DERET FOURIER

MATEMATIKA FISIKA II

JURUSAN PENDIDIKAN FISIKA
FPMIPA UPI

PENDAHULUAN

- Dalam bab ini akan dibahas **uraian deret dari suatu fungsi periodik**. Jenis fungsi ini menarik karena sering muncul dalam berbagai persoalan fisika, **seperti getaran mekanik, arus listrik bolak-balik (AC), gelombang bunyi, gelombang Elektromagnet, hantaran panas, dsb**.
- Sama halnya seperti pada uraian deret Taylor, **fungsi-fungsi periodik** yang rumit dapat **dianalisis secara sederhana** dengan cara menguraikannya ke dalam suatu deret fungsi periodik sederhana yang dibangun oleh **fungsi sin x dan cos x atau fungsi eksponensial** e^{ix}. Uraian deret fungsi periodik ini disebut **uraian deret Fourier.**
- Penamaan ini untuk menghargai jasa matematikawan **Perancis Joseph Fourier**, yang pertama kali merumuskan deret ini dalam sebuah makalah mengenai hantaran panas, yang dilaporkannya kepada akademi ilmu pengetahuan Perancis pada tahun **1807**.

Fungsi Periodik

Definisi 1:

Sebuah fungsi f(x) dikatakan periodik dengan periode T > 0, jika berlaku:

$$f(x \pm T) = f(x)$$

untuk samua x.

catatan:

Jika T adalah periode terkecil, maka T disebut periode dasar, dan selang $a \le x \le a + T$, dimana a sebuah konstanta, disebut selang dasar fungsi periodik f(x). Untuk selanjutnya sebutan periode dimaksudkan bagi periode dasar ini.

Konstanta a pada selang dasar dapat dipilih sembarang, berharga nol atau negatif. Pilihan $a = -T/2$ sering digunakan untuk memberikan selang dasar yang simetris terhadap $x = 0$, **yakni selang $-T/2 \le x \le T/2$.**

- Contoh fungsi periodik yang paling sederhana adalah fungsi sin x dan cos x, karena:

  $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ dan $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$

- Yang menunjukkan bahwa keduanya memiliki periode $T = 2\pi$. Dalam hal ini x adalah variabel sudut dengan satuan **<u>radian</u>** atau **<u>derajad</u>**. Bila **x** bukan merupakan **variabel sudut**, maka **x** harus dikalikan dengan suatu **faktor alih p**, sehingga **berdimensi sudut**. Jadi satuan p adalah:

$$[satuan\ p] = \frac{[radian]}{[Satuan\ x]}$$

- Misalkan x berdimensi panjang, dengan satuan meter (m), maka satuan p = rad/m. Dengan demikian pernyataan fungsi Sin dan Cos yang bersangkutan menjadi:

  $\sin x \rightarrow \sin px \quad ; \quad \cos x \rightarrow \cos px$

- Jadi translasi sudut sebesar satu periode T = 2π dapat dialihkan ke translasi variabel x sejauh ± T, dengan syarat:

$$px \pm 2\pi = p(x \pm T)$$

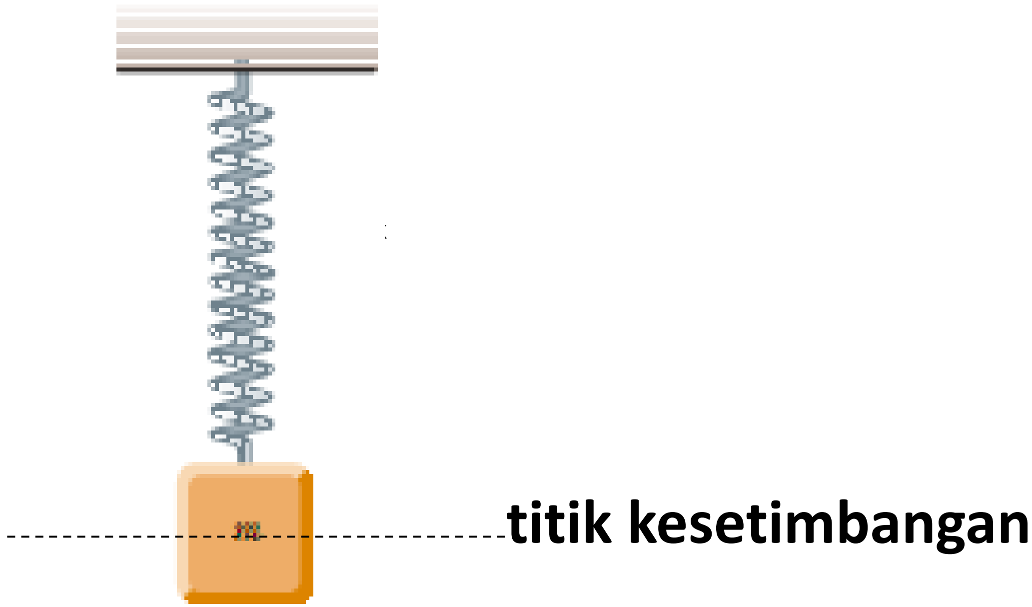
- Hubungan ini mengaitkan *p* dengan *T* melalui hubungan:

$$p = \frac{2\pi}{T}$$

- Dengan pernyataan faktor alih ini, sifat periodik fungsi *sin px* dan *cos px* diberikan oleh hubungan:

$$\sin px = \sin p(x \pm T); \cos px = \cos p(x \pm T)$$

- Yang memperlihatkan bahwa *sin px* dan *cos px* adalah periodik dengan periode T. Khusus dalam hal $T = 2\pi$, maka $p = 1$.
- Salah satu contoh sederhana benda bermassa *m* yang digantungkan pada ujung sebuah pegas dengan tetapan pegas *k.*



- Jika benda ditarik sejauh *A* dari kedudukan setimbangnya, kemudian dilepaskan, benda tersebut akan bergerak secara harmonik sederhana akibat adanya gaya pemulih yang arahnya selalu berlawanan dengan arah simpangan benda.
- Simpangan vertikal benda *y(t)* setiap saat *t* berubah-ubah dari kedudukan setimbangnya, menurut persamaan:

$$y(t) = A\cos(\omega t + \Phi_0)$$

- Besaran *A* dan *ω* berturut-turut adalah amplitudo dan frekuensi sudut getaran, sedangkan $\Phi = (\omega t + \Phi_0)$ adalah fase getaran, dengan ϕ_0 sebagai fase awalnya, yang berdimensi sudut.

- Jika T adalah periode atau waktu getar (waktu yang diperlukan benda untuk melakukan satu kali getaran) yang diukur dalam satuan detik, maka , $\omega = 2\pi / T$ bersatuan (rad/s). Dengan demikian ω merupakan faktor alih (p) yang membuat ωt berdimensi sudut.

Deret Fourier

- Andaikan f(x) adalah sebuah fungsi periodik dengan periode T yang T terdefinisikan dalam selang dasar a $\leq$ x $\leq$ a + T, yakni f(x) = f (x $\pm$ T), maka fungsi f(x) dapat diuraikan dalam deret Fourier sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L})$$

Dengan koefisien-koefisien a_0, a_n, dan b_n yang disebut sebagai koefisien-koefisien Fourier, ditentukan oleh fungsi f(x) melalui hubungan integaral:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

Dengan T = periode dan L = ½ periode.

Contoh 1.

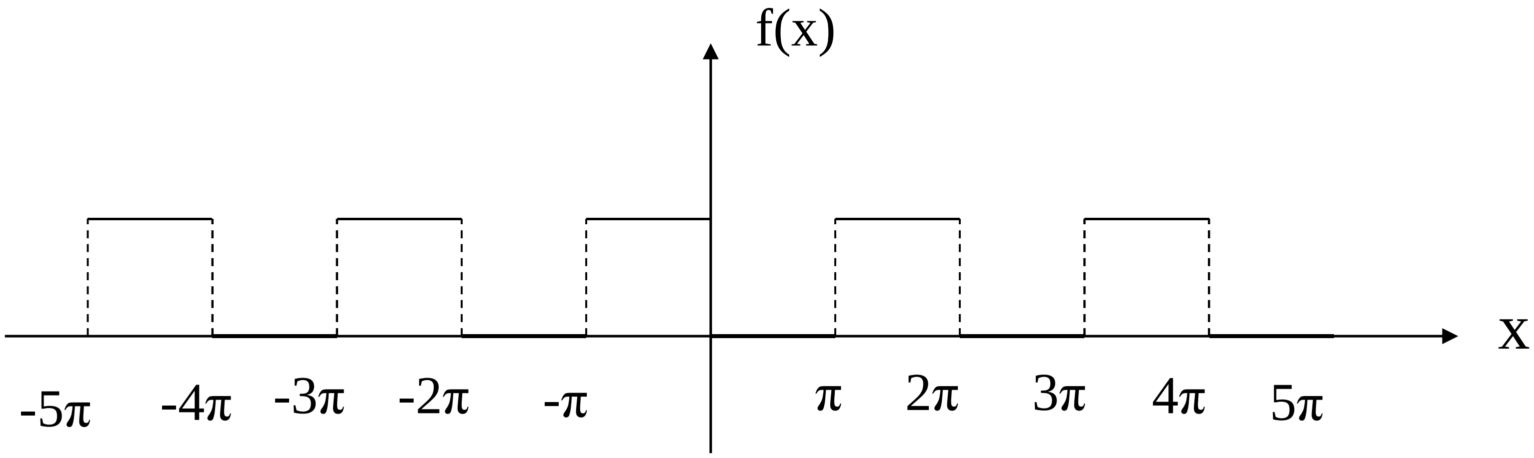
Diketahui fungsi *f(x)* sebagai berikut:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Periodik dengan periode 2π sehingga $f(x \pm 2\pi) = f(x)$
Uraikan fungsi ini dalam uraian deret Fourier.

Pemecahan:

Menurut definisi fungsi periodik, periode fungsi f(x) di atas adalah $T = 2\pi$, dengan demikian $L = \frac{1}{2} T = \pi$, selang dasarnya $-\pi \leq x \leq \pi$, jadi $a = -\pi$. Di luar selang ini, f(x) didefinisikan sebagai perluasan selang dasar ke arah kiri dan kanan sumbu x, seperti terlihat pada Gambar 1.



Gambar 1

Koefisien-koefisien Fourier dapat dicari sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(1)dx + \int_0^{\pi}(0)dx\right\}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} dx = \frac{1}{\pi}(x)\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{\pi}{\pi} = 1$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(1).\cos nx.dx + \int_0^{\pi}(0)\cos nx dx\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\cos nx.dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{n\pi}\left(\sin 0 + \sin n\pi\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(1)\sin nx.dx + \int_0^{\pi}(0)\sin nxdx\right\} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\sin nx\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos 0 - \cos(-n\pi)\right) = -\frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n)$$

$$b_n = \begin{cases} -2/n\pi, & n\ ganjil \\ 0 & ,n\ genap. \end{cases}$$

Dengan demikian, uraian Fourier untuk fungsi f(x) pada contoh ini adalah:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right),\quad a_n = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{\substack{n=1\\ ganjil}}^{\infty} -\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{\pi}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(-\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{5}\sin 5x - \cdots\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots\right)$$

Contoh 2.

Diketahui fungsi f(x) sebagai berikut:

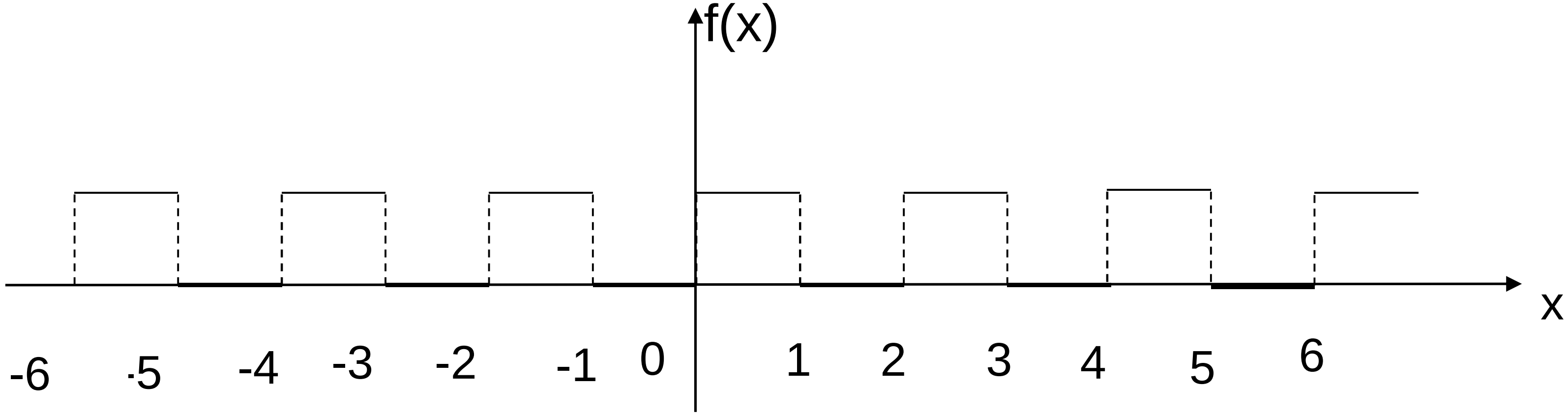
$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Periodik dengan periode 2 sehingga f (x $\pm$ 2) = f(x)
Uraikan fungsi ini dalam uraian deret Fourier !

Pemecahan:

Periode T = 2, sehingga L = ½ T = 1. selang dasarnya 0 $\leq$ x $\leq$ 2, jadi a = 0.

Perluasan f(x) dalam daerah kiri dan kanan sumbu x dapat dilihat dalam Gambar 2.



Gambar 2

Koefisien-koefisien Fouriernya dapat dicari sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)dx = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)dx = 1\left\{\int_0^1 (1)dx + \int_1^2 (0)dx\right\}$$

$$a_0 = \int_0^1 dx = (x)\Big|_0^1 = 1$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\cos\frac{n\pi x}{1}dx$$

$$a_n = \left\{\int_0^1 (1).\cos n\pi x.dx + \int_1^2 (0)\cos n\pi x dx\right\} = \int_0^1 \cos n\pi x.dx$$

$$a_n = \frac{1}{n\pi}\left(\sin n\pi x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{n\pi}\left(\sin n\pi - \sin 0\right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_a^{a+T} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{1}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{1}dx$$

$$b_n = \left\{\int_0^1 (1).\sin nx.dx + \int_1^2 (0)\sin nxdx\right\} = \int_0^1 \sin n\pi x.dx$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos n\pi x\right)\Big|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos 0\right) = -\frac{1}{n\pi}((-1)^n - 1)$$

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & , n \;\; ganjil \\ 0 & , n \;\; genap. \end{cases}$$

Dengan demikian, uraian Fourier untuk fungsi f(x) pada contoh ini adalah:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ ganjil}}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\sin n\pi x$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{\pi}\sin \pi x + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi x + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi x + \cdots\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin \pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{5}\sin 5\pi x + \cdots\right)$$

SYARAT DIRICHLET

- Persyaratan sebuah fungsi f(x) agar dapat diuraikan dalam deret Fourier ditentukan oleh syarat Dirichlet berikut:
- Jika:

1. f(x) periodik dengan periode T
2. Bernilai tunggal serta kontinu bagian demi bagian dalam selang dasarnya; $a \leq x \leq a + T$, dan
3. $\int_{a}^{a+T} |f(x)|\,dx$ nilainya berhingga.

- Maka deret Fourier di ruas kanan konvergen ke:

a. f(x) di semua titik kekontinuan f(x) dan

b. $\frac{1}{2}\{\lim f(x_{0-}) + \lim f(x_{0+})\}$ di setiap titik ketakkontinuan x_0 (pada daerah lompatan).

Latihan 1.

Pada contoh 2 di atas (Perhatikan Gambar 2); Tentukanlah konvergen ke nilai berapa di titik-titik kekontinuan !

$$x = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{-5}{2}$$

dan di titik-titik ketakkontinuan x = 0, 1, 2, 3.

FUNGSI GANJIL DAN FUNGSI GENAP

- Perhitungan koefisien-koefisien Fourier sering kali dipermudah, jika fungsi $f(x)$ yang diuraikan memiliki sifat istimewa tertentu, yakni genap atau ganjil terhadap sumbu $x = 0$ (sumbu $f(x)$). Keduanya didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 2.

- Sebuah fungsi $f(x)$ adalah:
  a) genap, jika berlaku $f(-x) = f(x)$
  b) ganjil, jika berlaku $f(-x) = - f(x)$
- untuk semua x dalam daerah definisi $f(x)$.

Sebagai contoh:

- Fungsi $\boldsymbol{x^2}$ dan ***cos x*** adalah **fungsi genap**, karena $(-x)^2 = x^2$ dan cos (-x) = cos x. Sedangkan fungsi ***x*** dan ***sin x*** adalah **fungsi ganjil**, karena (-x) = -(x) dan sin (-x) = - sin (x). Pada umumnya fungsi pangkat genap dari x (x^2, x^4, x^6 , ...) merupakan fungsi genap dan fungsi pangkat ganjil dari x (x, x^3, x^5, ...) merupakan fungsi ganjil. Dengan definisi di atas dapat dicari contoh-contoh lain dari kedua fungsi ini.

Untuk menentukan koefisien-koefisien Fourier a_0, a_n, dan b_n dari fungsi periodik genap dan ganjil ini dipergunakan perumusan berikut:

$$Jika \quad f(x) \quad genap \begin{cases} a_0 = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\,dx \\ a_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{L}\,dx \\ b_n = 0 \end{cases}$$

Dalam hal ini dikatakan f(x) teruraikan dalam deret kosinus (b_n = 0).

$$Jika \quad f(x) \quad ganjil \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \\ b_n = \dfrac{2}{L}\displaystyle\int_0^L f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx \end{cases}$$

Seperti semula
L = ½ T = ½ periode.

Dalam hal ini, f(x) dikatakan teruraikan dalam deret sinus (a_n = 0).

Contoh 3.

Diketahi fungsi:

$$f(x) = x^2, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Periodik dengan periode 1, sehingga f(x $\underline{+}$ 1) = f(x).
Uraikan fungsi tersebut dalam deret Fourier.

Pemecahan:

Fungsi f(x) = x^2 adalah suatu fungsi genap

T = 1, sehingga L = ½ T = ½ , akan teruraikan dalam deret kosinus.

b_n = 0, a_0 dan a_n dapat ditentukan sebagai berikut:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{1/2} x^2 dx = 4\left(\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^{1/2} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{6}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{1/2} x^2\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$a_n = 4\int_0^{1/2} x^2\cos 2n\pi x dx$$

$$a_n = 4\left\{x^2\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x + 2x\frac{1}{(2n\pi)^2}\cos 2n\pi x - \frac{2}{(2n\pi)^3}\sin 2n\pi x\right\}\Bigg|_0^{1/2}$$

$$a_n = 4\left\{\frac{1}{(2n\pi)^2}\cos n\pi\right\}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\}$$

Dengan demikian uraian deret Fourier untuk $f(x) = x^2$ dengan selang dasar $-½ < x < ½$ adalah:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}, \qquad b_n = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos 2n\pi x$$

$$f(x) = \frac{1}{12} + \frac{1}{\pi^2} \left\{ -\frac{\cos 2\pi x}{1^2} + \frac{\cos 4\pi x}{2^2} - \frac{\cos 6\pi x}{3^2} + \cdots \right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{\cos 2\pi x}{1^2} - \frac{\cos 4\pi x}{2^2} + \frac{\cos 6\pi x}{3^2} - \cdots \right\}$$

Latihan 2.

Diketahui fungsi:

$$f(x) = x \qquad ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

Periodik dengan periode π, sehingga f (x $\pm$ π) = f(x).
Untuk fungsi tersebut dalam deret Fourier.

COBA KERJAKAN DENGAN ANALOGI LANGKAH PADA FUNGSI GENAP !

DERET FOURIER JANGKAUAN SETENGAH

- Dalam suatu persoalan fisika, fungsi f(x) mungkin hanya terdefinisikan dalam suatu selang positif; $0 < x < l$. Oleh karena itu seringkali perlu untuk memperluasnya ke seluruh sumbu x, baik ke arah sumbu x positif maupun ke arah sumbu x negatif. Dalam hal ini ada 3 pilihan yang dapat dilakukan sebagai berikut:

1) Fungsi f(x) diperluas menjadi f**ungsi periodik tidak ganjil – tidak genap** (seperti pada contoh 1) dengan periode $T = l$; dan selang dasarnya $0 < x < l$, dengan l sembarang positif.
2) Selang dasar $0 < x < l$ diperluas **ke selang negatif secara simetris** terhadap sumbu x = 0 menjadi $-l < x < l$, dan fungsi f(x) diperluas menjadi **fungsi periodik** dengan periode $T = 2l$.

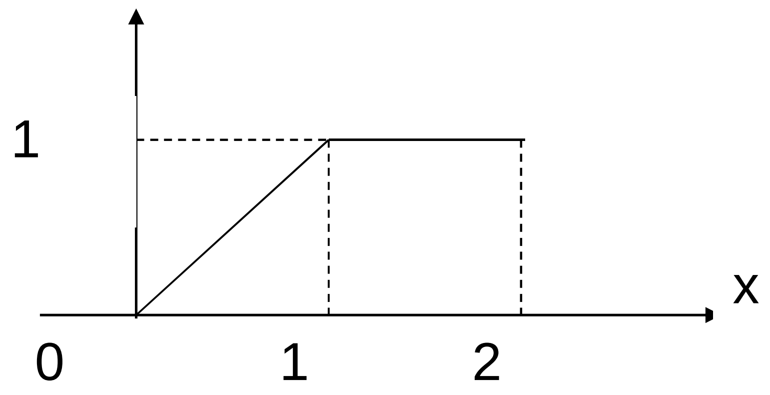
   - Dalam hal ini kita mempunyai **dua pilihan** yakni memperluas fungsi f(x) sebagai **fungsi genap fc(x)** atau **fungsi ganjil fs(x).**

Contoh 4

Diketahui sebuah fungsi yang terdefinisi pada setengah daerah:

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

Sket:



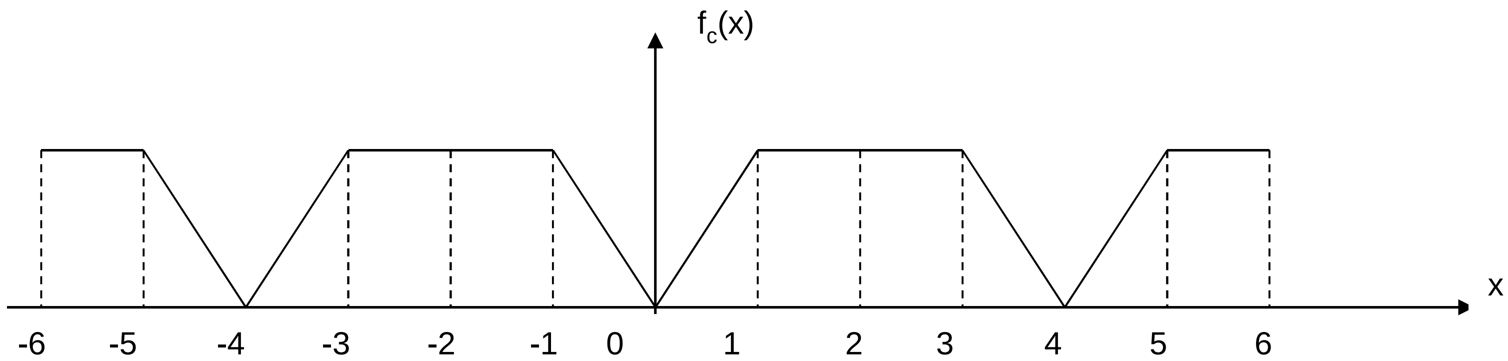
Uraikan fungsi ini ke dalam:

a. deret Fourier fungsi kosinus (fungsi genap)
b. deret Fourier fungsi sinus (fungsi ganjil)
c. deret Fourier fungsi kosinus – sinus (fungsi tidak genap – tidak ganjil).

Pemecahan:

(a)Uraian deret Fourier kosinus (fungsi genap)

Untuk membentuk fungsi genap, maka selang dasar $(0 < x < 2)$ di atas diperluas ke selang negatif menjadi $(-2 < x < 2)$, dan fungsi $f(x)$ diperluas menjadi fungsi periodik genap $\{f(-x) = f(x)\}$ dengan periode $T = 4$ $(L = 2)$ seperti ditunjukkan pada gambar berikut:



Untuk fungsi genap ini $b_n = 0$, a_0 = dan a_n ditentukan sebagai berikut:

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)dx = \frac{2}{2}\left\{\int_0^1 xdx + \int_1^2 (1)dx\right\} = \left\{\frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 + x\Big|_1^2\right\} = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{2}\left\{\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (1)\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right\}$$

$$a_n = \left\{x\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right\}\Bigg|_0^1 + \left\{\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right\}\Bigg|_1^2$$

$$a_n = \frac{4}{(n\pi)^2}\left(\cos\frac{n\pi x}{2} - 1\right)$$

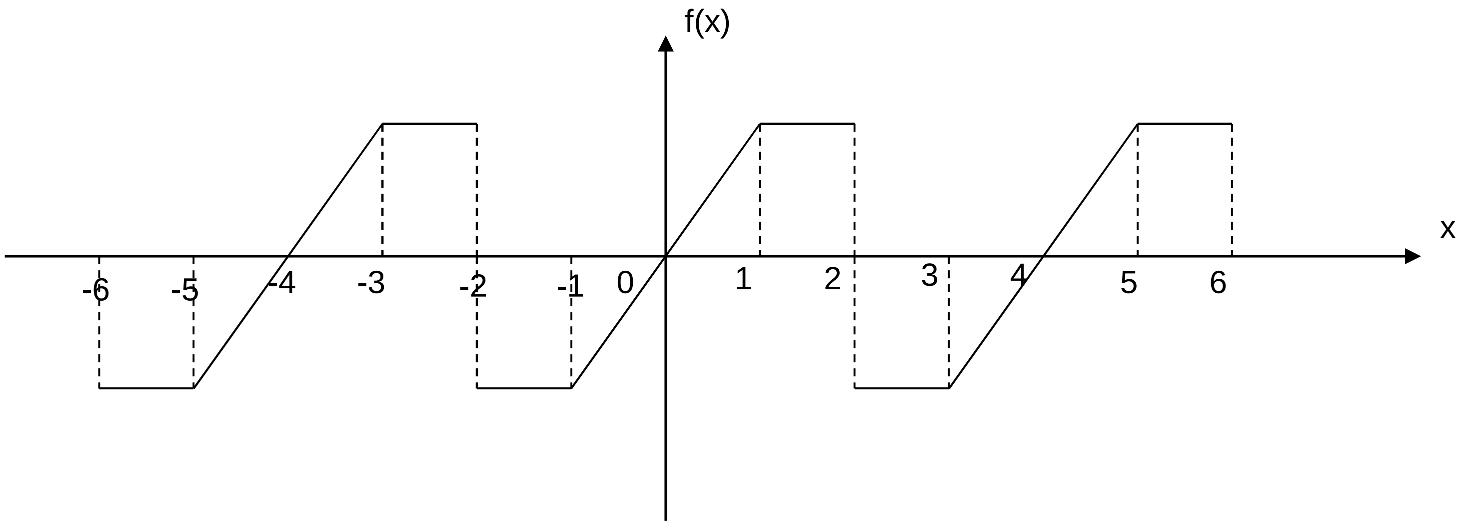
$$a_1 = -\frac{4}{\pi^2},\ a_2 = -\frac{2}{\pi^2},\ a_3 = -\frac{4}{9\pi^2},\ a_1 = 0,\quad dst$$

Maka diperoleh uraian deret Forier kosinus untuk f(x), sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L},\quad b_n = 0$$

$$f(x) = \frac{3}{4} - \frac{4}{\pi^2}\left\{\frac{1}{1}\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi x}{2} + \cdots\right\}$$

(a) Uraian deret Fourier sinus (fungsi ganjil)
Untuk membentuk fungsi ganjil, maka selang dasar (0 < x < 2) di atas diperluas ke selang negatif menjadi (-2 < x < 2), dan fungsi f(x) diperluas menjadi fungsi periodik ganjil {f(-x) = -f(x)} dengan periode T = 4 (L = 2) seperti ditunjukkan pada gambar berikut:



Untuk fungsi ganjil ini $a_0 = 0$, $a_n = 0$, dan b_n ditentukan sebagai berikut:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{2}{2}\left\{\int_0^1 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int_1^2 (1)\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right\}$$

$$b_n = \left\{-x\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right\}\Bigg|_0^1 + \left\{-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right\}\Bigg|_1^2$$

$$b_n = \left\{\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{2} - \frac{2}{n\pi}\cos n\pi\right\}$$

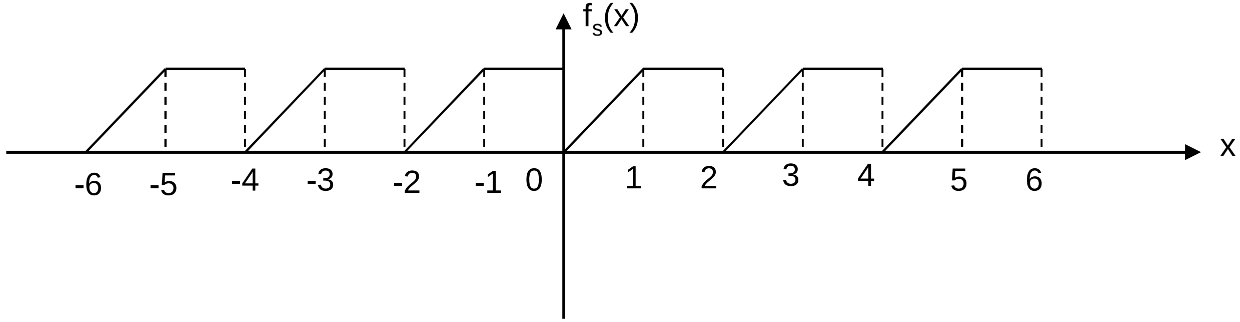
$$b_1 = \left(\frac{4+2\pi}{\pi^2}\right),\ b_2 = -\frac{1}{\pi},\ b_3 = -\left(\frac{4+6\pi}{9\pi^2}\right),\ b_2 = -\frac{1}{2\pi},\ dst$$

Maka diperoleh uraian deret Fourier sinus untuk f(x), sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{n-1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L},\quad a_0 = 0, a_n = 0$$

$$f(x) = \left\{\left(\frac{4+2\pi}{\pi^2}\right)\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{\pi}\sin\frac{2\pi x}{2} - \left(\frac{4+6\pi}{9\pi^2}\right)\sin\frac{3\pi x}{2} + \cdots\right\}$$

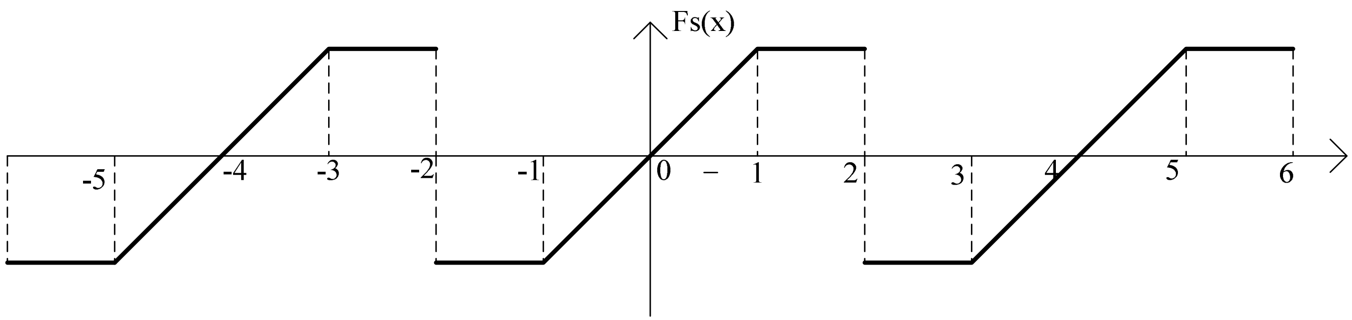
Untuk membentuk fungsi periodik ini, tinggal memperluas f(x) ke kiri dan ke kanan sumbu x dengan periode T = 2 (L = 1) seperti pada gambar berikut:



Koefisien-koefisien Fourier a_0, a_n, dan b_n dapat ditentukan sebagai berikut:
Diperluas menjadi fungsi periodik ganjil

$$\{f(-x) = -f(x)\}$$

dengan periode T=4 (L=2) seperti ditunjukan pada gambar berikut :



Untuk fungsi ganjil ini a_o = 0, a_n = 0 dan b_n ditentukan sebagai berikut :

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{2}\left\{\int_0^1 x\,\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (1)\,\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right\}$$

$$= \left\{-x\,\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\right\}\Big|_0^1 + \left\{-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\right\}\Big|_1^2$$

$$= \left\{\frac{4}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}\cos\ n\pi\right\}$$

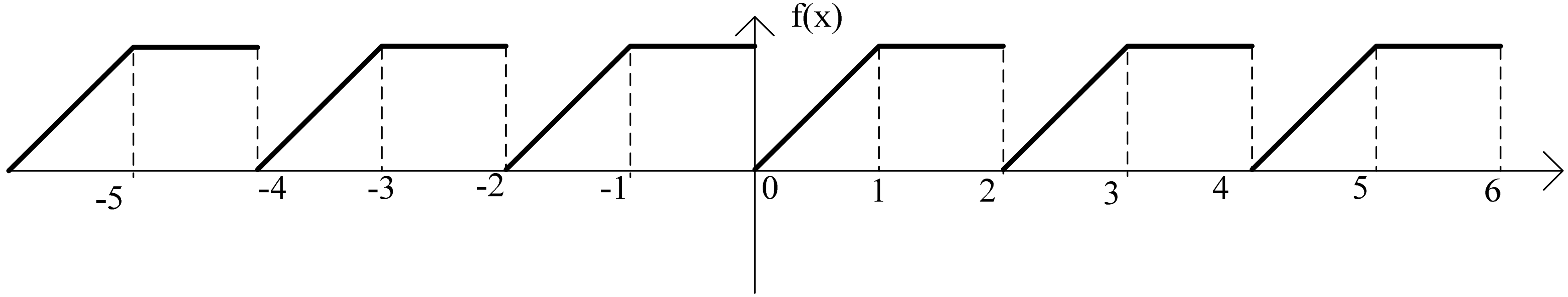
$$b_1 = \left(\frac{4+2\pi}{\pi^2}\right),\quad b_2 = -\frac{1}{\pi},\quad b_3 = -\left(\frac{4+6\pi}{9\pi^2}\right),\quad b_4 = -\frac{1}{2\pi},\quad dst.$$

Maka diperoleh uraian deret Fourier sinus untuk *f(x)*, sebagai berikut :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{10} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \quad , a_o = 0, a_n = 0$$

$$= \left\{\left(\frac{4+2\pi}{\pi^2}\right)\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{\pi}\sin\frac{2\pi x}{2} - \left(\frac{4+6\pi}{9\pi^2}\right)\sin\frac{3\pi x}{2} + \ldots\ldots\ldots\right\}$$

(c) Uraian deret Fourier sinus-cosinus (fungsi tidak ganjil-tidak genap) untuk membentuk fungsi periodik ini, tinggal memperluas *f(x)* ke kiri dan ke kanan sumbu *x* dengan periode T=2 (L=1) seperti pada gambar berikut :



Koefisien-koefisien Fourier a_o, a_n, dan b_n dapat ditentukan sebagai berikut :

$$a_o = \frac{1}{L}\int_0^T f(x)dx = \frac{1}{1}\left\{\int_0^1 x\,dx + \int_1^2 (1)\,dx\right\} = \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 + x \Big|_1^2 = \frac{3}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_0^T f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx = \frac{1}{1}\left\{\int_0^1 x \cos n\pi x\, dx + \int_1^2 (1)\cos n\pi x dx\right\}$$

$$= \left\{x\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x + \frac{1}{(n\pi)^2}\cos n\pi x\right\}\Big|_0^1 + \left\{\frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right\}\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{(n\pi)^2}(\cos n\pi - 1) = \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right\} = \frac{-2}{n^2\pi^2}, \quad n\ ganjil$$

$$= 0, \qquad n \quad genap$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^T f(x)\sin n\pi x\,dx = \frac{1}{1}\left\{\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx + \int_1^2 (1)\sin n\pi x\,dx\right\}$$

$$= \left\{-x\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x + \frac{1}{(n\pi)^2}\sin n\pi x\right\}\Big|_0^1 + \left\{-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi x\right\}\Big|_1^2$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\cos 2n\pi$$

$$= -\frac{1}{n\pi}$$

DERET FOURIER EKSPONENSIAL

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$dengan \quad i = \sqrt{-1}; \; i^2 = -1; \; i = -\frac{1}{i}$$

Koefisien-koefisien Fourier eksponensial ditentukan sebagai berikut :

$$C_o = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(1)dx + \int_0^{\pi}(0)dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} dx = \frac{1}{2\pi} x\Big|_{-\pi}^{0} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

$$C_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)e^{\frac{-in\pi x}{L}} dx = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}(1)e^{\frac{-in\pi x}{\pi}} dx + \int_0^{\pi}(0)e^{\frac{-in\pi x}{\pi}} dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{-in}e^{-inx}\right\}\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{2n\pi}\left(1-\cos n\pi\right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{i}{n\pi}, & n \text{ ganjil} \\ 0, & n \text{ genap} \end{cases}$$

Maka diperoleh uraian deret Fourier eksponensial sebagai berikut :

$$f(x) = \sum_{n=-10}^{10} C_n e^{inx}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\left(........ - \frac{1}{5}e^{-5ix} - \frac{1}{3}e^{-3ix} - e^{-ix} + e^{ix} + \frac{1}{3}e^{3ix} + \frac{1}{5}e^{5ix} + ...\right)$$

Untuk membandingkan hasil ini dengan hasil yang diperoleh pada Contoh 1, maka kita gunakan kembali hubungan Euler di atas :

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} + \frac{i}{\pi}\left(\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) + \frac{1}{3}\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) + \frac{1}{5}\left(e^{5ix} - e^{-5ix}\right) + \dots\dots\dots\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}{i} + \frac{1}{3}\left(\frac{e^{3ix} - e^{-3ix}}{i}\right) + \frac{1}{5}\left(\frac{e^{5ix} - e^{-5ix}}{i}\right) + \dots\dots\dots\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\sin x}{1} + \frac{2\sin 3x}{3} + \frac{2\sin 5x}{5} + \dots\dots\dots\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots\dots\dots\right)
\end{aligned}
$$

Persis sama seperti hasil pada contoh 1.

IDENTITAS PARSEVAL

Sekarang akan diberi bagaimana hubungan antara harga rata-rata kuadrat fungsi *f(x)* dalam selang dasarnya dengan koefisien-koefisien Fourier. Hasilnya dikenal sebagai identitas Parseval atau hubungan kelengkapan (Competeness Relation) yang bentuknya bergantung pada rumusan uraian Fourier yang digunakan.
Untuk deret Fourier yang diuraikan dalam bentuk :

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{10} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{10} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

Atau bentuk hubungannya adalah sebagai berikut :

$$\frac{1}{T}\int_a^{a+T} |f(x)|^2 dx = \left\{ \left(\frac{a_o}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10} |a_n|^2 + |b_n|^2 \right\}$$

Ruas kiri adalah harga rata-rata kuadrat fungsi *f(x)* dalam selang dasarnya $a < x < a + T$, sementara ruas kanan adalah jumlah kuadrat semua koefisien Fourier.
Untuk uraian deret Fourier eksponensial, bentuk hubunganya :

$$f(x) = \sum_{n=-10}^{10} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

$$= \frac{1}{T}\int_{a}^{a+T} \left| f(x) \right|^2 dx = \sum_{n=-10}^{10} \left| C_n \right|^2$$

Secara fisis, jika *f(x)* merupakan fungsi periodik dari suatu besaran fisika, misalnya simpangan getaran mekanik (sistem pegas), maka untuk $x = t$ adalah variabel waktu, maka pernyataan :

$$\langle p \rangle = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left| f(t) \right|^2 dt$$

Menyatakan daya rata-rata (Joule/s) dari getaran tersebut dalam suatu periode T. Dengan demikian identitas Paseval, mengaitkan daya rata-rata dengan separuh jumlah kuadrat amplitude setiap harmonik penyusun periodik.
Secara matematik, ruas kiri dari identitas Paseval memberikan jumlah deret bilangan diruas kanannya, seperti pada contoh berikut :

Contoh 5

Gunakan identitas Paseval untuk mencari jumlah deret bilangan yang bersangkutan dengan uraian deret Fourier dari fungsi *f(x)*

Diketahui fungsi:

$$f(x) = x^2, \quad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Periodik dengan periode 1, sehingga f(x $\pm$ 1) = f(x).

Pemecahan

Pada contoh.4. $f(x) = x^2$ dengan periode 1 dan selang dasarnya adalah

$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, memiliki uraian deret Fourier dengan koefisien-koefisien sebagai berikut :

$$a_o = \frac{1}{6}, \quad a_n = \frac{1}{\pi^2}\left\{\frac{(-1)^n}{n^2}\right\} \qquad n = 1, 2, 3........, b_n = 0$$

Harga rata-rata kuadrat dari $f(x) = x^2$ ditentukan sebagai berikut :

$$\frac{1}{1}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left|x^2\right|^2 dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x^4 dx = \frac{1}{5}x^5\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{32}\right) = \frac{1}{80}$$

Menurut identitas Paseval, nilai rata-rata kuadrat ini sama dengan

$$\left\{\left(\frac{a_o}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)\right\}$$

sehingga :

$$\frac{1}{80} = \left\{\left(\frac{1}{12}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{\pi^2}\right)^2\left(\frac{(-1)^4}{n^2}\right)^2\right)\right\}$$

$$\frac{1}{80} = \frac{1}{144} + \frac{1}{2}\frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n^4}, \quad atau$$

$$\frac{1}{2\pi^4}\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n^4} = \frac{1}{80} - \frac{1}{144} = \frac{1}{180}$$

Sehingga :

$$\sum_{n=1}^{r} \frac{1}{n^4} = \frac{2\pi^4}{180} = \frac{\pi^4}{90}$$

atau

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Contoh 9

Gunakan identitas Parseval untuk mencari jumlah deret bilangan yang bersangkutan dengan uraian Fourier dari fungsi *f* (*x*) pada contoh 7.

<u>Pemecahan</u>

Pada contoh.7, *f* (*x*) diuraikan dalam deret Fourier eksonensial dengan periode $T = 2\pi$ dan selang dasar $-\pi < x < \pi$

Koefisien Fourier dari uraian tersebut adalah :

$C_o = \dfrac{1}{2}$ dan $C_n = \dfrac{i}{n\pi}$ untuk *n* ganjil (1, 3, 5, ….)

Harga rata-rata kuadrat dari *f (x)* dalam selang $(-\pi < x < \pi)$

ditentukan sebagai berikut :

$$\frac{1}{2\pi}\left\{ dx + \int_0^{\pi} |0|^2\ dx \right\} dx + \int_0^{\pi} |0|^2\ dx$$

Menurut identitas Paseval, harga rata-rata kuadrat ini sama dengan $\sum_{n=-10}^{n} |C_n|^2$, sehingga :

$$\frac{1}{2} = (C_o)^2 + \sum_{n=-10}^{10} |C_n|^2$$

$$\frac{1}{2} = (\frac{1}{2})^2 + \sum_{n=-10}^{10} \left|\frac{i}{n\pi}\right|^2, \quad n \quad ganjil$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=-10}^{10} \left| \frac{i}{n} \right|^2, \quad n \quad ganjil$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{10} 2\left| \frac{i}{n} \right|^2, \quad n \quad ganjil$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n^2} \quad , \quad n \quad ganjil$$

atau :

$$\frac{2}{\pi^2} \sum_{\substack{n=1 \\ ganjil}}^{10} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ ganjil}}^{10} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{..........} = \frac{\pi^2}{8}$$

SPEKTRUM FOURIER

- Uraian Fourier suatu fungsi periodik *f(x)*, pada dasarnya adalah uraian fungsi *f(x)* kedalam komponen-komponen harmoniknya, yakni berbagai komponen frekuensinya. Jika P merupakan frekuensi harmonik dasarnya, maka frekuensi harmonik ke-n, P_n, diberikan oleh hubungan :

$$P_n = n.P \quad , \quad n = 1, 3, 5, \ldots\ldots$$

- Dengan $P = \frac{2\pi}{T}$, dimana T merupakan periode dasarnya.
- Himpunan semua komponen frekuensi P_n = n.P yang membentuk fungsi periodik *f(x)* ini disebut spectrum frekuensi atau spectrum fungsi *f(x)*

AMPLITUDO HARMONIK

- Spektrum frekuensi seringkali divisualkan secara grafis, dengan menggambarkan Amplitudo masing-masing harmoniknya. Untuk uraian deret Fourier cosinus, sinu, amplitude harmonik ke-n ditentukan sebagai berikut :
- Suku ke-n dari uraian deret Fourier cosinus-sinus dapat dituliskan :

$$S_n(x) = a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

- yang juga dapat dituliskan dalam fungsi tunggal cosinus sebagai berikut :

$$S_n(x) = A_n \cos(\frac{n\pi x}{L} + \delta_n)$$

dengan $A_n = \sqrt{\left|a^n\right|^2 + \left|b^n\right|^2}$ dan $\delta_n = arc\ tg\ \dfrac{(-b_n)}{a_n}$

Koefisien An dan δ_n berturut-turut disebut amplitudo dan

fase awal harmonik ke-n, dengan $A_o = {a_o}/{2}$ dan $\delta_o = 0$

Grafik barisan amplitude setiap harmonik A_n terhadap n
(n = 0,1, 2, 3, 4,……), berbentuk pancang bejarak sama, yang dikenal sebagai spektrum garis.

Contoh:

Sambung Hal. 21