ANALISIS VEKTOR

Vektor dan Skalar

- Macam-macam kuantitas dalam fisika seperti: temperatur, volume, dan kelajuan dapat ditentukan dengan angka riil (nyata).
- Kuantitas seperti itu disebut dengan *skalar.*
- Kuantitas yang lain seperti gaya, kecepatan, dan momentum memiliki spesifikasi arah dan besar.
- Kuantitas seperti itu disebut *vektor.*

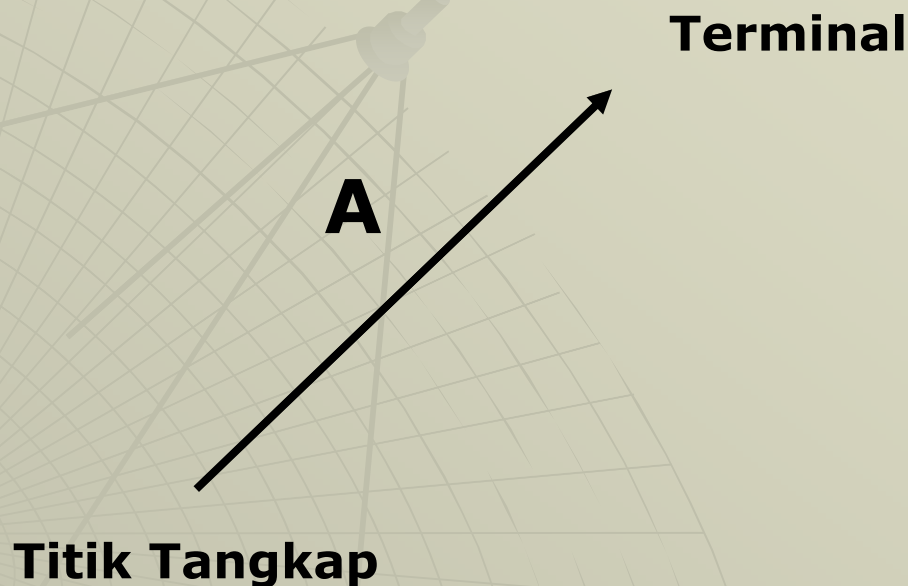
Vektor dan Skalar

- Sebuah vektor direpresentasikan (dinyatakan) dengan sebuah anak panah atau bagian garis berarah yang mengindikasikan arahnya.
- Besar vektor ditentukan dengan panjang dari anak panah, menggunakan satuan yang tepat (sesuai).

Lambang dan notasi Vektor

- Vektor ditulis dengan huruf cetak tebal seperti **A** atau $\vec{A}$
- Besarnya ditunjukkan dengan $\left|\vec{A}\right|$ atau A.
- Vektor digambarkan dengan anak panah. Ekor anak panah menunjukkan posisi titik tangkap sedangkan ujung anak panah menunjukkan titik terminal.

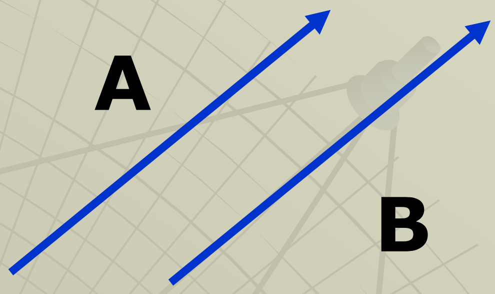
Penggambaran Vektor



Definisi

- Kesamaan vektor

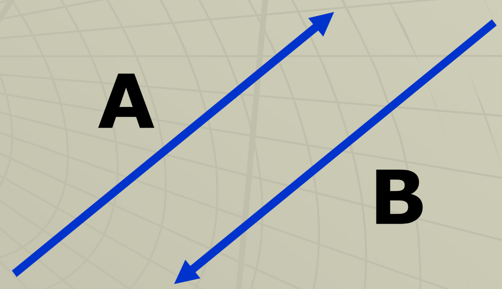
A = B



- Vektor yang berlawanan

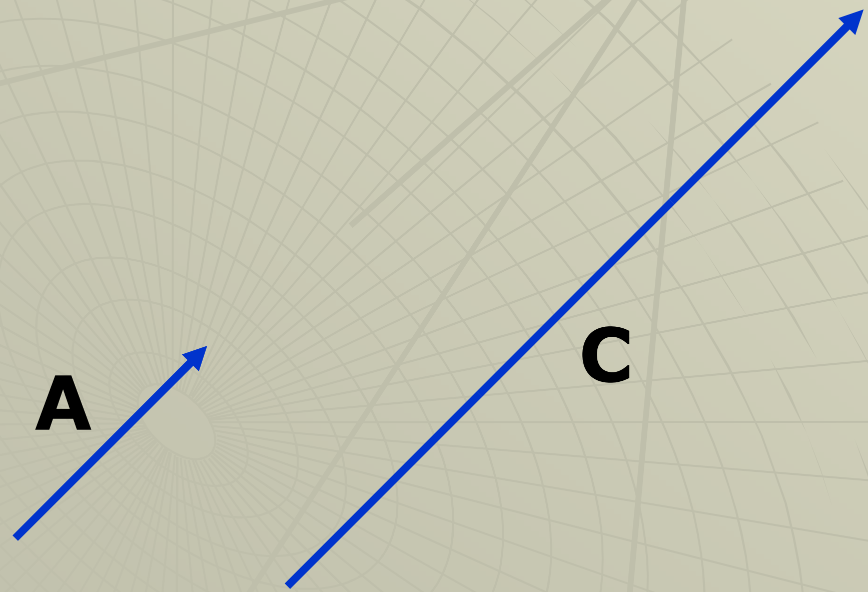
A = - B

B = - A



Definisi

- Perkalian vektor dengan skalar
  m**A** →vektor

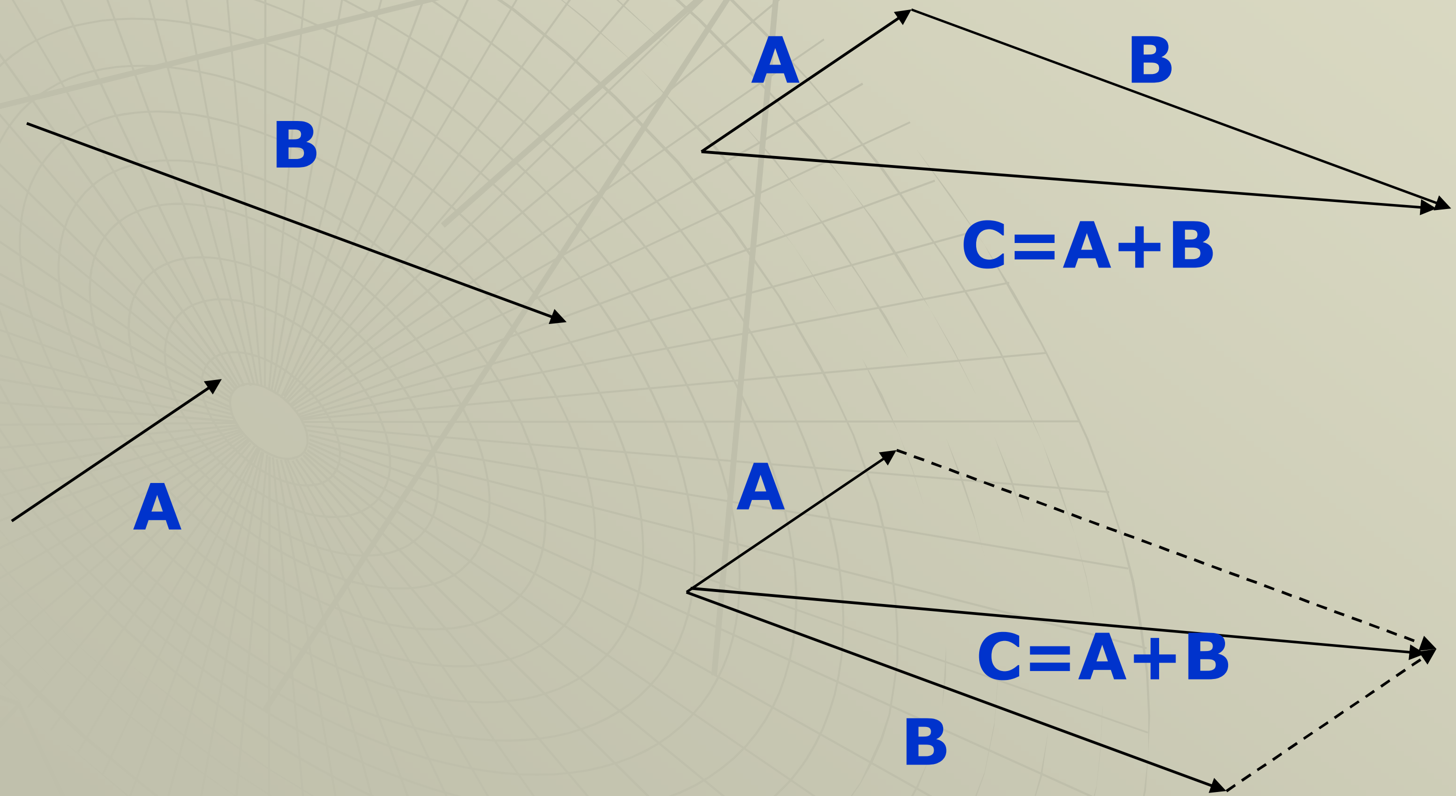


$\boxed{\mathbf{C} = 3\mathbf{A}}$

Definisi

- Penjumlahan vektor

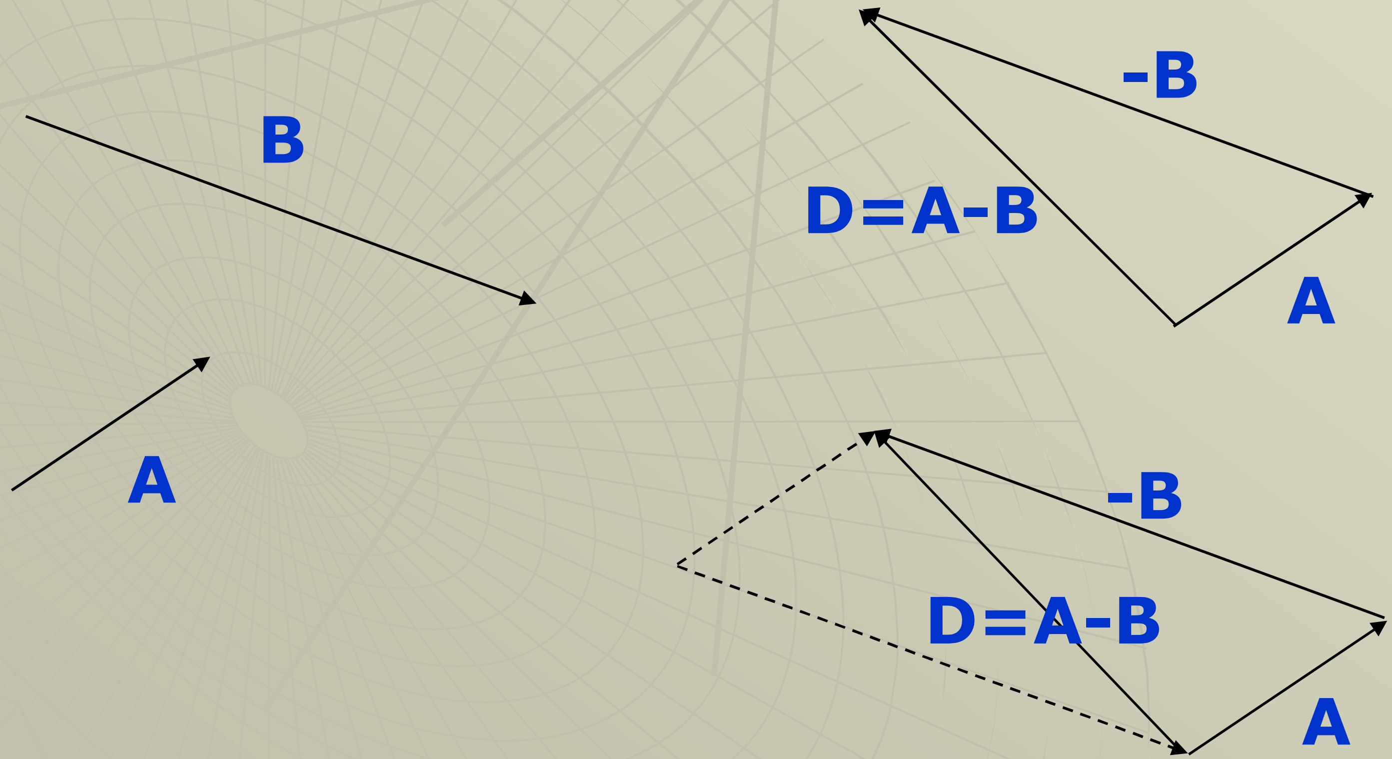
  C = A + B → VEKTOR



Definisi

- Penguragan vektor

  $\mathbf{D = A - B = A + (-B)} \rightarrow$ VEKTOR



Definisi

- Vektor satuan

  a=A/A (hanya penentu arah, besarnya 1 satuan)

- Sehingga suatu vektor biasa ditulis sbg :

  A = A**a**

Hukum Aljabar Vektor

Jika **A, B, C** adalah vektor dan m, n adalah skalar.

1. **A+B=B+A** → Komutatif Penjumlahan
2. **A+(B+C)=(A+B)+C** → Asosiatif penjumlahan
3. m(n**A**)=mn(**A**)=n(m**A**) → Asosiatif perkalian skalar
4. (m+n)**A** =m**A**+n**A** → Distributif
5. m(**A+B**) =m**A**+m**B** → Distributif

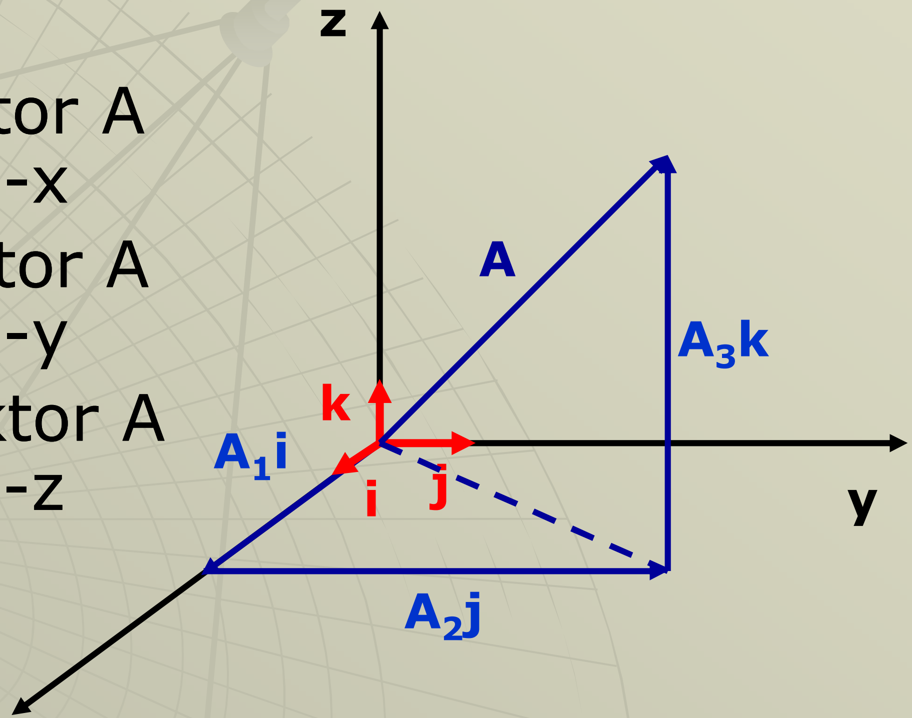
Komponen sebuah Vektor

$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$

$A_1 i$ = komponen vektor A dalam arah sumbu-x

$A_2 j$ = komponen vektor A dalam arah sumbu-y

$A_3 k$ = komponen vektor A dalam arah sumbu-z



Penjumlahan Vektor

$$A = A_1i + A_2j + A_3k$$
$$B = B_1i + B_2j + B_3k$$

$$C = A + B = (A_1i + A_2j + A_3k) + (B_1i + B_2j + B_3k)$$

$$C = A + B = (A_1+B_1)i + (A_2+B_2)j + (A_3+B_3)k$$

$$C = A - B = (A_1i + A_2j + A_3k) - (B_1i + B_2j + B_3k)$$

$$C = A - B = (A_1-B_1)i + (A_2-B_2)j + (A_3-B_3)k$$

Perkalian Vektor dengan skalar

$$A = A_1 i + A_2 j + A_3 k$$

$$B = B_1 i + B_2 j + A_3 k$$

$$D = 3A = 3(A_1 i + A_2 j + A_3 k)$$

Besar Vektor

Teorema Phytagoras :

$(OP)^2 = (OQ)^2 + (QP)^2$

tapi

$(OQ)^2 = (OR)^2 + (RQ)^2$

Sehingga

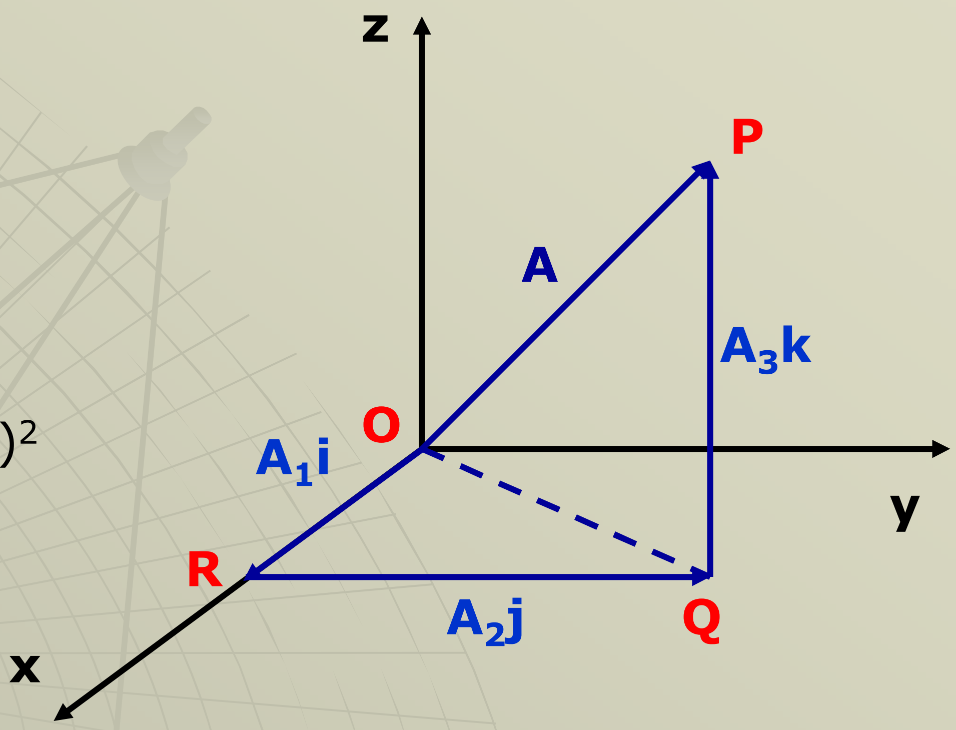
$(OP)^2 = (OR)^2 + (RQ)^2 + (QP)^2$

Atau

$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$

atau

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$



Contoh soal

Diketahui r_1= 2i+4j-5k dan r_2 = i+2j+3k

a. Tentukan resultan vektor r_1 dan r_2

b. Tentukan vektor satuan dalam arah resultan vektor tersebut

Jawab :

a. $R = r_1 + r_2 = (2i+4j-5k) + (i+2j+3k) = 3i + 6j - 2k$

b. $|R| = |(3i+6j-2k)| = \sqrt{9+36+4} = \sqrt{49} = 7$

$$r = \frac{R}{|R|} = \frac{3i+6j-2k}{7}$$

Cek besar vektor satuan = 1

Perkalian Titik

(Dot Product)

Dot poduct antara **A** dan **B**
Atau perkalian skalar didefinisikan :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\theta$$

θ Adalah sudut terkecil yang diapit **A** dan **B**

Secara fisis dot product adalah proyeksi suatu vektor terhadap vektor lainnya, sehingga sudut yang diambil adalah sudut yang terkecil

Perkalian Titik

(Dot Product)

$$A\,.\,B = (A_1 i + A_2 j + A_3 k).(B_1 i + B_2 j + B_3 k)$$

$$= (A_1 i).(B_1 i + B_2 j + B_3 k) + (A_2 j).(B_1 i + B_2 j + B_3 k)$$

$$+ (A_3 k).(B_1 i + B_2 j + B_3 k)$$

$$= A_1 B_1 (i.i) + A_1 B_2 (i.j) + A_1 B_3 (i.k)$$

$$+ A_2 B_1 (j.i) + A_2 B_2 (j.j) + A_2 B_3 (j.k)$$

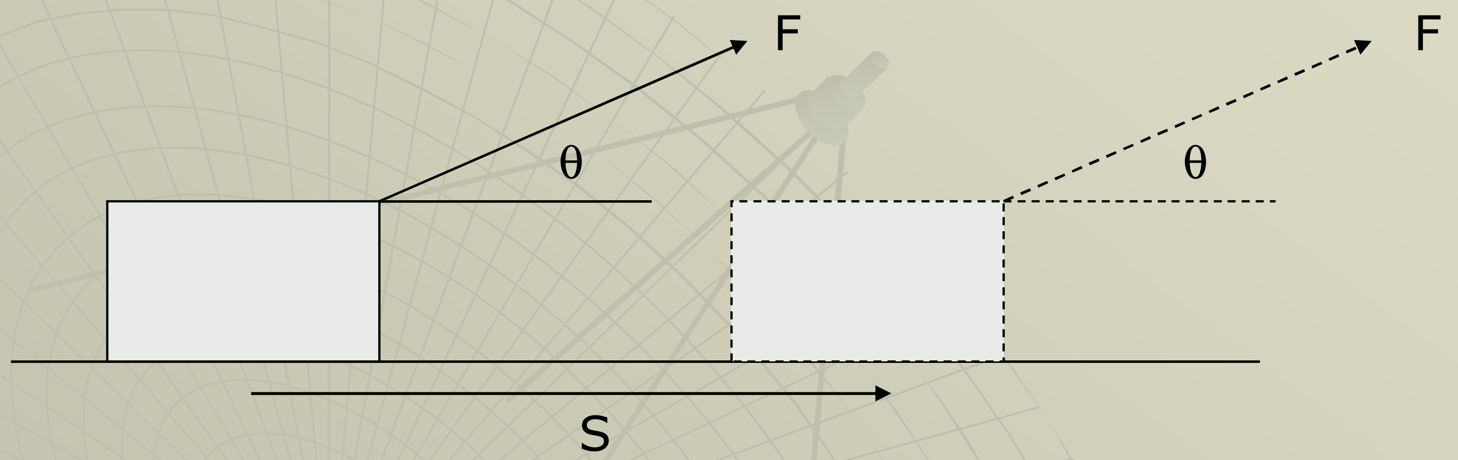
$$+ A_3 B_1 (k.i) + A_3 B_2 (k.j) + A_3 B_3 (k.k)$$

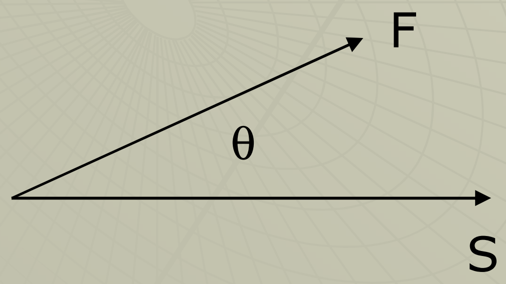
$$A.B = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

$$i.i = |i||i| \cos 0^o = 1 \qquad j.j = |j||j| \cos 0^o = 1 \qquad k.k = |k||k| \cos 0^o = 1$$

$$i.j = j.i = |i||j| \cos 90^o = 0 \qquad j.k = k.j = |j||k| \cos 90^o = 0 \qquad i.k = k.i = |k||i| \cos 90^o = 0$$

Contoh dot product dalam Fisika





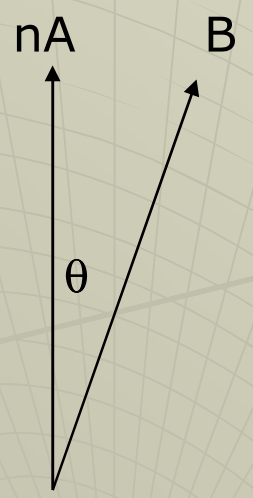
$W = FS\cos\theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$

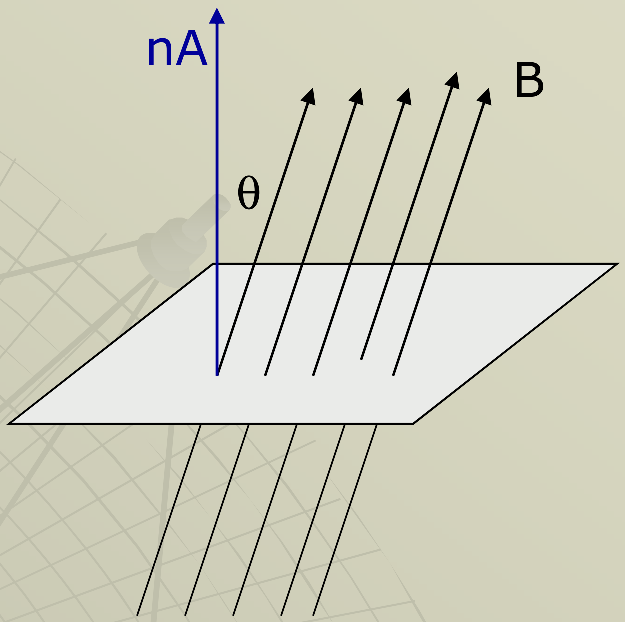
W = usaha

F = Vektor gaya

S = Vektor perpindahan

Contoh dot product dalam Fisika





ϕ = BA cos θ = **B . A**

ϕ = Fluks magnetik

B = Medan magnetik

A = arah bidang

Catatan :

Bidang adalah vektor memiliki luas dan arah. Arah bidang adalah arah normal bidang di suatu titik.

Normal = tegak lurus

Perkalian Silang
(Cross Product)

Cross poduct antara **A** dan **B**
Atau perkalian vektor didefinisikan :

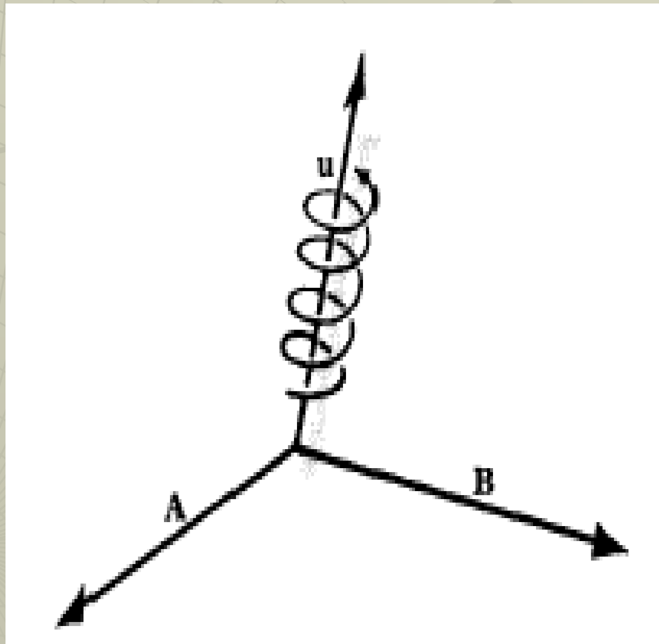
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB\, \mathbf{sin}\, \theta\, \mathbf{u}$$

θ Adalah sudut terkecil yang diapit **A** dan **B**

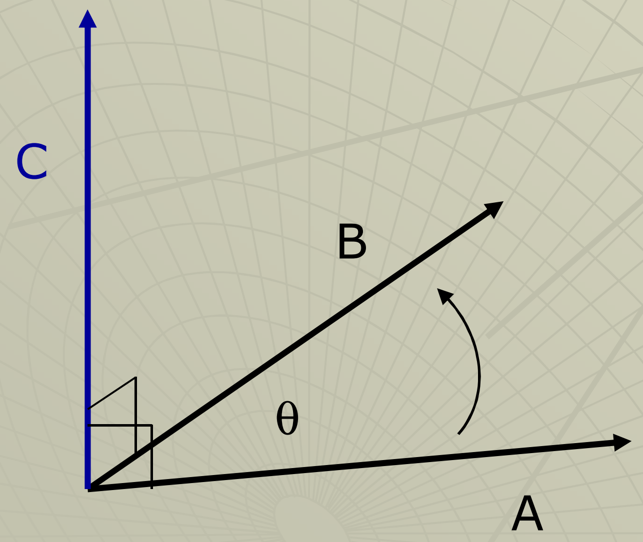
Hasil perkalian silang antara vektor A dan vektor B adalah sebuah vektor C yang arahnya tegak lurus bidang yang memuat vektor A dan B, sedemikian rupa sehingga A, B, dan C membentuk sistem tangan kanan (sistem skrup)

Perkalian Silang

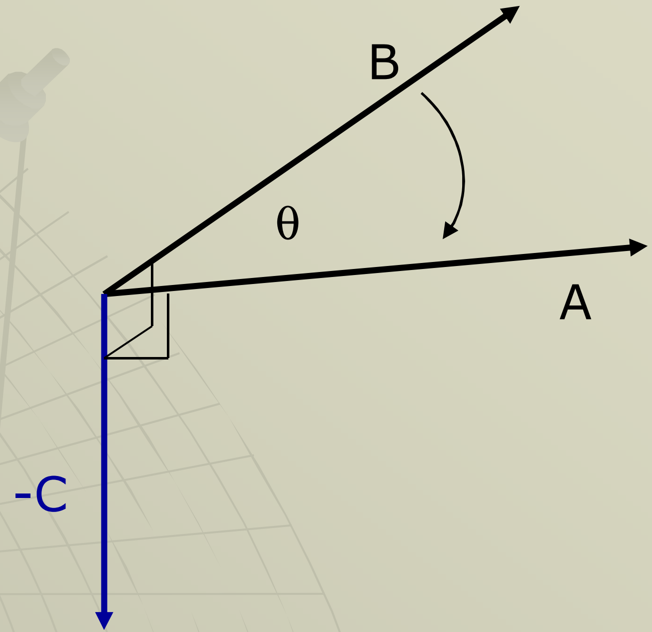
(Cross Product)



Perkalian Silang
(Cross Product)



C = A x B



-C = B x A

Pada sistem koordinat tegak lurus

$$i \times i = 0$$

$$i \times j = k$$

$$j \times i = -k$$

$$j \times j = 0$$

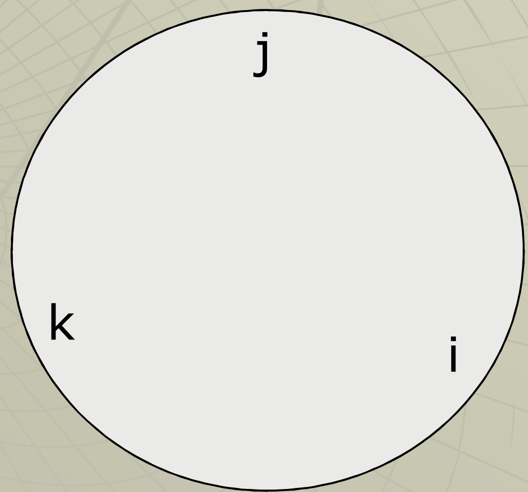
$$j \times k = i$$

$$k \times j = -i$$

$$k \times k = 0$$

$$k \times i = j$$

$$i \times k = -j$$



Perkalian silang

(Cross Product)

$$\mathbf{A \times B = (A_1 i + A_2 j + A_3 k) \times (B_1 i + B_2 j + B_3 k)}$$

$$\mathbf{= (A_1 i)x(B_1 i + B_2 j + B_3 k) + (A_2 j)x(B_1 i + B_2 j + B_3 k)}$$

$$\mathbf{+ (A_3 k)x(B_1 i + B_2 j + B_3 k)}$$

$$\mathbf{= A_1B_1(ixi) + A_1B_2(ixj) + A_1B_3(ixk)}$$

$$\mathbf{+ A_2B_1(jxi) + A_2B_2(jxj) + A_2B_3(jxk)}$$

$$\mathbf{+ A_3B_1(kxi) + A_3B_2(kxj) + A_3B_3(kxk)}$$

$$\mathbf{= A_1B_1(0) + A_1B_2(k) + A_1B_3(-j)}$$

$$\mathbf{+ A_2B_1(-k) + A_2B_2(0) + A_2B_3(i)}$$

$$\mathbf{+ A_3B_1(j) + A_3B_2(-i) + A_3B_3(0)}$$

Perkalian silang

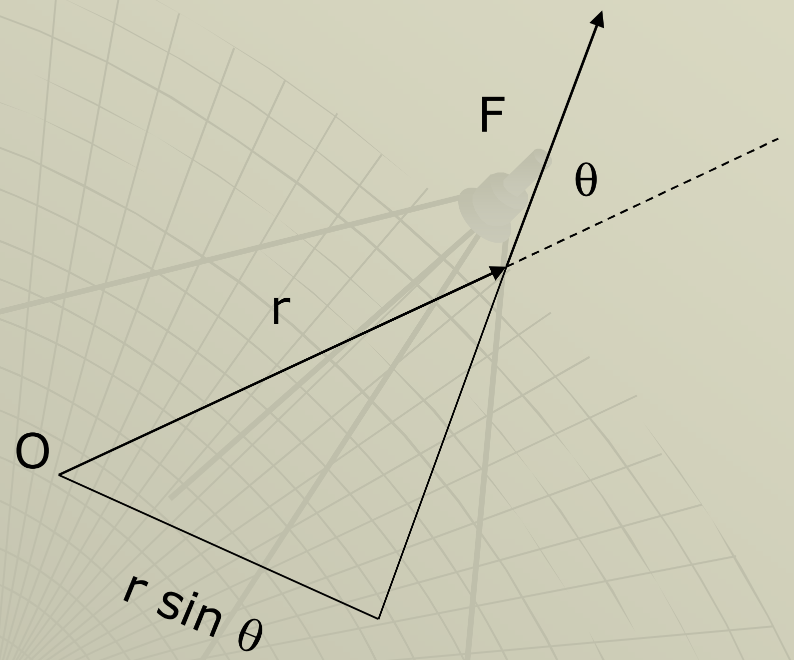
(Cross Product)

$$\mathbf{A \times B} = A_1B_1(0) + A_1B_2(k) + A_1B_3(-j)$$
$$+ A_2B_1(-k) + A_2B_2(0) + A_2B_3(i)$$
$$+ A_3B_1(j) + A_3B_2(-i) + A_3B_3(0)$$

$$\mathbf{A \times B} = (A_1B_2 - A_2B_1)\,k + (A_3B_1 - A_1B_3)\,j$$
$$+ (A_2B_3 - A_3B_2)\,i$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

Contoh perkalian silang dalam Fisika

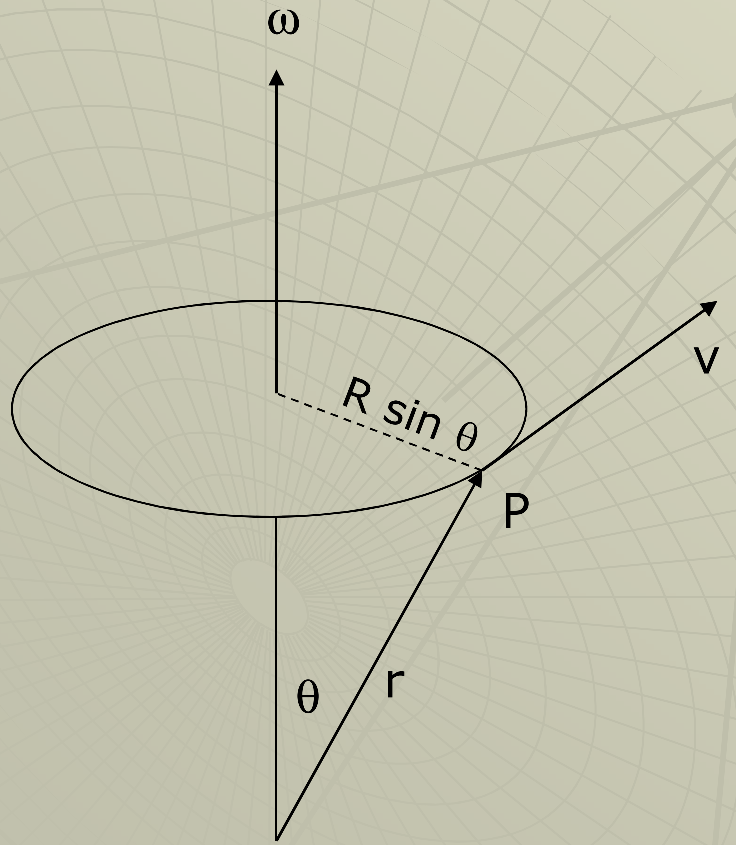


$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = r\,F\sin\theta = \vec{r}\times\vec{F}$$

Contoh Soal

Jika gaya **F = 2i - j + 3k** bekerja pada titik (2,-1,1), tentukan torsi dari **F** terhadap titik asal koordinat

Gerak melingkar



$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Perkalian tiga vektor

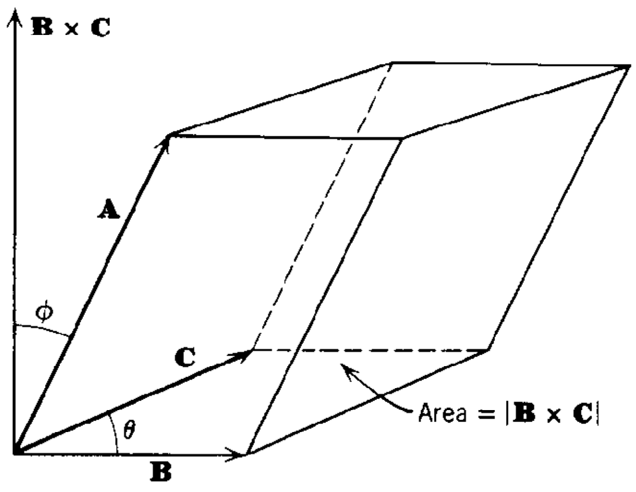


FIGURE 3.1

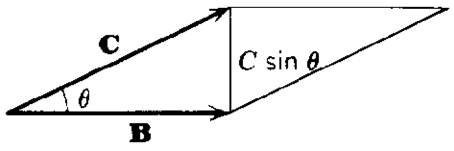
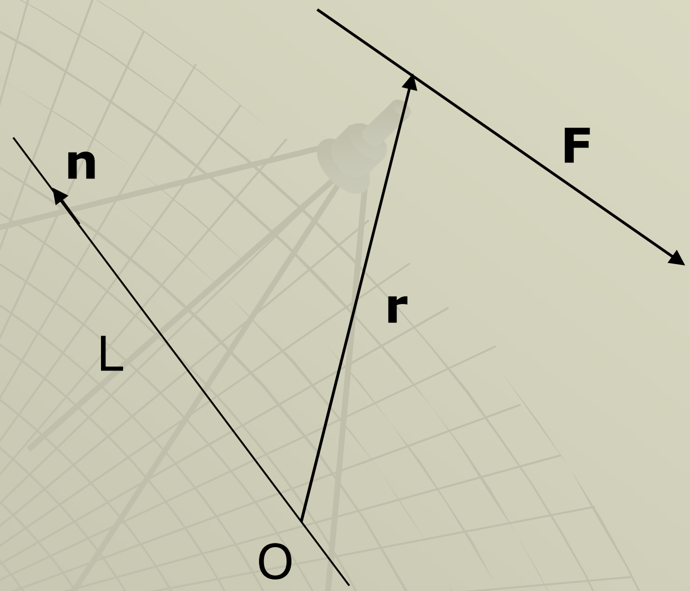


FIGURE 3.2

$$\left|\vec{B}\right|\left|\vec{C}\right|\sin\theta\left|\vec{A}\right|\cos\phi = \left|\vec{B}\times\vec{C}\right|\left|\vec{A}\right|\cos\phi = \vec{A}\bullet\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$$

Aplikasi Perkalian Skalar Tiga Vektor



Komponen torsi terhadap garis L :

$$\tau_{II} = \hat{n} \bullet \vec{\tau} = \hat{n} \bullet \left(\vec{r} \times \vec{F} \right)$$

Contoh Soal

Jika gaya $\mathbf{F} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ bekerja pada titik (1,1,1), tentukan komponen torsi dari $\mathbf{F}$ terhadap garis $\mathbf{r} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{k} + (2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k})t$.

Solusi:

Pertama kita tentukan vektor torsi terhadap sebuah titik pada garis yaitu titik (3,0,2). Torsi tersebut adalah τ = **r** x **F** dimana **r** adalah vektor berasal dari titik pada garis ke titik dimana **F** bekerja, yaitu dari (3,0,2) ke (1,1,1), sehingga **r** = (1,1,1) - (3,0,2) = (-2,1,-1). Dengan demikian vektor torsi τ :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

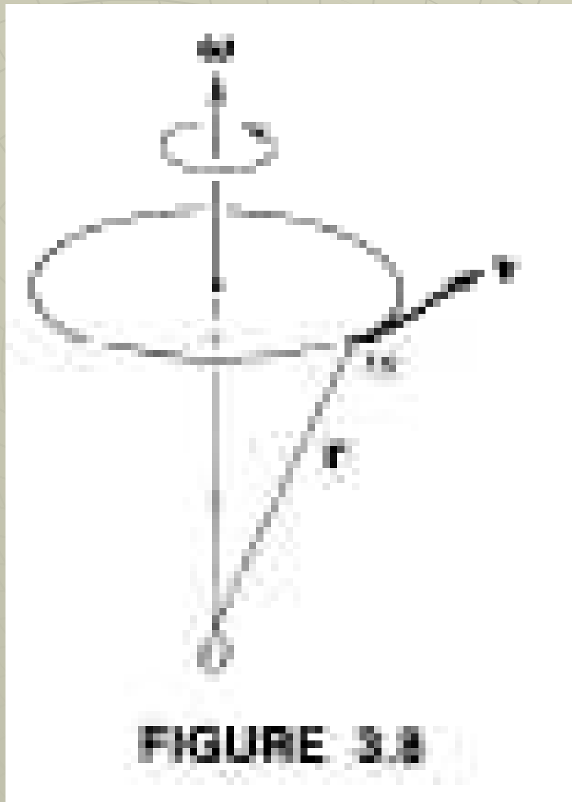
Contoh Torsi:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

- Torsi untuk garis adalah **n**.(**r**x**F**) dimana **n** adalah vaktor satuan sepajang garis, dengan **n** = 1/3(2**i**-2**j**+**k**).
- Kemudian torsi untuk garis adalah

  n.(**r**x**F**) = 1/3(2**i**-2**j**+**k**).(2**i**-3**j**-7**k**)=1

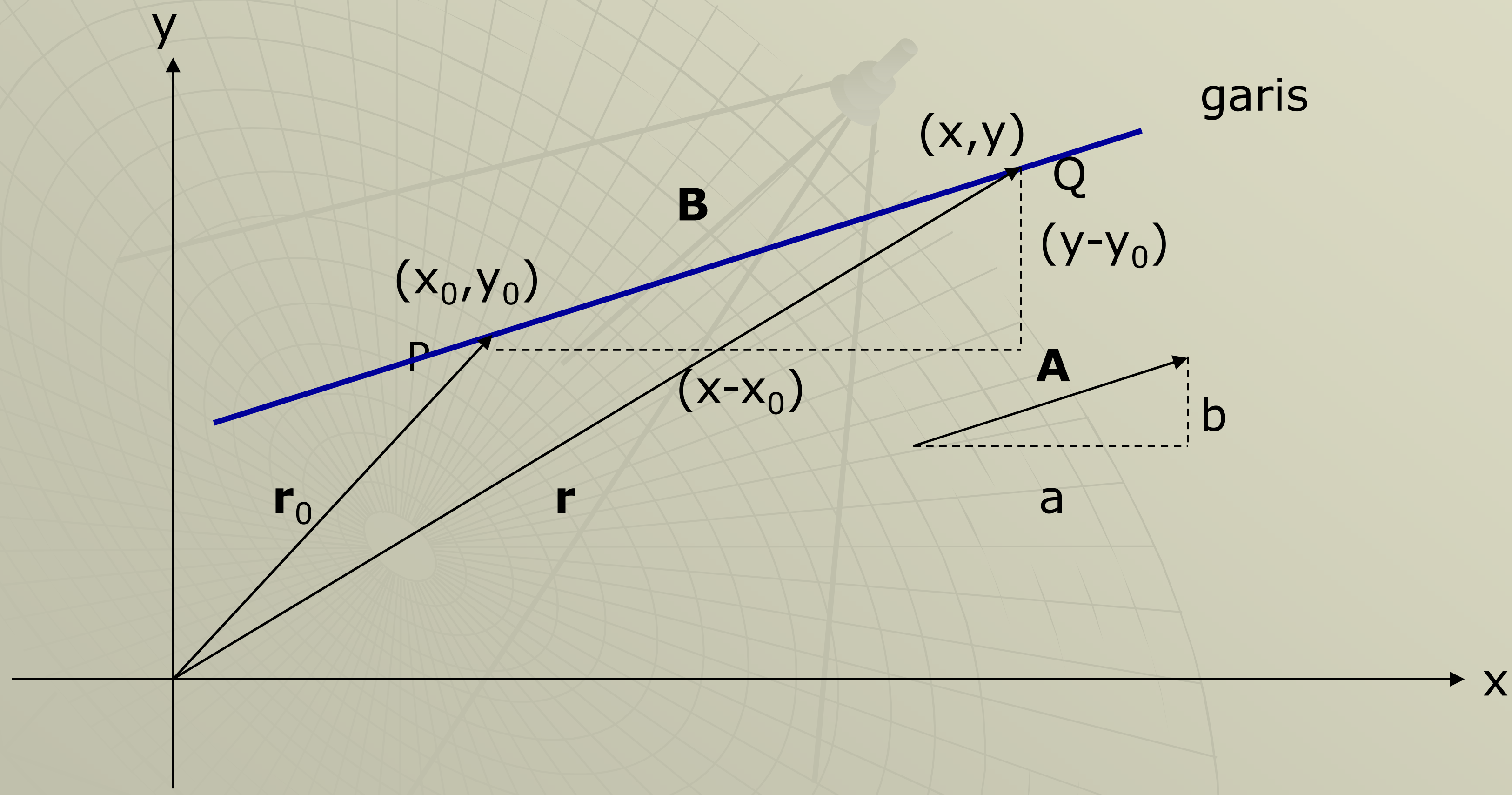
Aplikasi Tripel Scalar Product



- Aplikasi Tripel Scalar Product salah satunya pada momentum linear

PERSAMAAN GARIS LURUS DAN PERSAMAAN BIDANG

Persamaan Garis Lurus



Definisi Garis

Apakah garis itu?
Garis adalah deretan titik-titik secara kontinu

Dari gambar :
$\mathbf{B} = \mathbf{r} - \mathbf{r_0}$
dan
A // B (Perbandingan setiap komponen akan sama

dimana
$\mathbf{B} = (x\mathbf{i}+y\mathbf{j})-(x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j})$
$= (x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}$
dan
$\mathbf{A} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}$

sehingga

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}\rightarrow 2D$$

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\rightarrow 3D$$

Disebut persamaan garis lurus simetris

(x_0,y_0,z_0) adalah suatu titik yang dilalui garis a,b,c.
Komponen vektor arah.

Dari gambar di atas juga :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{B}$$

dan

$$\mathbf{B} = t\mathbf{A}$$

sehingga

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{A}t$$

$$= (x_0, y_0, z_0) + (a, b, c)t$$

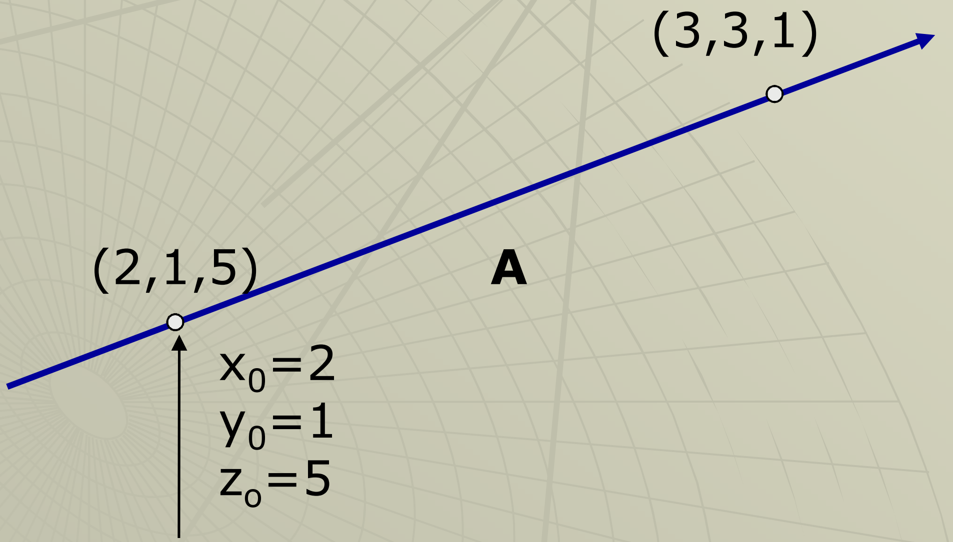
atau

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0 + \mathbf{k}z_0 + (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + z\mathbf{k})t$$

Disebut persamaan garis lurus parametrik

Contoh

Tentukan persamaan garis lurus parametrik dan simetrik yang melalui titik (2,1,5) dan titik (3,3,1)!



Solusi

$\mathbf{A} = (3,3,1) - (2,1,5)$

$\quad = (1,2,-4)$

$\mathbf{A} = \mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k}$

$\qquad a = 1, \;\; b = 2, \;\; c = -4$

Sehingga :

$\mathbf{r} = (2,1,5) + (1,2,-4)t$

atau

$$\mathbf{r} = \underbrace{2\mathbf{i}+\mathbf{j}+5\mathbf{k}}_{\text{Titik yang dilalui}}+\underbrace{(\mathbf{i}+2\mathbf{j}-4\mathbf{k})t}_{\text{Arah garis}} \longrightarrow \text{Persamaan garis parametrik}$$

Lanjutan…

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5}{-4}$$

$$x-2=\frac{y-1}{2}=\frac{z-5}{-4} \longrightarrow$$

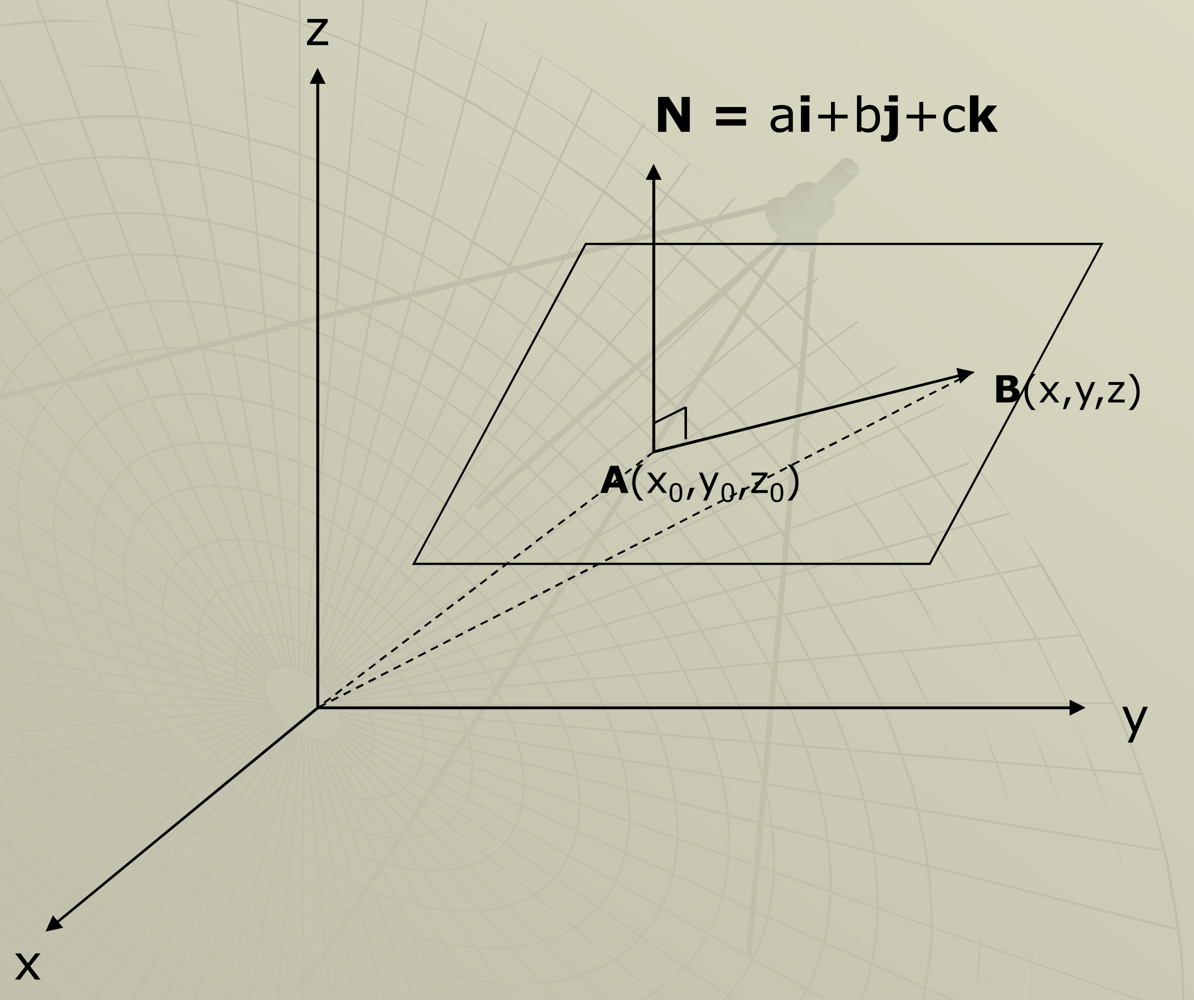
Persamaan Garis Simetrik

Latihan Soal

1. Cari suatu persamaan garis lurus melalui **(3,2,1)** dan sejajar dengan vektor (3**i**-2**j**+6**k**)!

2. Cari persamaan garis lurus yang melalui titik (3,0-5) dan sejajar dengan garis **r** = (2,1,-5) + (0,-5,1)t !

Persamaan Bidang



$\mathbf{AB}=(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}$

$\mathbf{N} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$

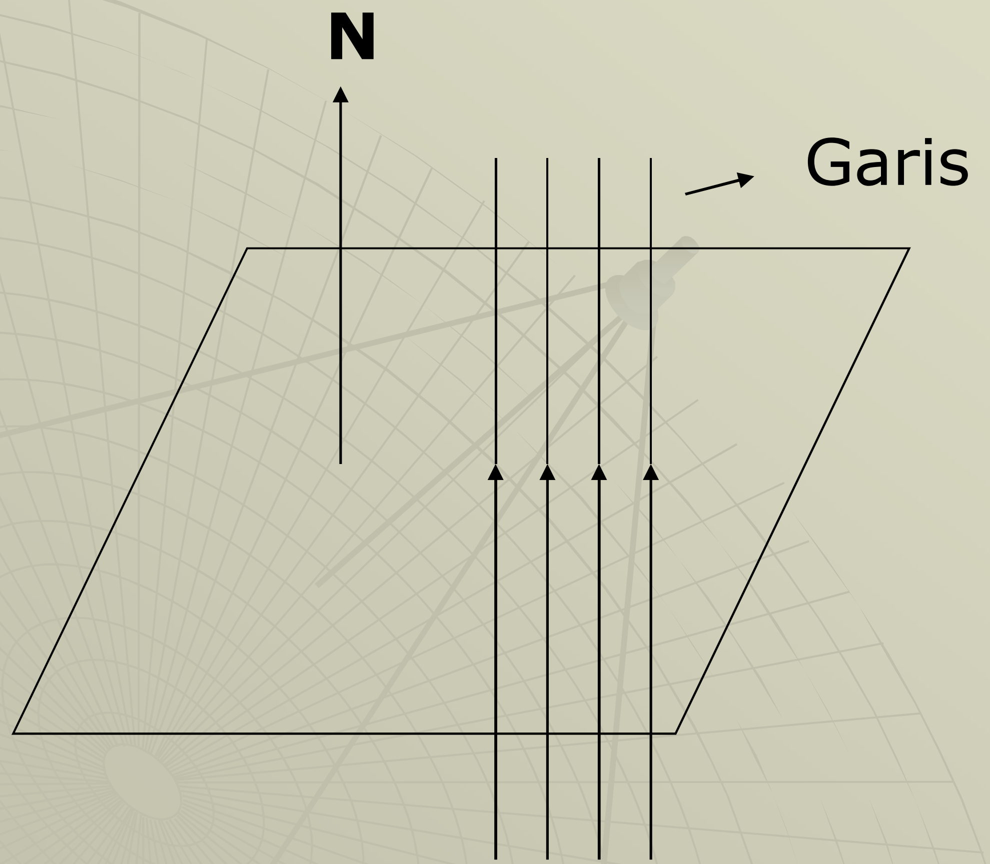
- Lakukan dot product antara **AB** dan **N**
- $\mathbf{N \cdot AB} = N \cdot AB \cdot \cos 90^o = 0$
- $(a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+z\mathbf{k}) \cdot [(x-x_0)\mathbf{i}+(y-y_0)\mathbf{j}+(z-z_0)\mathbf{k}]=0$
- $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
- $ax+by+cz=ax_0+by_0+cz_0$

Yang diperlukan minimal:

1. Vektor normal bidang (**N**)
2. Suatu titik pada bidang

   Jika diketahui 3 titik pada bidang bisa juga.

- Catatan: Jika suatu garis sejajar dengan arah bidangnya, maka $\theta=0$.

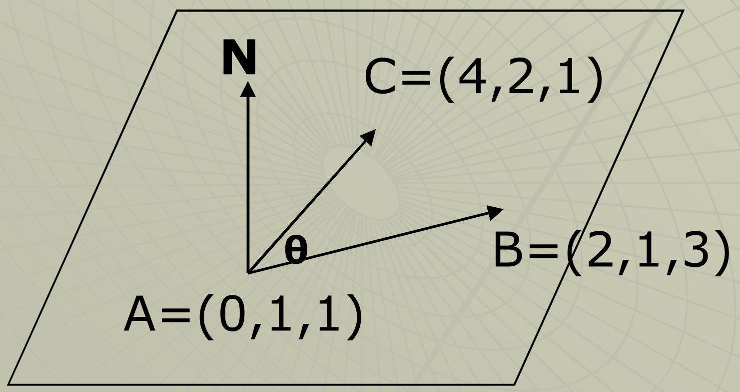


Catatan: Arah bidang selalu tegak lurus terhadap bidang

Contoh Soal:

1. Tentukan persamaan bidang yang mencakup 3 titik

   A=(0,1,1); B=(2,1,3); C=(4,2,1)



AB=B-A
AB=(2,1,3)-(0,1,1)
AB=(2,0,2)

AC=C-A
AC=(4,2,1)-(0,1,1)
AC=(4,1,0)

- **N=ABxAC**
- **N**=(2,0,2)x(4,1,0)
- **N**= $\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
- **N**=0+8**j**+2**k**+0-2**i**+0
- **N**=-2**i**+8**j+**2**k** →**a**=-2, **b**=8, **c**=2

Lanjutan… Solusi

- Titik yang ditinjau **A**=(0,1,1)
- $x_0=0$; $y_0=1$; $z_0=1$
- $ax+by+cz= ax_0+by_0+cz_0$
- $-2x+8y+2z=8+2$
- $-2x+8y+2z=10$

Latihan Soal:

1. Cari persamaan bidang melalui titik (1,-1,0) dan sejajar dengan garis $\mathbf{r}=(5\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k})+(2\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k})\mathbf{t}$!