^{\nu\phi} p \tag{73}$$

maka akan diperoleh:

$$\begin{aligned} \rho_n e^{S(n)} = \prod_x \int dp(x) \exp \Big\{ i \int p(x)\left(\phi_{t+\in} - \phi_t - \in f_0^1 \alpha\right)(x) - \\ \frac{\in}{2 f_0^2} \int \sigma_0 e^{\nu\phi} p(x) D(x, x'; t) \sigma_0 e^{\nu\phi} p(x') \Big\} \end{aligned} \tag{74}$$

Ingat kembali persamaan (53) bahwa Hamiltonian didefinisikan sebagai:

$$\rho_n e^{S(n)} = \langle \phi_t | e^{-\in \mathcal{H}_\phi} | \phi_{t+\in} \rangle \tag{75}$$

$$= e^{-\in \mathcal{H}_n(t)} \int D p e^{i \int p(\phi_{t+\in} - \phi_t)} \tag{76}$$

Dan dengan menghilangkan t dalam ϕ_t, Hamiltonian *forward rates* menjadi:

$$\mathcal{H}_\phi(t) = -\frac{1}{2 f_0^2} \int \sigma_0 e^{\nu\phi}(x) D(x, x'; t) \sigma_0 e^{\nu\phi}(x') \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(x')} - \frac{1}{f_0} \int \alpha \frac{\delta}{\delta\phi} \tag{77}$$

Hamiltonian adalah non-hermitian dengan nilai eigen kompleks. Meskipun hal ini merupakan masalah dalam fisika, hal ini tidak terjadi di finansial karena Hamiltonian bukanlah besaran kuantitas (seperti energi) yang memiliki nilai eigen yang observabel, dan oleh karena itu tidak harus memiliki nilai eigen yang real.

2.4.2 Hamiltonian untuk *Forward Rates* dan Volatilitas Medan Kuantum

Sekarang tinjau kasus ketika fluktuasi *forward rates* dan volatilitas yang direpresentasikan sebagai medan kuantum yang terpisah, sebelumnya menguji *Lagrangian* yang diberikan dalam persamaan (21), yaitu:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2(1-\rho)^2}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial t}-\alpha}{\sigma} - \rho\frac{\frac{\partial h}{\partial t}-\beta}{\xi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t}-\beta}{\xi}\right)^2$$
$$-\frac{1}{2\mu^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial t}-\alpha}{\sigma}\right)\right)^2 - \frac{1}{2\kappa^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t}-\beta}{\xi}\right)^2\right) \tag{78}$$

kemudian ingat kembali

$$-\infty \leq f(t,x), h(t,x) \leq +\infty \tag{79}$$

dengan melakukan diskritisasi waktu, dan untuk penyederhanaan notasi waktu dan maturitas, maka dituliskan *Lagrangian* dalam notasi matriks berikut:

$$S(n) = -\frac{1}{2\in}\int\left[\sigma^{-1} A\ \xi^{-1} B\right](x)\mathcal{M}(x,x';t)\begin{bmatrix}\sigma^{-1} & A \\ \xi^{-1} & B\end{bmatrix}(x') \tag{80}$$

dimana:

$$\mathcal{M}(x,x';t) = \begin{bmatrix}\frac{1}{1-\rho^2} - \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\rho}{1-\rho^2} \\ -\frac{\rho}{1-\rho^2} & \frac{1}{1-\rho^2} - \frac{1}{\kappa^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\end{bmatrix}\delta(x-x') \tag{81}$$

dan

$$A \equiv f_{t+\in} - \tilde{f}_t - \in \alpha \tag{82}$$

$$B \equiv h_{t+\in} - \tilde{h}_t - \in \beta \tag{83}$$

Perhatikan bahwa dalam memperoleh persamaan (80) untuk $S(n)$ telah menggunakan syarat batas kondisi medan yang diberikan dalam persamaan (6) dan (24).

Sekarang kembali menuliskan persamaan (80) menggunakan Integrasi Gaussian dan memperoleh (abaikan konstanta yang tidak relevan):

$$e^{S(n)} = \prod_x \int dp(x)dq(x)\exp\left(-\frac{\in}{2}\int \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} + i\int \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma^{-1} & A \\ \xi^{-1} & B \end{bmatrix} \right) \tag{84}$$

mengingat dari persamaan (37) bahwa Integral Lintasan Feynman memiliki perhitungan non-trivial dalam menghitung $\sigma^{-1}(t,x)$ dan dalam memperoleh Hamiltonian perhitungan ini akan dilibatkan.

Definisikan suku perhitungan dengan:

$$\rho_n \equiv \prod_x \sigma^{-1}(x) \tag{85}$$

dan dengan menskala variabel *p* dan *q* dalam persamaan (84) untuk tiap *x*:

$$p \to \sigma p \tag{86}$$

$$q \to \xi q \tag{87}$$

kemudian diperoleh dari persamaan (84) :

$$\begin{aligned} \rho_n e^{S(n)} = \int DpDq \times \exp\Bigg(&-\frac{\in}{2}\int \begin{bmatrix} \sigma p & \xi q \end{bmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma p \\ \xi q \end{bmatrix} + \\ &+ i\int \begin{bmatrix} p & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f - \tilde{f} - \in \alpha \\ h - \tilde{h} - \in \beta \end{bmatrix} \Bigg) \end{aligned} \tag{88}$$

menunjukan bahwa perhitungan di atas dapat dibatalkan. Kemudian sebelumnya diperoleh:

$$\rho_n e^{S(n)} = \left\langle \tilde{f}\,;\tilde{h} \right| e^{-\in \mathcal{H}_n} \left| f\ ;\ h \right\rangle \tag{89}$$

$$= e^{-\in \mathcal{H}_n} \int DpDq\, e^{i\int p\left(f-\tilde{f}\right) + i\int q\left(h-\tilde{h}\right)} \tag{90}$$

dan yang menghasilkan Hamiltonian untuk *forward rates* serta volatilitas sebagai suatu medan kuantum independen diberikan oleh persamaan berikut :

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2}\int \begin{bmatrix} \sigma \dfrac{\delta}{i\delta\tilde{f}} & \xi \dfrac{\delta}{i\delta\tilde{h}} \end{bmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{bmatrix} \sigma \dfrac{\delta}{i\delta\tilde{f}} \\ \xi \dfrac{\delta}{i\delta\tilde{h}} \end{bmatrix} - \int \left\{ \alpha \frac{\delta}{\delta\tilde{f}} + \beta \frac{\delta}{\delta\tilde{h}} \right\} \tag{91}$$

dari persamaan (81) diperoleh:

$$\mathcal{M}^{-1}(x,x';t)=c\begin{bmatrix}(D_- - D_+)+\dfrac{(1-\rho^2)}{\kappa^2}(r_+ D_+ - r_- D_-) & \rho(D_- - D_+) \\ \rho(D_- - D_+) & (D_- - D_+)+\dfrac{(1-\rho^2)}{\kappa^2}(r_+ D_+ - r_- D_-)\end{bmatrix}$$

dimana :

$$c=\frac{\mu^2\kappa^2}{\sqrt{(\kappa^2-\mu^2)^2+4\rho^2\,\mu^2\,\kappa^2}} \tag{92}$$

$$r_\pm=\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\mu^2+\kappa^2\pm\sqrt{(\kappa^2-\mu^2)^2+4\rho^2\,\mu^2\,\kappa^2}\;\right] \tag{93}$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+r_\pm\right)D_\pm(x,x';t)=\delta(x-x') \text{ dengan kondisi batas Neumann} \tag{94}$$

Untuk memecahkan keadaan tanpa kehadiran arbitrase, dibutuhkan :

$$G(x;x',t)\equiv\mathcal{M}_{11}^{-1}(x;x',t) \tag{95}$$

$$=\frac{\mu^2}{\sqrt{(\kappa^2-\mu^2)+4\rho^2\,\mu^2\,\kappa^2}}\left[\kappa^2(D_- - D_+)+(1-\rho^2)(r_+ D_+ - r_- D_-)\right] \tag{96}$$

2.5. Perumusan Hamiltonian untuk Keadaan Tanpa Kehadiran Arbitrase

Prinsip keadaan tanpa kehadiran arbistrase adalah pusat dari teori finansial, dan integral lintasan yang membahas formulasi prinsip ini diberikan dalam [10]. Untuk kasus volatilitas deterministik, *Lagrangian forward rates* yang diberikan oleh persamaan (3) adalah kuadratis, dan kemudian kondisi tanpa kehadiran arbitrase dapat dipecahkan dengan tepat dengan melakukan Integrasi Lintasan Gaussian [10]. Sedangkan untuk kasus volatilitas yang stokastik, *Lagrangian*nya adalah non-linier dan kemudian kondisi tanpa kehadiran arbitrase tidak dapat dipecahkan secara eksplisit menggunakan integral lintasan; untuk alasan inilah kemudian akan kembali dirumuskan kondisi tanpa kehadiran arbitrase menggunakan Hamiltonian. Perumusan Hamiltonian untuk teori non-linier dari *forward rates* dengan volatilitas stokastik memenuhi solusi yang eksak untuk keadaan tanpa arbitrase.

Pertama, akan menurunkan perumusan Hamiltonian untuk kasus sekuritas tunggal *S*, karena untuk produk turunan untuk *forward rates* akan lebih kompleks

2.4.1 Sekuritas Tunggal tanpa Arbitrase

Tinjau suatu opsi dalam sebuah sekuritas $S = e^x$ yang akan jatuh tempo pada waktu *T* dan memiliki fungsi *payoff* diberikan oleh $g(x, K)$ dimana *K* adalah *strike price*. Sebagaimana telah didiskusikan dalam [10], evolusi bebas resiko suatu sekuritas diberikan oleh Hamiltonian $\mathcal{H}_s$, dengan nilai opsi pada waktu $t < T$ diberikan oleh:

$$f(t, x) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x | e^{-(T-t)\mathcal{H}_s} | x' \rangle g(x') \tag{97}$$

dimana *r* adalah suatu konstanta laju bunga bebas resiko sesaat)

Kondisi martingale untuk evolusi bebas resiko dari suatu sekuritas merupakan potongan evolusi dari harga mendatang sekuritas itu pada waktu mendatang tertentu, sebut saja t_*, . Nilai ini adalah sama, pada saat rata-rata, dengan harga sekuritas ketika waktu mula-mula *t*. Persamaan kondisi martingale menyatakan bahwa:

$$S(x(t)) = E_{[t,t_*]}\left[e^{-(t_*-t)r}\, S(x(t_*))\right] \tag{98}$$

dimana notasi $E_{[t,t_*]}[Y]$ merupakan rata-rata dari nilai *Y* untuk semua variabel stokastik dalam interval waktu $[t, t_*]$. Dari persamaan (97) dapat diperoleh :

$$S(x) = e^{-r(t_*-t)} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x | e^{-(t_*-t)\mathcal{H}_s} | x' \rangle S(x') \tag{99}$$

$$\Rightarrow \langle x | S \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \langle x | e^{-(t_*-t)(\mathcal{H}_s + r)} | x' \rangle \langle x' | S \rangle \tag{100}$$

dengan menggunakan kelengkapan persamaan untuk sekuritas tunggal yang diberikan oleh :

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} dx | x \rangle \langle x | \tag{101}$$

Dari persamaan (100) akan menghasilkan persamaan operator yaitu :

$$\left|S\right\rangle = e^{-(t_*-t)(\hat{H}_s+r)}\left|S\right\rangle = 0 \qquad (102)$$

Karena t_* adalah waktu arbitrase, maka diperoleh:

$$\left(\mathcal{H}_s + r\right)\left|S\right\rangle = 0 \qquad (103)$$

2.5. 2. Perumusan *Forward Rates* Tanpa Kehadiran Arbistrase

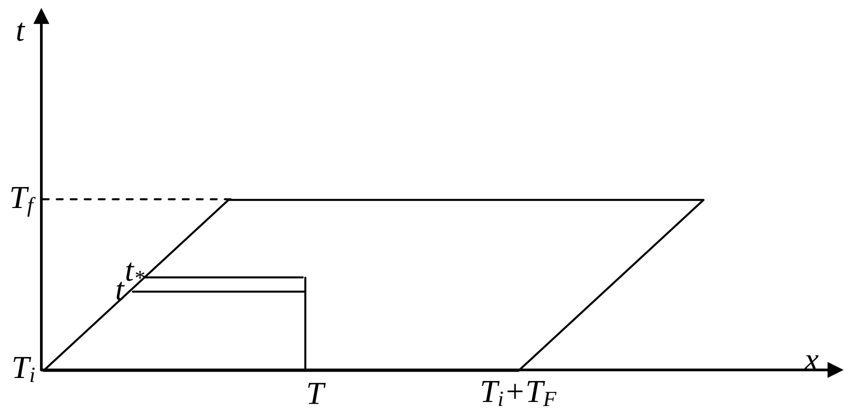
Prinsip tanpa kehadiran arbitrase menyatakan bahwa harga dari obligasi $P(t_*, T)$ pada waktu di masa mendatang $T > t_* > t$ adalah sama dengan harga obligasi itu pada waktu *t*, di potong oleh laju bunga bebas resiko $r(t) = f(t,t)$. Dengan kata lain :

$$P(t,T) = E_{[t,t_*]}\left[e^{-\int_t^{t_*} r(t)dt} P(t_*, T)\right] \qquad (104)$$

dimana $E_{[t,t_*]}[Y]$ menunjukkan nilai rata-rata Y yang meliputi seluruh variabel stokastik dalam interval waktu $[t, t_*]$. Dalam kaitannya dengan Integral Lintasan Feynmann, Persamaan (104) menghasilkan (dihitung untuk ρ):

$$P(t,T) = \int D\, f\, \rho[f] e^{-\int_t^{t_*} r(t)dt} e^{S[f]} P(t_*, T) \qquad (105)$$

Terdapat dua domain yang dilibatkan dalam integral lintasan di persamaan (105), disebut dengan domain dari *treasury bond* yang juga berada di dalam domain *forward rates*. Domain ini ditunjukkan oleh gambar 3.6 berikut:



Gambar 3.6. Domain tanpa Arbitrase untuk *Treasury Bonds*

Meskipun dituliskan dalam bentuk integral, kondisi persamaan (105) sebenarnya merupakan suatu diferensial karena mengandung bentuk t_* kemudian diambil $t_* = t + \in$. Alasan perlu untuk meninjau perubahan yang infinitesimal saja untuk *forward rates* adalah karena ruang keadaan $\mathcal{V}_t$ memiliki sifat bergantung terhadap waktu. Untuk evolusi waktu infinetesimal, fungsi dalam persamaan (105) gagal untuk mengintegrasikan terhadap variabel waktu akhir $\tilde{f}_{t+\in}$ pada waktu kisi $t+\in$, sehingga:

$$P(t,T) = \int D\tilde{f}_{t+\in}\, \rho_{t+\in}\, e^{-\in f(t,t)}\, e^{\in \int \mathcal{L}[f,\tilde{f}]} P\left[\tilde{f}; t+\in, T\right] \tag{106}$$

kemudian dituliskan kembali persamaan diatas dalam bahasa vektor keadaan, yang dinamakan dengan:

$$\left\langle f_t \middle| P(t,T) \right\rangle = \int D\tilde{f}_{t+\in} \left\langle f_t \middle| e^{-\in f(t,t)}\, e^{-\in \mathcal{H}} \middle| \tilde{f}_{t+\in} \right\rangle \left\langle \tilde{f}_{t+\in} \middle| P(t+\in, T) \right\rangle \tag{107}$$

Telah dimiliki dari kelengkapan yang diberikan persamaan (49) bahwa :

$$\boldsymbol{I}_{t+\in} = \int D\tilde{f}_{t+\in} \left| \tilde{f}_{t+\in} \right\rangle \left\langle \tilde{f}_{t+\in} \right| \tag{108}$$

kemudian dari persamaan (107) bahwa :

$$\left\langle f_t \middle| P(t,T) \right\rangle = \left\langle f_t \middle| e^{-\in f(t,t)}\, e^{-\in \mathcal{H}(t)} \middle| P(t+\in, T) \right\rangle \tag{109}$$

$$\Rightarrow \left| P(t,T) \right\rangle = e^{-\in f(t,t)}\, e^{-\in \mathcal{H}(t)} \left| P(t+\in, T) \right\rangle \tag{110}$$

dapat dibuktikan dengan menggunakan representasi *zero coupon bond* secara eksplisit dari persamaan (61) bahwa :

$$e^{+\in f(t,t)} \left| P(t,T) \right\rangle = \left| P(t+\in, T) \right\rangle \tag{111}$$

kemudian kita punya:

$$\left| P(t+\in, T) \right\rangle = e^{-\in \mathcal{H}(t)} \left| P(t+\in, T) \right\rangle \tag{112}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}(t) \left| P(t+\in, T) \right\rangle = 0 \tag{113}$$

Perumusan diferensial untuk tak ada arbitrase, yang dinamakan *zero coupon bond* –yang juga berlaku untuk tiap zero coupon bond- dianihilasi oleh Hamiltonian $\hat{H}$, yaitu :

$$\mathcal{H}(t)|P(t,T)\rangle = 0 \text{ untuk semua } t, T \tag{114}$$

Perhatikan similaritas persamaan diatas dengan kasus untuk sekuritas tunggal dalam persamaan (103). Adanya kasus pemotongan terlihat sangat berbeda untuk kedua kasus. *Spot rate r* merupakan suatu konstanta dalam kasus sekuritas tunggal , sementara dalam kasus *forward rates* pemotongan oleh *spot rate* merupakan suatu faktor yang dibutuhkan untuk mentransformasikan waktu mendatang dari obligasi $P(t+\in, T)$ ke waktu sebelumnya, yang dinamakan $P(t,T)$

2.6. Kondisi Tak Ada Arbitrase untuk Volatilitas Stokastik

Dengan menggunakan Hamiltonian untuk *forward rates* dengan volatilitas stokastik yang diberikan dalam persamaan (77) dan (91), dapat diaplikasikan pada keadaan tanpa arbitrase yang diperoleh di persamaan (114), yaitu:

$$\mathcal{H}(t)|P(t,T)\rangle = 0 \tag{115}$$

atau secara lebih eksplisit lagi adalah :

$$\langle f_t|\mathcal{H}(t)|P(t,T)\rangle = \mathcal{H}(t)e^{-\int_t^T dx\, f(t,x)} = 0 \tag{116}$$

2.6.1 Kondisi Tak Ada Arbitrase Untuk Volatilitas Sebagai Suatu Fungsi *Forward rates*

Di tinjau kembali persamaan *zero coupon bond* yang diberikan oleh :

$$P(t,T) = \exp\left(-f_0\int_t^T dx\, e^{\phi(t,x)}\right) \tag{117}$$

yang kemudian menghasilkan :

$$\frac{\delta}{\delta\phi(t,x)}P(t,T) = \begin{cases} -f_0\, e^{\phi(t,x)}P(t,T), & t < x < T \\ 0 & x > T \end{cases} \tag{118}$$

Sementara dari persamaan (116) dan (77) dapat diperoleh:

$$\left[-\frac{1}{2}\int_t^T dx\,dx'\sigma_0\, e^{\nu\,\phi(t,x)} f(t,x) D(x,x';t)\sigma_0\, e^{\nu\,\phi(t,x')} f(t,x') + \int_t^T dx\,\alpha(t,x) f(t,x)\right] P(t,T) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(t,x) = \frac{\sigma_0}{f} e^{\nu\phi(t,x)} \int_t^T dx'\, D(x,x';t)\sigma_0\, e^{\nu\phi(t,x')} f(t,x') \tag{119}$$

merupakan persamaan untuk kondisi tanpa arbistrase

Perhatikan bahwa kondisi tanpa arbitrase yang diberikan di atas tidak terkandung dalam solusi model HJM untuk kecepatann drift yang semuanya berbentuk kuadratis dalam medan-medan volatilitas [13]. Kehadiran *forward rates* $f(t,x)$ secara langsung dalam kecepatan drift muncul secara alamiah dalam formulasi teori medan kuantum, dan hal ini menunjukkan bahwa suku kinetik dalam *Lagrangian* untuk kasus $f \in [-\infty, +\infty]$ - yang disebut $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2$ - digantikan oleh $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2$ untuk $f \in [0, +\infty]$.

Secara fakta, dapat dibuktikan suatu hasil yang lebih umum dari aksi $S[\phi]$ untuk kasus dimana volatilitas stokastik merupakan fungsi dari *forward rates*. Dituliskan *Lagrangian* secara umum sebagai :

$$\mathcal{L}_{umum} = \mathcal{L}[\phi] + \int U(t,x)\frac{\partial \phi}{\partial t} + \int W(t,x) \tag{120}$$

U, W : arbitrase lokal yang merupakan fungsi dari $f(t,x)$ (121)

kemudian dari keadaan tanpa arbitrase menghasilkan :

$$U(t,x) = W(t,x) = 0 \tag{122}$$

suku tensi string dalam *Lagrangian* akan memiliki bentuk:

$$W(t,x) \propto \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \tag{123}$$

dimana hal ini tidak diijinkan dalam keadaan tanpa arbitrase.

2.6.2. Keadaan Tanpa Arbitrase Untuk Volatilitas Sebagai Medan Kuantum Yang Independen

Dari Hamiltonian yang diberikan dalam persamaan (91) dapat dilihat bahwa, sebagaimana dalam kasus di bawah, $\frac{\delta}{\delta h}$ bernilai nol dalam persamaan (116) karena dalam *zero coupon bond* tidak bergantung secara eksplisit pada medan volatilitas. Dengan menggunakan fakta bahwa :

$$\frac{\delta^m}{\delta f^m(t,x)} e^{-\int_t^T dx\, f(t,x)} = \begin{cases} (-1)^m e^{-\int_t^T dx\, f(t,x)}, & t < x < T \\ 0, & x > T \end{cases} \tag{124}$$

kemudian dari menggabungkan persaman (116), (91) dan (124) diperoleh:

$$\left[-\frac{1}{2}\int_t^T dx\, dx'\sigma(t,x)G(x,x';t)\sigma(t,x') + \int_t^T dx\,\alpha(t,x)\right]P(t,T) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(t,x) = \sigma(t,x)\int_t^x dx'\, G(x,x';t)\sigma(t,x') \tag{125}$$

merupakan persamaan untuk kondisi tanpa arbitrase

Karena tidak ada instrumen dalam pasar finansial sekarang ini yang dapat menyajikan perdagangan dalam volatlitas dari *forward rates* secara langsung, maka sulit untuk mengaplikasikan kondisi martingale dari medan volatilitas, khususnya kecepatan drift dari medan volatilitas, yang disebut dengan $\beta(t,x)$, menjadi fungsi medan lain dan parameter-parameter teori lainnya. Dari alasan inilah kemudian β harus ditentukan secara empiris dari pasar. Untuk memperoleh limit volatilitas deterministik, maka perlu untuk mengambil limit $\xi, \rho,$ dan $\kappa \to 0$. Dari sini akan diperoleh:

$$\xi, \rho, \kappa \to 0 \tag{126}$$

$$r_+ \to \mu \tag{127}$$

$$r_- \to 0 \tag{128}$$

$$G(x,x';t) \to D(x,x';t) \tag{129}$$

dengan propagator $D(x,x';t)$diberikan oleh persamaan (71).

Dengan menerapkan beberapa identitas, propagator $D(x,x';t)$ yang diberikan dalam persamaan (71) diatas benar-benar sama dengan hasil yang diperoleh dalam [10] dengan menggunakan teknik integral. Kemudian dari keadaan tanpa arbitrase diperoleh α untuk kasus volatilitas deterministik menggunakan Hamiltonian sama dengan yang diperoleh dengan hasil sebelumnya yang menggunakan integral lintasan. Sedangkan dengan memasukkan $\alpha(t,x)$ yang diberikan dalam persamaan (125) ke dalam *Lagrangian* menghasilkan hasil akhir dalam makalah ini. Sebagai notasi, didefinisikan fungsi non-lokal dalam medan volatilitas berikut :

$$v(t,x) = \int_t^x dx' G(x,x';t)\sigma(t,x') \tag{130}$$

Sehingga diperoleh hasil akhir Lagrangian :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t,x) = & \tfrac{-1}{2(1-\rho^2)}\left(\sigma^{-1}\frac{\partial f}{\partial t} - v - \rho\frac{\frac{\partial h}{\partial t} - \beta}{\xi}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t} - \beta}{\xi}\right)^2 \\ & - \tfrac{1}{2\mu^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma^{-1}\frac{\partial f}{\partial t} - v\right)\right)^2 - \tfrac{1}{2K^2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\frac{\partial h}{\partial t} - \beta}{\xi}\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{131}$$

Lagrangian yang diberikan oleh persamaan diatas merupakan deskripsi yang utuh secara teori dari *forward rates* dengan volatilitas stokastik. Semua paraameter dalam teori, yang dinamakan dengan fungsi $\beta(t,x)$ dan parameter μ, K, ρ dan ξ perlu untuk ditentukan dari data pasar. Selama adanya medan $v(t,x)$, dapat diperoleh bahwasanya *Lagrangian* non-lokal, dengan fungsi $G(x,x';t)$ mengandung semua informasi yang dibutuhkan dengan asumsi tidak ada arbitrase.

Jadi, ada 2 generalisasi yang dapat dilakukan dengan *Lagrangian*: dalam persamaan (131), yang menunjukkan bahwa *forward rates* dapat dibuat positip, yaitu $f > 0$, dan yang kedua adalah bahwa propagator $G(x,x';t)$ dapat memuat efek-efek lain yang lebih kompleks yang datang dari depedensi maturitas terhadap parameter rigiditas μ.

KESIMPULAN

Kita telah melakukan generalisasi model teori medan kuantum untuk forward rates dengan volatilitas stokastik dengan memperlakukan volatilitas sebagai fungsi dari forward rates atau sebagai suatu medan kuantum yang independen. Dalam kasus keduanya, Integral Lintasan Feynman dapat secara baik dikembangkan untuk menghitung volatilitas stokastik.

Untuk kasus volatilitas yang deterministik, telah ditemukan dalam [10] bahwa efek teori medan kuantum 2 dimensi direduksi menjadi teori medan kuantum satu dimensi selama memecahkan sifat-sifat Lagrangian. Bagaimanapun, ketika memperlakukan volatilitas sebagai suatu medan kuantum, teori ini tetap dalam 2 dimensi dan tak dapat direduksi lagi, dan dari sini sifat-sifat teori medan kuantum berlaku.

Untuk memecahkan solusi eksak dari kasus tanpa keberadaan arbitrase untuk volatilitas stokastik, kita meninjau kondisi tanpa arbitrase sebagai suatu kondisi yang melibatkan hamiltonian sistem. Untuk memperoleh Hamiltonian forward rates, kita pertama menganalisis ruang keadaan sistem, yang kemudian menghasilkan non-trivial ketika mendefinisikan domain forward rates sebagai suatu jajaran genjang.Hamiltonian forward rates adalah suatu rumusan yang independen dari teori forward rates dan dapat mengungkap perilaku dari forward rates.

Model forward rates dengan volatilitas stokastik memiliki sejumlah parameter bebas yang hanya dapat ditentukan dengan mempelajari pasar. Kita juga kemudian perlu untuk menganalisis secara numerik model sehingga dapat mengkalibrasinya. Langkah pertama ke arah ini telah diselidiki oleh [11] dan perhitungannya sekarang tengah dikembangkan untuk kasus volatilitas yang stokastik.

DAFTAR PUSTAKA

[1] D Heath, R Jarrow dan A Morton. Bond Pricing and The Term Structure of Interest Rates: A new Methodology for Contingent Claims Valuation. Econometrica 60, 77 (1992)

[2] D.P. Kennedy. Characterizing Gaussian Model of The Term Structure of Interest Rates. Mathematical Finance 7 (1997) 107-118

[3] P. Goldstein. The Term Structure of Interest Rates as a Random Field. Prepint, Ohio State University (1997)

[4] P. Santa-Clara dan D Sornette. The Dynamics of The Forward Interest Rates Curve with Stochastic String Shocks. http://xxx.lanl.gov/cond-mat/9801321 (1997)

[5] D. Sornette. String Formulation of The dynamics of The Forward Interest Rate Curve. http: // xxx.lanl.gov/cond-mat/9702136

[6] J-P. Bouchaud and D Sornette, J. Phys.I France 4 (1994) 836-881; J.Phys.I 6 (1996) 167-175

[7] R.N Mantegna dan H.E Stanley. Introduction to Econophysics. Cambridge University Press (1999)

J.P. Bouchaud dan M. Potters. Theory of Financial Risks. Cambridge University Press (2000)

[8] M. Otto . Using Path Integrals to Price Interest Rate Derivatives. http://xxx.lanl.gov/cond-mat/98112318

M. Rosa-Clot dan S Taddei. A Path Integral Approach to Derivative Pricing: Formalism and Analytical Results. http://xxx.lanl.gov/cond-mat/9901277

C. Chiarella dan N. El-Hassan. Evaluation of Derivative Security Prices in The Heath-Jarrow-Morton Framework as Path Integrals Using Fast Fourier Transform Techniques. Journal of Financial Engineering Vol 6, no2 (1996)

[9] B.E Baaquie. A Path Integral Approach to Option Pricing with Stochastic Volatility: Some Exact Result. Journal de Physique I, 7 no 12 (1997): 1733-1753; http//xxx.lanl.gov/cond-mat/9708178

B. E Baaquie, L.C. Kwek dan S, Marakani. Simulation of Stochastic Volatility Using Path Integratins: Smiles and Frowns. http://xxx.lanl.gov/cond-mat/0008327

[10] B. E Baaquie. Quantum Field Theory of Threasury Bonds. Physical Review E, 64 (2001) 016121-1 sampai 016121-6

[11] B. E Baaquie dan S Marakani. An Empirical Investigation of A Quantum Field Theory of Forwards Rates. http://xxx.lanl.gov/cond-mat/0106317 (2001)

[12] K. I Amin dan V.K. Ng . Implied Volatility Function in Arbitrage-Free term-Structure Models. Journal of Financial Economics 35 (1994) 141.

M Warachka. A note on Stochastic Volatility in Term Structure Models. National University of Singapore Preprint (2001)

[13] K. I Amin dan V.K. Ng . Inferring Future Volatility from the Information in Implied Volatilityin EuroDollar Options: A new Approach . Reviews of Financial Studies vol 10, no2 (1997) 3