DERET FOURIER

1. PENDAHULUAN

Dalam bab ini akan dibahas uraian deret dari suatu fungsi periodic. Jenis fungsi ini menarik karena sering muncul dalam berbagai persoalan fisika, seperti getaran mekanik, arus listrik bolak-balik (AC), gelombang bunyi, gelombang Elektromagnet, hantaran panas, dsb.

Sama halnya seperti pada uraian deret Taylor, fungsi-fungsi periodik yang rumit dapat dianalisis secara sederhana dengan cara menguraikannya ke dalam suatu deret fungsi periodik sederhana yang dibangun oleh fungsi Sin x dan Cos x atau fungsi eksponensial e^{ix}. Uraian deret fungsi periodik ini disebut uraian deret Fourier. Penamaan ini untuk menghargai jasa matematikawan Perancis Joseph Fourier, yang pertama kali merumuskan deret ini dalam sebuah makalah mengenai hantaran panas, yang dilaporkannya kepada akademi ilmu pengetahuan Perancis pada tahun 1807.

2. FUNGSI PERIODIK

Definisi 1:

Sebuah fungsi f(x) dikatakan periodic dengan periode T > 0, jika berlaku:

$$f(x \pm T) = f(x)$$

untuk samua x.

catatan:

(a) Jika T adalah periode terkecil, maka T disebut periode dasar, dan selang $a \leq x \leq a + T$, dimana a sebuah konstanta, disebut selang dasar fungsi periodic f(x). Untuk selanjutnya sebutan periode dimaksudkan bagi periode dasar ini.

(b) Konstanta a pada selang dasar dapat dipilih sembarang, berharga nol atau negatif. Pilihan a = - T/2 sering digunakan untuk memberikan selang dasar yang simetris terhadap x = 0, yakni selang $-T/2 \leq x \leq T/2$.

Contoh fungsi periodik yang paling sederhana adalah fungsi Sin x dan Cos x, karena:

Sin (x $\pm$ 2π) = Sin x dan Cos (x $\pm$ 2π) = Cos x

Yang menunjukkan bahwa keduanya memiliki periode T = 2π. Dalam hal ini x adalah variabel sudut dengan satuan <u>radian</u> atau <u>derajad.</u> Bila x bukan merupakan variabel sudut, maka x harus dikalikan dengan suatu faktor alih p, sehingga $px = \alpha$ berdimensi sudut. Jadi satuan p adalah:

$$[satuan\ p] = \frac{[radian]}{[Satuan\ x]}$$

Misalkan x berdimensi panjang, dengan satuan meter (m), maka satuan p = rad/m. Dengan demikian pernyataan fungsi Sin dan Cos yang bersangkutan menjadi:

Sin x → Sin px ; Cos x → Cos px

Jadi translasi sudut $\alpha = px$ sebesar satu periode T = 2π dapat dialihkan ke translasi variabel x sejauh $\pm$ T, dengan syarat:

$$px \pm 2\pi = p(x \pm T)$$

Hubungan ini mengaitkan p dengan T melalui hubungan:

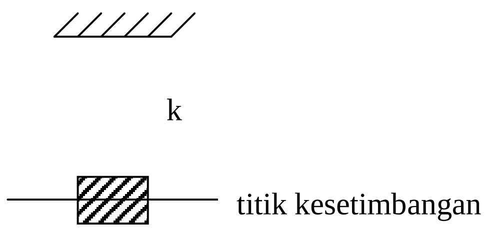
$$p = \frac{2\pi}{T}$$

Dengan pernyataan faktor alih ini, sifat periodik fungsi sin px dan cos px diberikan oleh hubungan:

$$\sin px = \sin p(x \pm T); \cos px = \cos p(x \pm T)$$

Yang memperlihatkan bahwa sin px dan cos px adalah periodik dengan periode T. Khusus dalam hal T = 2π, maka p = 1.

Salah satu contoh sederhana benda bermassa m ang digantungkan pada ujung sebuah pegas dengan tetapan pegas k.



Jika benda ditarik sejauh A dari kedudukan setimbangnya, kemudian dilepaskan, benda tersebut akan bergerak secara harmonik sederhana akibat adanya gaya pemulih yang arahnya selalu berlawanan dengan arah simpangan benda. Simpangan vertikal benda y(t) setiap saat t berubah-ubah dari kedudukan setimbangnya, menurut persamaan:

$$y(t) = A\cos(\omega t + \Phi_0)$$

Besaran A dan ω berturut-turut adalah amplitudo dan frekuensi sudut getaran, sedangkan $\Phi = (\omega t + \Phi_0)$ adalah fase getaran, dengan ϕ_0 sebagai fase awalnya, yang berdimensi sudut.

Jika T adalah periode atau waktu getar (waktu yang diperlukan benda untuk melakukan satu kali getaran) yang diukur dalam satuan detik, maka $\omega = 2\pi / T$, bersatuan (rad/s). Dengan demikian ω merupakan faktor alih (p) yang membuat ωt berdimensi sudut.

3. DERET FOURIER

Andaikan f(x) adalah sebuah fungsi periodik dengan periode T yang terdefinisikan dalam selang dasar a ≤ x ≤ a + T, yakni f(x) = f (x ± T), maka fungsi f(x) melalui hubungan integaral:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Dimana T = periode dan L = ½ periode.

Contoh 1.

Diketahui fungsi f(x) sebagai berikut:

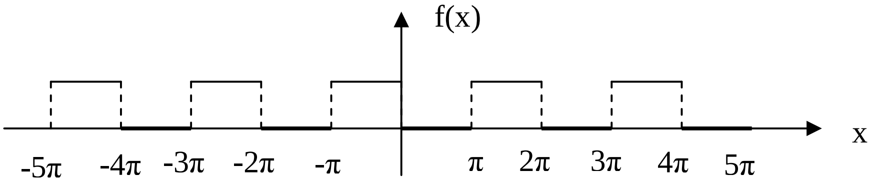
$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Periodik dengan periode 2π sehingga f(x ± 2π) = f(x)

Uraikan fungsi ini dalam uraian deret Fourier.

<u>Pemecahan:</u>

Menurut definisi fungsi periodik, periode fungsi f(x) di atas adalah T = 2π, dengan demikian L = ½ T = π, selang dasarnya $-\pi \leq x \leq \pi$, jadi a = - π. Di luar selang ini, f(x) didefinisikan sebagai perluasan selang dasar ke arah kiri dan kanan sumbu x, seperti terlihat pada gambar 1.



Gambar 1

Koefisien-koefisien Fourier dapat dicari sebagai berikut: