

DERET PANGKAT
TAK HINGGA

TEOREMA-TEOREMA PENTING TERKAIT DERET PANGKAT

TEOREMA-TEOREMA PENTING

1. Integrasi dan diferensiasi deret pangkat dapat dilakukan per suku, yaitu:

$$\int_p^q \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_p^q C_n (x-a)^n dx, \quad p, q \in |x-a| \leq r$$

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} C_n (x-a)^n dx$$

Selang konvergensi seragam deret pangkat yang dihasilkan, sama seperti yang semula. Untuk kedua titik ujungnya, perlu diselidiki.

2. Dua deret pangkat dapat di-jumlah/kurang-kan, dan diperkalikan; deret yang dihasilkan memiliki selang konvergensi masing-masing deret. Jadi, misalkan I_1 dan I_2 selang konvergensi masing-masing deret, maka selang konvergensi deret yang dihasilkan adalah $I_1 \cap I_2$ (\cap lambang teori himpunan bagi irisan).

3. Dua deret pangkat dapat pula dibagi asalkan penyebutnya tak-nol di $x = a$, atau nol di $x = a$, tetapi tercoretkan (seperti $\frac{\ln(1+x)}{x}$ pada 2.22). Selang konvergensinya harus dicari kembali.
4. Suatu deret pangkat dapat disisipkan ke dalam deret pangkat lainnya, asalkan selang konvergensi deret yang disisipkan terkandung dalam deret lainnya. Jadi, misalkan I_1 selang konvergensinya I_2 , maka $I_1 \subseteq I_2$ (\subseteq lambang teori himpunan bagi himpunan bagian).

5. Pernyataan suatu fungsi $f(x)$ dalam deret pangkat konvergen, adalah *tunggal*. Artinya ada satu pernyataan deret pangkat untuk satu fungsi, sejauh variabel x berada dalam selang konvergensi deret.

URAIAN TAYLOR SEBUAH FUNGSI

- Suatu fungsi $S(x)$ yang diketahui, dapat pula dinyatakan dalam suatu deret pangkat. Kenyataan ini menguntungkan, karena deret pangkat sangat mudah ditangani secara analitis, ketimbang fungsi $S(x)$ sendiri. Misalnya, dalam perhitungan integral dari fungsi $S(x)$, bila seandainya $S(x)$ adalah suatu fungsi rumit yang integralnya tak terdapat dalam tabel integral.

- Sebagai contoh, integral tentu berikut:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx$$

- Muncul dalam praktik, yaitu pada persoalan difraksi Fresnel gelombang cahaya oleh sebuah celah. Integral jenis ini tak terdaftarkan dalam tabel integral, karena hasilnya tak dapat diungkapkan dalam pernyataan suatu fungsi primitif tertentu. Dalam pasal ini akan dibahas bagaimana integral jenis ini dan perhitungan numerik (secara angka) lainnya dengan menggunakan metode deret pangkat.

- Menguraikan sebuah fungsi $f(x)$ yang diketahui atas deret pangkat. Secara umum, kita tulis

$$f(x) = C_0 + C_1(x - a) + C_2(x - a)^2 + \cdots + C_n(x - a)^n + \cdots$$

- Tetapan a dapat pula bernilai nol.

- Masalah selanjutnya adalah:
 - a. Menentukan nilai-nilai koefisien C_n , sebagai fungsi dari n , sehingga penulisan di atas berupa suatu identitas (berlaku bagi semua nilai x).
 - b. Menentukan selang konvergensi deret pangkatnya dalam identitas (a) berlaku.

- Dengan menerapkan teorema diferensiasi deret pangkat pada (2.31), kita peroleh:

$$f(a) = C_0 + C_1(0) + C_2(0)^2 + \cdots + C_n(0)^n + \cdots = C_0$$

$$f'(a) = 0 + C_1 + 2C_2(0) + \cdots + nC_n(0)^{n-1} + \cdots = C_1$$

$$f''(a) = 0 + 0 + 2 \cdot 1 C_2 + \cdots + n(n-1)C_n(0)^{n-2} + \cdots = 2!C_2$$

.....

$$f^n(a) = 0 + 0 + 0 + \cdots + n!C_n + 0 + \cdots = n!C_n$$

Jadi:

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

- Dengan demikian,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \dots$$
$$+ \frac{1}{n!} f^n(a)(x-a)^n + \dots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(a)(x-a)^n$$

Pernyataan deret dari fungsi

Selang konvergensi

$$1. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

Semua nilai x

$$2. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

Semua nilai x

$$3. e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

Semua nilai x

$$4. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

$-1 < x \leq 1$

$$5. (1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + \frac{p(p-1)(p-2)x^3}{3!} + \dots, \quad |x| < 1$$

Disebut **deret Binomial**, dengan p adalah bilangan real positif atau negatif

Teknik-teknik untuk mendapatkan pernyataan deret suatu fungsi

A. Perkalian suatu deret dengan suatu polinomial atau perkalian deret dengan deret

Contoh 1

Untuk mencari pernyataan deret dari : $(x+1)\sin x$

Maka kita lakukan perkalian $(x+1)$ Dengan deret $\sin x$ Sbb :

$$(x+1)\sin x = (x+1)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

$$(x+1)\sin x = x + x^2 - \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{3!} \dots$$

Contoh 2

Untuk mencari pernyataan deret dari : $e^x \cos x$

Maka kita lakukan perkalian deret e^x Dengan deret $\cos x$ Sbb :

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \right) \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \right) \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} \dots \\ &\quad - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{2!} - \frac{x^4}{2!2!} \dots \\ &\quad + \frac{x^4}{4!} \dots \\ &= 1 + x + 0x^2 - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} \dots = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} \dots \end{aligned}$$

B. Pembagian suatu deret dengan deret lainnya atau dengan suatu polinomial

Contoh 1

Untuk mencari pernyataan deret dari : $\frac{1}{x} \ln(1+x)$

Maka kita lakukan pembagian $\ln(1+x)$ Dengan deret x Sbb :

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \ln(1+x) &= \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right) \\ &= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots \end{aligned}$$

Contoh 2

Untuk mencari pernyataan deret dari : $\frac{1}{1+x}$

Maka kita lakukan pembagian 1 Dengan $(1+x)$ Sbb :

$$\begin{array}{r} 1 - x + x^2 - x^3 \dots \\ 1 + x \overline{) 1} \\ \underline{1 + x} \\ -x \\ \underline{-x - x^2} \\ x^2 \\ \underline{x^2 + x^3} \\ -x^3 \dots, \end{array}$$

Contoh 3

Untuk mencari pernyataan deret dari : $\tan x$

Maka kita lakukan pembagian deret $\sin x$ dengan deret $\cos x$ Sbb :

$$\begin{array}{r}
 x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \dots \\
 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \bigg) x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \\
 \hline
 x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} \dots \\
 \hline
 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} \dots \\
 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} \dots \\
 \hline
 \frac{2x^5}{15} \dots, \dots
 \end{array}$$

C. Menggunakan deret Binomial

Contoh 1

Untuk mencari pernyataan deret dari : $\frac{1}{x+1}$ (contoh B2)

Digunakan deret Binomial Sbb :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &= (1+x)^{-1} = 1 - x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \dots \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots\end{aligned}$$

Hasilnya sama dengan contoh B2

D. Substitusi suatu polinomial atau suatu deret untuk variabel dalam deret lain

Contoh 1

Untuk mencari pernyataan deret dari : e^{-x^2}

Maka kita lakukan substitusi $-x^2$ pada variabel x dalam deret e^x Sbb :

$$\begin{aligned} e^{-x^2} &= 1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \dots \\ &= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Contoh 2

Untuk mencari pernyataan deret dari : $e^{\tan x}$ kita lakukan substitusi sbb :

$$e^{\tan x} = 1 + \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots\right) + \frac{1}{2!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots\right)^2 + \frac{1}{3!} \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots\right)^3 + \frac{1}{4!} (x + \dots)^4 + \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$+ \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{2!} \frac{2x^4}{3} \dots$$

$$+ \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 \dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3}{8} x^4 \dots$$

E. Metode Kombinasi

Contoh 1

Untuk mencari pernyataan deret dari : $\text{arc tan } x$

Digunakan metode Sbb :

karena
$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \text{arc tan } t \Big|_0^x = \text{arc tan } x,$$

Kita tuliskan $\frac{1}{1+t^2}$ Sebagai deret Binomial sbb :

$$(1+t^2)^{-1} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots; \quad \text{sehingga}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots \Big|_0^x.$$

$$\text{arc tan } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots.$$

Soal latihan

1. $\frac{e^x}{1-x}$

2. $\sec x$

3. $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \int_0^x \frac{dt}{1-t^2}$

4. $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

E. Uraian Taylor melalui uraian Mc-Laurin

Contoh 1

Untuk mencari pernyataan deret Taylor dari fungsi $\ln x$ disekitar $x = 1$, kita tuliskan:

$$\ln x = \ln [1 + (x - 1)]$$

Lalu gunakan uraian McLaurin untuk :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots,$$

Kemudian ganti x dengan $(x-1)$, didapat :

$$\ln x = \ln(1+(x-1)) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \dots,$$

Contoh 2

Cari uraian Taylor dari fungsi $\cos x$ di sekitar $x = 3\pi/2$

Kita tuliskan:

$$\cos x = \cos \left[\frac{3\pi}{2} + \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) \right] = \sin \left(x - \frac{3\pi}{2} \right)$$

Lalu gunakan uraian McLaurin untuk :

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

Kemudian ganti x dengan $(x - 3\pi/2)$, didapat :

$$\cos x = \sin \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) = \left(x - \frac{3\pi}{2} \right) - \frac{\left(x - \frac{3\pi}{2} \right)^3}{3!} + \frac{\left(x - \frac{3\pi}{2} \right)^5}{5!} + \dots$$

Soal Latihan

Cari uraian Taylor dari fungsi-fungsi berikut melalui uraian McLaurin :

1. $f(x) = \frac{1}{x}$ disekitar $a = 1$

2. $f(x) = \sqrt{x}$ disekitar $a = 25$

Beberapa penggunaan deret

A. Perhitungan secara numerik

Contoh 1

hitunglah $\ln \sqrt{(1+x)/(1-x)} - \tan x$ di $x = 0,0015$

$$\begin{aligned} \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \tan x \Big|_{x=0.0015} &= \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} \dots \right) \\ &\quad - \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} \dots \right) \Big|_{x=0.0015} \\ &= \frac{x^5}{15} + \frac{4x^7}{45} \dots \Big|_{x=0.0015} = 5.06 \times 10^{-16} \end{aligned}$$

Contoh 2

hitunglah $\left. \frac{d^4}{dx^4} \left(\frac{1}{x} \sin x^2 \right) \right|_{x=0.1}$

$$\frac{1}{x} \sin x^2 = \frac{1}{x} \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} \dots \right) = x - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^9}{5!} \dots$$

Lakukan diferensiasi empat kali dan masukan $x=0,1$, didapat :

$$\left. -\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2x}{3!} + \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6x^5}{5!} \right|_{x=0.1} = -2 + 0.00025 \dots$$

B. Penjumlahan deret

Contoh 1

hitunglah $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

Mulai dengan deret :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Ambil $x = 1$

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Jadi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = 0,69$$

Soal latihan

1. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \dots$ Gunakan $\arctan x$

2. $\frac{\pi^2}{3!} - \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^6}{7!} - \dots = \dots$ Gunakan $\frac{\sin x}{x}$

3. $\ln 3 + \frac{(\ln 3)^2}{2!} + \frac{(\ln 3)^3}{3!} + \dots = \dots$ Gunakan $e^x - 1$

C. Menghitung integral tertentu

Contoh :

hitunglah $\int_0^1 \sin x^2 dx$ Integral Fresnel, dijumpai pada persoalan Difraksi Fresnel

Mulai dengan deret :

$$\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots$$

$$\int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{11 \cdot 5!} - \dots$$

$$= 0.33333 - 0.02381 + 0.00076 - \dots = 0.31028 - .$$

D. Menghitung Limit

Contoh :

hitunglah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x}$.

Jawab :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 + x + (x^2/2!) + \dots)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(-1 - \frac{x}{2!} - \dots \right) = -1.\end{aligned}$$

Soal latihan

$$1. \int_0^{0,01} \sqrt{t} e^{-t} dt$$

$$2. \frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{x^2 e^x}{1-x} \right) \quad di \quad x = 0,01$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x)}{x}$$

E. Menentukan nilai e

Gunakan pernyataan deret pangkat untuk e^x dengan $x = 1$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

$$e = 1 + 1 + \frac{1^2}{2!} + \frac{1^3}{3!} + \frac{1^4}{4!} + \dots,$$

$$e = 2 + 0,5 + 0,17 + 0, \dots + \dots = 2,718..$$

F. Menentukan akar suatu bilangan

Tentukanlah nilai $\sqrt{9}$ dengan deret Binomial

Deret Binomial :

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)x^2}{2!} + \frac{p(p-1)(p-2)x^3}{3!} + \dots,$$

Kita tidak bisa menulis $\sqrt{9}$ dengan $\sqrt{1+8}$ atau $(1+8)^{1/2}$

Karena konvergensi deret Binomial adalah $|x| < 1$

Untuk menyelesaikan ini gunakan resep berikut :

$$(a)^{1/n} = \left(\frac{b}{c} \right) \left(a \left(\frac{c}{b} \right)^n \right)^{1/n} \quad \text{Dengan } b \gg c$$

Jadi nilai $\sqrt{9}$

$$(9)^{1/2} = \left(\frac{10}{2}\right) \left(9 \left(\frac{2}{10}\right)^2\right)^{1/2}$$

$$(9)^{1/2} = 5 \left(\frac{36}{100}\right)^{1/2} = 5 \left(\frac{100}{100} - \frac{64}{100}\right)^{1/2} = 5(1 - 0,64)^{1/2}$$

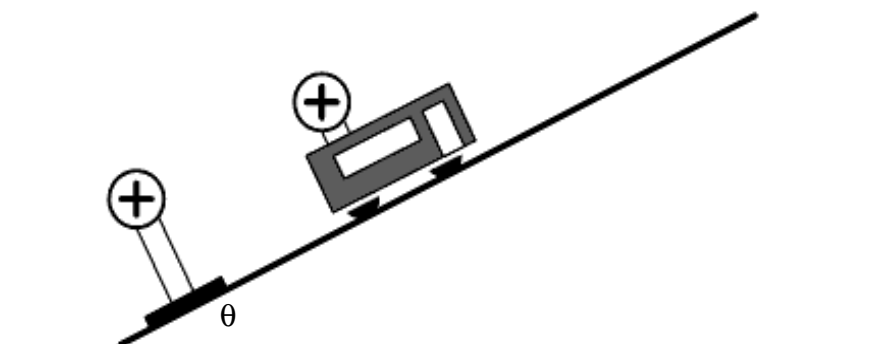
$$(9)^{1/2} = 5 \left(1 + 0,5(-0,64) - \frac{1(0,64)^2}{8} + \dots\right) = 3$$

Itulah hasilnya

Aplikasi Deret Pangkat pada Persoalan Fisika

Contoh 1

Selesaikan dengan menggunakan metode deret pangkat yang cocok !
Sebuah kereta luncur bermassa m berada pada sebuah jalur tanjakan dengan sudut kemiringan θ terhadap horizontal. Di dekat bagian bawah jalur terdapat sebuah tiang bermuatan listrik positif. Muatan yang positif yang sama ditempatkan pula di atas kereta. Jika gesekan kereta luncur dengan lintasan diabaikan dan diasumsikan percepatan gravitasi g , berapakah besar gaya tolak Coulomb (F) yang diperlukan agar kereta luncur tersebut tetap diam di tempatnya. Petunjuk tuliskan F dalam deret pangkat dari θ .



Aplikasi Deret Pangkat pada Persoalan Fisika

Solusi : Agar kereta tetap di tempatnya, maka :

$$\sum F = 0$$

$$F_C = F_w \sin \theta$$

$$F_C = mg \sin \theta$$

$$F_C = mg \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots \right)$$

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan Metode Deret Pangkat

Cari solusi PDB berikut :

$$y' = 2xy$$

Dengan metode pemisahan variabel

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \qquad \frac{dy}{y} = 2x dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int 2x dx$$

$$\ln y = x^2 + \ln c$$

$$y = Ce^{x^2}$$

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan Metode Deret Pangkat

Mencari solusi dengan metode deret pangkat, dimulai dengan :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

PDB yang dicari solusinya berorde satu (y'), maka perlu dicari y' :

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

PDB :

$$y' = 2xy \quad \longrightarrow \quad y' - 2xy = 0$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

$$-2xy = -2a_0x - 2a_1x^2 - 2a_2x^3 + \dots$$

$$0 = \dots + \dots x + \dots x^2 + \dots x^3 + \dots$$

+

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan Metode Deret Pangkat

Buat matriks seperti berikut :

$$\begin{array}{c}
 y' \\
 -2xy
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 x^0 \\
 x \\
 x^2 \\
 x^3
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 a_1 \\
 2a_2 \\
 3a_3 \\
 4a_4
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 0 \\
 -2a_0 \\
 -2a_1 \\
 -2a_2
 \end{array}$$

+

$$0 = (a_1 - 0) + (2a_2 - 2a_0) + (3a_3 - 2a_1) + (4a_4 - 2a_2) + \dots$$

didapat :

$$\begin{array}{cccc}
 a_1 - 0 = 0 & 2a_2 - 2a_0 = 0 & 3a_3 - 2a_1 = 0 & 4a_4 = 2a_2 \\
 a_1 = 0 & a_2 = a_0 & a_3 = \frac{2}{3}a_1 = 0 & a_4 = \frac{2}{4}a_2 = \frac{1}{2}a_0
 \end{array}$$

Solusi Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dengan Metode Deret Pangkat

Dengan demikian :

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

$$y = a_0 + 0x + a_0x^2 + 0x^3 + \frac{1}{2}a_0x^4 + 0x^5 + \frac{1}{3}a_0x^6 + \dots$$

$$y = a_0 + a_0x^2 + \frac{1}{2}a_0x^4 + \frac{1}{3}a_0x^6 + \dots$$

$$y = a_0 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \dots \right)$$

$$y = a_0 e^{x^2}$$

Sama dengan hasil sebelumnya

Soal Latihan

Cari solusi PDB Berikut dengan metode deret pangkat

1. $y' = 3x^2 y$

2. $y' = xy + x$

3. $y'' + y = 4 \sin 3x$

SELESAI

TERIMA KASIH...