

# Fungsi Khusus Lanjutan (PDB)

---

MATEMATIKA FISIKA II  
JURDIK FISIKA FPMIPA UPI  
Bandung

# Fungsi Khusus dalam bentuk PDB terdiri atas :

---

- Polinomial Legendre dalam berbagai jenis
  - Fungsi Bessel dalam berbagai bentuk
  - Polinomial Hermite
  - Polinomial Laguarre
- 
- Semua point di atas diperoleh dari solusi-solusi Persamaan Differensial (PD) Laguarre, PD Bessel, dst

# Diperlukan pengetahuan tentang metode- metode untuk mencari solusi PD :

---

- Telah dipelajari metode analitik untuk mencari solusi PDB orde I dengan PDB orde II dikenal :
    - Metode pemisahan variable
    - Metode linier orde I
    - Metode PD homogen
    - Metode Bernoulli
    - Metode reduksi orde
    - Metode Variasi parameter
- } PDB ORDE I
- } PDB ORDE II
- Metode aproksimasi dengan deret pangkat

# Mencari Solusi PDB dengan metode deret pangkat

- Solusi PDB = hubungan eksplisit antara variabel terikat dan variabel bebas yang jika kita substitusikan ke PDB yang bersangkutan akan menghasilkan suatu identitas.
- Dengan metode deret pangkat kita misalkan :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n$$

$$y' = 0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots + na_n x^{n-1}$$

$$y'' = 0 + 0 + 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots + n(n-1)a_n x^{n-2}$$

**Sudah dibahas dalam deret pangkat**

# Persamaan Diferensial Legendre

---

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \ell(\ell+1)y = 0 \rightarrow \text{metode deret pangkat } y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Solusi :

$$y = a_0 \left( 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{2!} x^2 + \frac{\ell(\ell+1) + (\ell-2)(\ell+3)}{4!} x^4 - \dots \right) \\ + a_1 \left( x - \frac{(\ell-1)(\ell-2)}{3!} x^3 + \frac{(\ell+1) + (\ell+2)(\ell-3)(\ell-4)}{5!} x^5 - \dots \right) + \dots$$

Dengan menggunakan tes rasio maka deret ini memiliki selang konvergensi  $x^2 < 1$  dan tidak konvergen untuk

$$x^2 = 1$$

# Polinomial Legendre

---

$\ell \rightarrow$  suatu konstanta sebarang

$\ell = 0 \Rightarrow y = a_0 +$  deret pangkat dengan koefisien  $a_1$

$\ell = 1 \Rightarrow y = a_1 x +$  deret pangkat dengan koefisien  $a_0$

$\ell = 2 \Rightarrow y = a_0 (1 - 3x^2) +$  deret pangkat dengan koefisien  $a_1$

$\ell = 3 \Rightarrow y = a_1 (x - \frac{5}{3}x^3) +$  deret pangkat dengan koefisien  $a_0$

# Secara umum setiap nilai $\ell$ ,

---

dihasilkan suatu deret pangkat dan lainnya suatu polinomial dimana deret pangkat yang dihasilkan bersifat divergen pada nilai  $x^2 = 1$  . Selanjutnya jika nilai-nilai  $a_0$  dan  $a_1$

Pada setiap polinomial dipilih sedemikian rupa sehingga nilai  $y = 1$  untuk  $x^2 = 1$

Maka akan dihasilkan suatu polinomial yang disebut polynomial legendre ditulis dengan

$$P_{\ell}(x)$$

# Polynomial Legendre

---

$$\begin{aligned} \therefore \ell = 0 &\Rightarrow y = a_0 \\ &\downarrow y = 1, x = 1 \\ 1 = a_0 &\Rightarrow a_0 = 1 \\ P_0(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \ell = 1 &\Rightarrow y = a_1 x \\ &\downarrow y = 1, x = 1 \\ 1 = a_1 \cdot 1 &\Rightarrow a_1 = 1 \\ P_1(x) &= x \end{aligned}$$



$$\therefore \ell = 2 \Rightarrow y = a_0(1 - 3x^2)$$

$$\downarrow y = 1, x = 1$$

$$1 = a_0(1 - 3(1)^2)$$

$$1 = a_0(-2)$$

$$a_0 = -\frac{1}{2}$$

$$P_2(x) = -\frac{1}{2}(1 - 3x^2)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_2(x) = \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$\therefore \ell = 3 \Rightarrow y = a_1 \left( x - \frac{5}{3}x^3 \right)$$

$$\downarrow y = 1, x = 1$$

$$1 = a_1 \left( 1 - \frac{5}{3} \right)$$

$$a_1 = -\frac{3}{2}$$

$$P_3(x) = -\frac{3}{2} \left( x - \frac{5}{3}x^3 \right)$$

$$P_3(x) = \frac{3}{2} \left( \frac{5}{3}x^3 - x \right)$$

$$P_3(x) = \left( \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \right)$$

# Formula Rodriguez :

---

$$P_{\ell}(x) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} \frac{d^{\ell}}{dx^{\ell}} (x^2 - 1)^{\ell}$$

$$P_0(x) = \frac{1}{2^0 0!} \frac{d^0}{dx^0} (x^2 - 1)^0 = 1 \Rightarrow P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = \frac{1}{2^1 1!} \frac{d^1}{dx^1} (x^2 - 1)^1 = \frac{1}{2} (2x) \Rightarrow P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2^2 2!} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 - 1)^2 = \frac{1}{8} \left( \frac{d}{dx} (2(x^2 - 1)(2x)) \right) = \frac{1}{8} \left( \frac{d}{dx} (4x(x^2 - 1)) \right)$$

$$P_2(x) = \frac{1}{8} (4(x^2 - 1) + 4x(2x)) = \frac{1}{8} (4x^2 - 4 + 8x^2) = \frac{1}{8} (12x^2 - 4)$$

$$\Rightarrow P_2(x) = \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{2}$$

# Fungsi Pembangkit Polinomial Legendre

Fungsi pembangkit polinomial legendre dirumuskan sebagai berikut :

$$\phi(x, h) = (1 - 2xh + h^2)^{-\frac{1}{2}}, |h| < 1$$

Disebut fungsi pembangkit polinomial legendre karena dari fungsi ini dapat dibangkitkan polinomial legendre.

Misalkan :  $2xh - h^2 = y$

Maka  $\phi(y) = (1 - y)^{-\frac{1}{2}}$  gunakan uraian deret binomial  $(1 + x)^p$

$$\phi(y) = 1 + \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + \dots$$

## Substitusi kembali:

---

$$y = 2xh - h^2$$

$$\phi(x, h) = 1 + xh - \frac{1}{2}h^2 + \frac{3}{8}(2xh - h^2)^2 + \dots$$

$$\phi(x, h) = 1 + xh - \frac{1}{2}h^2 + \frac{3}{8}(4x^2h^2 - 4xh^3 + 4h^4) + \dots$$

$$\phi(x, h) = 1 + xh + h^2 \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) + \dots$$

$$\phi(x, h) = P_0(x) + hP_1(x) + h^2P_2(x) + \dots$$

**Fungsi Pembangkit Polinomial Legendre berguna untuk mencari hubungan-hubungan rekursif polinomial legendre:**

---

$$\text{a) } \ell P_\ell(x) = (2\ell - 1)xP_{\ell-1}(x) - (\ell - 1)P_{\ell-2}(x)$$

$$\text{b) } xP'_\ell(x) - P'_{\ell-1}(x) = \ell P_\ell(x)$$

$$\text{c) } P'_\ell(x) - xP'_{\ell-1}(x) = \ell P_{\ell-1}(x)$$

$$\text{d) } (1 - x^2)P'_\ell(x) = \ell P_{\ell-1}(x) - \ell xP_\ell(x)$$

$$\text{e) } (2\ell + 1)P_\ell(x) = P'_{\ell+1}(x) - P'_{\ell-1}(x)$$

## Buktikan hubungan rekursif a)

---

$$\phi = (1 - 2xh + h^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial h} = -\frac{1}{2}(1 - 2xh + h^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x + 2h)$$

$$(1 - 2xh + h^2) \frac{\partial \phi}{\partial h} = (x - h)\phi$$

Tetapi  $\phi = \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell} P_{\ell}(x)$

# Maka:

---

$$(1 - 2xh + h^2) \frac{\partial}{\partial h} \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell} P_{\ell}(x) = (x - h) \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell} P_{\ell}(x)$$

$$(1 - 2xh + h^2) \sum_{\ell=0}^{\infty} \ell h^{\ell-1} P_{\ell}(x) = (x - h) \sum_{\ell=0}^{\infty} h^{\ell} P_{\ell}(x)$$

$$\ell h^{\ell-1} P_{\ell}(x) - 2xh \ell h^{\ell-1} P_{\ell}(x) + h^2 \ell h^{\ell-1} P_{\ell}(x) = xh^{\ell} P_{\ell}(x) - hh^{\ell} P_{\ell}(x)$$

$$\ell h^{\ell-1} P_{\ell}(x) - 2x\ell h^{\ell} P_{\ell}(x) + \ell h^{\ell+1} P_{\ell}(x) = xh^{\ell} P_{\ell}(x) - h^{\ell+1} P_{\ell}(x)$$

$$\ell h^{\ell-1} P_{\ell}(x) - 2x(\ell-1)h^{\ell-1} P_{\ell-1}(x) + (\ell-2)h^{\ell-1} P_{\ell-2}(x) = xh^{\ell-1} P_{\ell-1}(x) - h^{\ell-1} P_{\ell-2}(x)$$

$$\ell P_{\ell}(x) - 2x(\ell-1)P_{\ell-1}(x) + (\ell-2)P_{\ell-2}(x) = xP_{\ell-1}(x) - P_{\ell-2}(x)$$

Atau:

---

$$\ell P_\ell(x) = (2\ell - 1)xP_{\ell-1}(x) - (\ell - 1)P_{\ell-2}(x)$$

$$P_0(x) = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} P_0(x) = 1 \\ \\ \\ \\ P_1(x) = x \end{array} \right\} \ell = 2 \rightarrow 2P_2(x) = (2 \cdot 2 - 1)xP_1(x) - (1)P_0(x)$$

$$2P_2(x) = 3x \cdot x - 1$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$



Nyatakan  $x - x^3$  dalam kombinasi linier polinomial-polinomial legendre!

---

$$P_3(x) = \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x \quad x^3 = \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}x$$

$$x - x^3 = x - \left( \frac{2}{5}P_3(x) + \frac{3}{5}x \right) = x - \frac{2}{5}P_3(x) - \frac{3}{5}x$$

$$= \frac{2}{5}x - \frac{2}{5}P_3(x)$$

$$= \frac{2}{5}(P_1(x) - P_3(x))$$

# Ortogonalitas Polinomial Legendre:

Dua buah vektor dikatakan ortogonal jika keduanya saling tegak lurus mengapit sudut  $90^\circ$ . Menurut perkalian titik (*dot product*) dua vektor yang ortogonal memenuhi :

$$\begin{aligned}\vec{A} \bullet \vec{B} &= |\vec{A}| |\vec{B}| \cos 90^\circ \\ \vec{A} \bullet \vec{B} &= 0\end{aligned}$$

Karena  $\vec{A} = A_1 \hat{i} + A_2 \hat{j} + A_3 \hat{k}$

Maka  $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = 0$  atau

$$\sum_{i=1}^3 A_i B_i = 0 \rightarrow 3D$$

Secara umum dua buah vektor yang saling tegak lurus memenuhi

$$\sum_{i=1} A_i B_i = 0$$

---

Analogi dengan itu jika kita memiliki dua fungsi kontinu yaitu  $A(x)$  dan  $B(x)$  maka kedua fungsi tersebut akan saling ortogonal dalam selang  $(a, b)$  jika memenuhi:

$$\int_a^b A(x)B(x)dx = 0$$

Jika  $A(x)$   $B(x)$  merupakan fungsi kompleks maka syarat  $A(x)$  dan  $B(x)$  orthogonal ditulis sebagai berikut :

$$\int_a^b A^*(x)B(x)dx = 0$$

$A^*(x) \rightarrow$  kompleks berkonjugat dengan  $A(x)$

---

Jika kita memiliki himpunan fungsi  $A_n(x)$  dimana  $n = 1, 2, 3, \dots, dst$

$$\int_a^b A_n(x)A_m(x)dx = \begin{cases} 0; m \neq n \\ \text{konstanta jika } m = n \neq 0 \end{cases}$$

maka fungsi-fungsi  $A_n(x)$  disebut himpunan fungsi ortogonal

# Contoh :

---

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} 0; m \neq n \\ \pi; m = n \neq 0 \end{cases}$$

Maka  $\sin nx$  merupakan himpunan fungsi-fungsi yang ortogonal dalam selang  $(-\pi, \pi)$

$$\int_{-1}^1 P_{\ell}(x) P_m(x) dx = 0 \text{ kecuali untuk } \ell = m$$

Pertanyaan apakah?

$P_1(x)$  ortogonal dengan  $P_2(x)$

$P_0(x)$  ortogonal dengan  $P_3(x)$

$P_2(x)$  ortogonal dengan  $P_5(x)$

# Bukti:

---

$$\text{PD Legendre } (1-x^2)y''-2xy'+\ell(\ell+1)y=0$$

$$\Rightarrow y = P_\ell(x)$$

$$(1-x^2)P_\ell''(x) - 2xP_\ell'(x) - \ell(\ell+1)P_\ell(x) = 0$$

$$\otimes \frac{d}{dx} [(1-x^2)P_\ell'(x)] + \ell(\ell+1)P_\ell(x) = 0 \quad \text{atau}$$

$$\otimes \otimes \frac{d}{dx} [(1-x^2)P_m'(x)] + m(m+1)P_m(x) = 0$$

$$\otimes P_m(x) \left\{ \frac{d}{dx} [(1-x^2)P_\ell'(x)] + \ell(\ell+1)P_\ell(x) \right\} = 0$$

$$\otimes \otimes P_\ell(x) \left\{ \left[ \frac{d}{dx} (1-x^2)P_m'(x) \right] + m(m+1)P_m(x) \right\} = 0$$

Selanjutnya  $\otimes$  dikurangi  $\otimes \otimes$  didapat :  $\otimes \otimes \otimes$

$$P_m(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2)P'_\ell(x)] - P_\ell(x) \frac{d}{dx} [(1-x^2)P'_m(x)] + [\ell(\ell+1) - m(m+1)]P_m(x)P_\ell(x) = 0$$

dua suku pertama  $\otimes \otimes \otimes$  menjadi :

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2)(P_m(x)P'_\ell(x) - P_\ell(x)P'_m(x))] + [\ell(\ell+1) - m(m+1)]P_m(x)P_\ell(x) = 0$$

Kemudian lakukan integrasi  $\otimes \otimes \otimes$  untuk selang  $(-1,1)$

$$\int_{-1}^1 \left\{ \underbrace{\frac{d}{dx} [(1-x^2)(P_m(x)P'_\ell(x) - P_\ell(x)P'_m(x))]}_{\text{Suku I}} + \underbrace{[\ell(\ell+1) - m(m+1)]P_m(x)P_\ell(x)}_{\text{Suku II}} \right\} dx = 0$$

---

$$\begin{aligned}\text{Suku I} &= \int_{-1}^1 \frac{d}{dx} \left[ (1-x^2)(P_m(x)P_\ell'(x) - P_\ell(x)P_m'(x)) \right] dx \\ &= \left[ (1-x^2)(P_m(x)P_\ell'(x) - P_\ell(x)P_m'(x)) \right]_{-1}^1 = 0\end{aligned}$$

$$\text{Suku II} = [\ell(\ell+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_\ell(x)P_m(x) dx$$

$$\text{Suku I} + \text{Suku II} = 0$$

$$0 + [\ell(\ell+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_\ell(x)P_m(x) dx = 0$$

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x)P_m(x) dx = \frac{0}{[\ell(\ell+1) - m(m+1)]} = 0$$



Polinomial-polinomial legendre merupakan fungsi-fungsi yang saling ortogonal:

---

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x)P_m(x)dx = 0$$

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x)P_m(x)dx = 0$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

$$\int_{-1}^1 x \left( \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2} \right) dx = \int_{-1}^1 \left( \frac{3}{2}x^3 - \frac{1}{2}x \right) dx = \left( \frac{3}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2 \right)_{-1}^1 = \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \right) - \left( \frac{3}{8} - \frac{1}{4} \right) = 0$$

$$\int_{-1}^1 P_1(x)P_1(x)dx = \int_{-1}^1 x^2 dx = \left( \frac{1}{3}x^3 \right)_{-1}^1 = \frac{1}{3} - \left( -\frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$$

# Normalisasi polinomial legendre

---

## Vektor satuan

$$\hat{u} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \longrightarrow \text{Besarnya satu satuan}$$

disebut proses normalisasi  
tinjau untuk fungsi

$$\int_a^b A(x)A(x)dx = \int_a^b |A(x)|^2 dx = N^2$$

Berapa normalisasi  $A(x)$  dalam selang  $(a,b)$  ?

---

Jadi jika  $A(x)$  dinormalisasi dalam selang  $(a, b)$  maka

$A(x)$  dikali dengan  $\frac{1}{N}$  setelah dinormalisasi

$$\frac{A(x)}{N} \text{ nilainya} = 1$$

$\frac{1}{N}$  disebut faktor normalisasi

# Contoh:

---

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin nx dx = \pi = (\sqrt{\pi})^2$$

Normalisasi fungsi  $\sin nx$  ?  $N = \sqrt{\pi}$

Faktor normalisasi fungsi  $\sin nx$  ?  $\frac{1}{N} = \sqrt{\frac{1}{\pi}}$

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} \sin nx = 1$$

Berapa normalisasi untuk  $P_\ell(x)$  ?

---

Hubungan Rekursif Polinomial Legendre b)  $xP'_\ell(x) - P'_{\ell-1}(x) = \ell P_\ell(x)$

Kalikan  $\otimes$  dengan  $P_\ell(x)$

$$\ell P_\ell(x)P_\ell(x) = xP_\ell(x)P'_\ell(x) - P_\ell(x)P'_{\ell-1}(x) \otimes \otimes$$

$\otimes \otimes$  integrasikan untuk selang  $(-1,1)$

$$\ell \int_{-1}^1 P_\ell(x)P_\ell(x)dx = \int_{-1}^1 xP_\ell(x)P'_\ell(x)dx - \underbrace{\int_{-1}^1 P_\ell(x)P'_{\ell-1}(x)dx}_0$$

$$\ell \int_{-1}^1 P_\ell(x)P_\ell(x)dx = \underbrace{\int_{-1}^1 xP_\ell(x)P'_\ell(x)dx}_{\text{by part}} \int u dv$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = P_\ell(x)P_\ell'(x)dx = P_\ell(x)d(P_\ell(x))$$

---

$$v = \frac{1}{2}(P_\ell(x))^2$$

Ruas kanan dengan integral *bypart*:

$$\left[ \frac{1}{2}x(P_\ell(x))^2 \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_\ell(x)P_\ell'(x)dx \quad \text{dengan demikian:}$$

$$\ell \int_{-1}^1 P_\ell(x)P_\ell'(x)dx = \left[ \frac{1}{2}x(P_\ell(x))^2 \right]_{-1}^1 - \frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_\ell(x)P_\ell'(x)dx$$

$$\left( \ell + \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 P_\ell(x)P_\ell'(x)dx = \frac{1}{2}(P_\ell(1))^2 + \frac{1}{2}(P_\ell(-1))^2$$

Jadi 
$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_\ell(x) dx = \frac{1}{\ell + \frac{1}{2}}$$

---

$$\int_{-1}^1 P_\ell(x) P_\ell(x) dx = \frac{1}{\frac{2\ell + 1}{2}} = \frac{2}{2\ell + 1}$$

Berapa normalisasi untuk  $P_\ell(x)$ ?  $N = \sqrt{\frac{2}{2\ell + 1}}$

Faktor normalisasi?  $\frac{1}{N} = \sqrt{\frac{2\ell + 1}{2}}$

# Fungsi Legendre yang Diasosiasikan

PDB yang mirip dengan Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[ \ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0 \quad \text{dengan} \quad m^2 \leq \ell^2$$

PDB ini memiliki solusi :  $y = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x)$

Solusi ini disebut fungsi legendre yang diasosiasikan yang ditulis sebagai :

$$P_\ell^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_\ell(x)$$



# Formula Rodriguez untuk mencari fungsi legendre yang diasosiasikan :

---

$$P_{\ell}^m(x) = \frac{1}{2^{\ell} \ell!} (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (x^2-1)^{\ell}$$

Untuk  $m$  negatif fungsi legendre asosiasi dapat ditentukan dengan formula sebagai berikut :

$$P_{\ell}^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} P_{\ell}^m(x)$$

Fungsi  $P_{\ell}^m(x)$  untuk setiap  $m$  merupakan himpunan fungsi-fungsi yang orthogonal pada selang  $(-1,1)$  sehingga :

$$\int_{-1}^1 P_{\ell}^m(x) P_n^m(x) dx = 0, \ell \neq n$$

# Normalisasi fungsi Legendre yang diasosiasikan adalah :

---

$$\int_{-1}^1 P_m^\ell(x) P_\ell^m(x) dx = \frac{2}{2\ell + 1} \frac{(\ell + m)!}{(\ell - m)!}$$

PDB legendre diasosiasikan sering juga ditulis dalam bentuk sebagai berikut :

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dy}{d\theta} \right) + \left[ \ell(\ell + 1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] y = 0$$

Fungsi ini diperoleh dengan mengganti  $x = \cos \theta$

$$P_1^1(\cos \theta) ?$$

$$P_1^1(\cos \theta)?$$

$$P_1^1(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} P_1(x)$$

$$P_1^1(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} (x)$$

$$P_1^1(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 1$$

$$P_1^1(x) = \sqrt{(1 - x^2)}$$

$$P_1^1(x) = \sqrt{(1 - \cos^2 x)}$$

$$P_1^1(x) = \sqrt{(\sin^2 x)}$$

$$P_1^1(x) = \sin x$$



# PDB Bessel

---

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

$P$  adalah konstan, tidak perlu bilangan bulat, disebut orde fungsi Bessel. Dengan menggunakan metode deret pangkat, PDB Bessel dapat dicari solusinya.

Solusi pertama yang memenuhi PDB Bessel adalah:

$$y = a_0 x^p \Gamma(1+p) \left[ \frac{1}{\Gamma(1+p)} - \frac{1}{\Gamma(2+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! \Gamma(3+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{3! \Gamma(4+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right]$$

atau

$$y = a_0 2^p \left(\frac{x}{2}\right)^p \Gamma(1+p) \left[ \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1+p)} - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{\Gamma(3)\Gamma(3+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{\Gamma(4)\Gamma(4+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^6 + \dots \right]$$

## Jika dipilih

---

$$y = a_0 = \frac{1}{2^p \Gamma(1+p)} \quad \text{atau} \quad a_0 = \frac{1}{2^0 p!} \quad \text{Maka:}$$

$y$  disebut sebagai Fungsi Bessel

Jenis pertama yang ditulis sebagai  $J_p(x)$

Dengan demikian :

$$J_p(x) = \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^p - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2+p} + \frac{1}{\Gamma(3)\Gamma(3+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{4+p} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+1+p)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

Solusi kedua yang memenuhi PDB Bessel menghasilkan fungsi Bessel jenis kedua sebagai berikut :

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Gamma(n+1)\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

# Hubungan

---

$$J_p(x) \text{ dan } J_{-p}(x) \rightarrow J_{-p}(x) = (-1)^p J_p(x)$$

$$\rightarrow p = 0$$

$$\begin{aligned} J_0(x) &= \frac{1}{\Gamma(1)\Gamma(1)} \left(\frac{x}{2}\right)^0 - \frac{1}{\Gamma(2)\Gamma(2)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{\Gamma(3)\Gamma(3)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots \\ &= 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{64 \cdot 36} + \dots \end{aligned}$$

# Hubungan Rekursif Fungsi Bessel :

---

$$\text{a) } \frac{d}{dx} [x^p J_p(x)] = x^p J_{p-1}(x)$$

$$\text{b) } \frac{d}{dx} [x^{-p} J_p(x)] = -x^{-p} J_{p+1}(x)$$

$$\text{c) } J_{p-1}(x) + J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x)$$

$$\text{d) } J_{p-1}(x) - J_{p+1}(x) = 2J_p'(x)$$

$$\text{e) } J_p'(x) = -\frac{p}{x} J_p(x) + J_{p-1}(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x)$$

# PDB umum yang solusinya mengandung fungsi bessel

$$y'' + \frac{1-2a}{x} y' + \left[ (bcx^{c-1})^2 + \frac{a^2 - p^2 c^2}{x^2} \right] y = 0$$

Solusinya  $y = x^a J_p(bx^c)$

$$y'' - \frac{1}{x} y' + \left( 4 + \frac{1}{x^2} \right) y = 0$$

$$x^0 \equiv x^{2c-2}$$

$$1 - 2a = -1 \quad b^2 c^2 = 4$$

$$2a = 2 \quad b^2 (1) = 4$$

$$a = 1 \quad b = \pm 2$$

$$2c - 2 = 0$$

$$2c = 2$$

$$c = 1$$

$$a^2 - p^2 c^2 = 1$$

$$(1)^2 - p^2 (1)^2 = 1$$

$$p^2 = 0$$

$$p = 0$$

$$y = x J_0(2x)$$





# Jenis-jenis lain fungsi bessel:

---

a) Fungsi Bessel jenis ketiga disebut fungsi Henkel

$$\left. \begin{aligned} H_p^{(1)}(x) &= J_p(x) + iN_p(x) \\ H_p^{(2)}(x) &= J_p(x) - iN_p(x) \end{aligned} \right\} \text{Bandingkan dengan } e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$$

di sini 
$$N_p(x) = Y_p(x) = \frac{\cos(\pi p)J_p(x) - J_{-p}(x)}{\sin(\pi p)}$$

b) Fungsi Bessel Hiperbolik

$$I_p(x) = i^{-p} J_p(ix)$$

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2} i^{p+1} H_p^{(1)}(ix)$$

---

c) Fungsi Bessel Sferik

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{(2n+1)}{2}}(x) = x^n \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{\sin x}{x} \right)$$

$$Y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{\frac{(2n+1)}{2}}(x) = -x^n \left( -\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left( \frac{\cos x}{x} \right)$$

$$h_p^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_p(x)$$

$$h_p^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_p(x)$$

# Ortogonalitas Fungsi Bessel

---

$$\int_0^1 x J_p(ax) J_p(bx) dx = 0; a \neq b$$

$a$  dan  $b$  pembuat nol  $J_p(x)$

Diketahui  $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$

Dengan menggunakan hubungan rekursif b) Fungsi Bessel.  
Cari !

$J_{\frac{3}{2}}(x)$  kemudian cari  $J_0(x), J_1(x)$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = ?$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) =$$

$$\frac{d}{dx} \left[ x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x) \right] = -x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(x)$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = -x^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ x^{-\frac{1}{2}} \left( \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \right) \right] = -x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(x)$$

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right)$$

$$\frac{d}{dx} \left[ x^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x \right] = -x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(x)$$

$$J_0(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x = \frac{\sin x}{x}$$

$$-x^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \left[ \frac{\sin x}{x} \right] = J_{\frac{3}{2}}(x)$$

$$J_1(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cdot \left( -x^{\frac{1}{2}} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left( \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \right) = \left( \frac{-x \cos x + \sin x}{2} \right)$$

# Fungsi Hermite

---

Persamaan Differensial untuk fungsi hermite :

$$y_n'' - x^2 y_n = -(2n+1)y_n; n=0,1,2,3$$

Solusi PDB ini adalah  $y_n = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$  disebut sebagai fungsi Hermite

Jika fungsi hermite ini dikalikan dengan  $(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}}$   
akan didapat polinomial hermite

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

Untuk  $n = 0, 1, 2, \dots$  didapat

---

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

Polinomial hermite memenuhi persamaan differensial hermite

$$y_n'' - 2xy' + 2ny = 0$$

Ortogonalitas polinomial hermite

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0; n \neq m = 0$$

# Normalisasi polinomial hermite

---

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \sqrt{\pi} 2^n n!; n = m$$

Fungsi pembangkit polinomial hermite

$$\phi(x, h) = e^{2xh - h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{h^n}{n!}$$

Hubungan rekursif polinomial hermite :

a)  $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$

b)  $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$

$$H_2(x) = 2x(2x) - 2 = 4x^2 - 2$$

# Fungsi Laguarre

---

Polinomial laguarre merupakan solusi dari PDB :

$$xy'' + (1 - x)y' + ny = 0$$

Dapat dicari dengan formula Rodriguez sebagai berikut :

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x})$$

Untuk  $n = 0, 1, 2, \dots$  didapat:

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = 1 - x$$

$$L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}$$



# Ortogonalitas polinomial laguarre

---

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_k(x) dx = 0; n \neq k$$

Normalisasi polinomial laguarre

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_k(x) dx = 1; n = k$$

Fungsi pembangkit polinomial laguarre

$$\phi(x, h) = \frac{e^{-\frac{xh}{1-h}}}{1-h} = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) h^n$$

## Hubungan rekursif polinomial laguarre :

---

a)  $L'_{n+1}(x) - L'_n(x) + L_n(x) = 0$

b)  $(n+1)L_{n+1}(x) - (2n+1-x)L_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$

c)  $xL'_n(x) - nL_n(x) + nL_{n-1}(x) = 0$

# HAVE FINISHED...



*Go to the next concept...*