DERET TAK HINGGA

Jurdik Fisika FPMIPA UPI

DERET

Deret tak hingga adalah pernyataan penjumlahan bilangan/variabel yang tak hingga banyaknya berbentuk :

$$a_1 + a_2 + a_3 + \text{.........} + a_n + \text{.........}$$

Dengan suku ke-n adalah a_n sebuah fungsi dari bilangan bulat n dari *f(n), n= 1,2,3,4,......*

Sebuah deret tak hingga seringkali dituliskan secara eksplisit hingga a_3 atau a_4 saja (tiga suku pertama) yang darinya ditunjukkan bentuk a_n , namun a_n menjadi jelas untuk diungkapkan fungsi *f (n)* nya.

Contoh :

1). $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \cdots + a_n + \cdots \qquad a_n = n^4$

2). $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} \ldots . + a_n + \cdots \qquad a_n = \frac{n}{3^n}$

3). $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots . + a_n + \cdots \qquad a_n = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Deret tak hingga pada contoh 1) dan 2) merupakan deret bilangan, sedangkan contoh 3) menunjukkan deret variabel (dalam hal ini variabelnya adalah x)

Penulisan deret tak hingga lazimnya ditulis dengan notasi jumlah $\sum_{n=1}^{\sim}$ (baca : sigma n=1 sampai n=tak hingga) diikuti dengan bentuk umum suku dengan lambang digunakan untuk menyatakan suatu bilangan yang besarnya tak terbilang . Jadi

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\sim} a_n$$

Secara umum **deret pangkat tak hingga dibagi menjadi 2, yaitu:**

1. **Berhingga (*konvergen*): mengumpul , semakin kecil**
2. **Tak berhingga (*divergen*) : menyebar, semakin besar**

Jumlah total suatu deret dituliskan ; $S = \sum_{n=1}^{\sim} a_n$

Jumlah perbagian ; $S_n = \sum_{n=1}^{n=n} a_n$

Definisi –definisi:

1. Jika S_n adalah jumlah perbagian deret tak hingga $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ maka jumlah total didefinisikan

$$S = \sum_{n=1}^{\sim} a_n = \lim_{n \to \sim} \sum_{n=1}^{n=n} a_n = \lim_{n \to \sim} S_n$$

2. Jika $\lim_{n \to \sim} S_n = S$ nilainya berhingga dan tunggal, maka deret $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ dikatakan konvergen dengan jumlah S

3. Jika $\lim_{n \to \sim} S_n = S$ nilainya tak hingga atau

$\lim_{n \to \sim} S_n = S_k \ (k = 1, 2, 3, 4, , ,)$

nilainya berhingga tapi tidak tunggal (ada sebanyak p buah limit) maka deret $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ dikatakan divergen

4. Jika $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ konvergen,maka $R_n = (S - S_n)$ disebut sisa (residu) deret setelah suku ke-n

UJI KONVERGENSI DERET TAK HINGGA

DERET POSITIF : Deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ disebut deret positif jika $a_n > 0$ untuk setiap n

Untuk Uji Konvergensi :

1. Uji Awal
2. Uji Banding
3. Uji Integral
4. Uji Nisbah

1. Uji Awal

Teorema uji awal :

Jika $\lim_{n\to\sim} a_n \neq 0$, maka deret $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ divergen

Dalil :

Jika $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ konvergen , maka $\lim_{n\to\sim} a_n = 0$

Hati-hati : Dalil ini tidak bisa dibalik , jadi jika diperoleh $\lim_{n\to\sim} a_n = 0$ belum dapat dikatakan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ konvergen (lanjutkan ke uji yang lain)

Latihan :

1. $\sum_{n=1}^{\sim} \dfrac{n^2}{(n+1)^2}$

2. $\sum_{n=1}^{\sim} \dfrac{n\,!}{(n+1)!}$

CONTOH UJI AWAL:

1. $\sum_{n=1}^{\sim} \frac{n^2}{(n+1)^2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{\left(n^2+2n+1\right)} = 1 \quad (divergen)$$

2. $\sum_{n=1}^{\sim} \frac{n\,!}{(n+1)!}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)n!} = 0 \quad (belum\, tentu\, konvergen)$$

2. Uji Banding

Teorema :

1). Jika deret $\sum_{n=1}^{\sim} b_n$ konvergen dan $a_n \leq b_n$ untuk $n \geq N$

maka deret $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ konvergen .

2). Jika deret $\sum_{n=1}^{\sim} d_n$ divergen dan $c_n \geq d_n$ untuk $n \geq N$

maka deret $\sum_{n=1}^{\sim} c_n$ divergen .

Contoh :

Uji deret $\sum_{n=1}^{\sim} \frac{1}{n!}$ dengan uji banding , gunakan sebagai deret pembanding $\sum_{n=1}^{\sim} \frac{1}{2^n}$ yang merupakan deret konvergen

Bandingkan

n	$n!$	2^n	$\frac{1}{n!}$		$\frac{1}{2^n}$
1	1	2	1	$>$	$\frac{1}{2}$
2	2	4	$\frac{1}{2}$	$>$	$\frac{1}{4}$
3	6	8	$\frac{1}{6}$	$>$	$\frac{1}{8}$
4	24	16	$\frac{1}{24}$	$<$	$\frac{1}{16}$
5	120	32	$\frac{1}{120}$	$<$	$\frac{1}{32}$

Karena

$$\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^n}$$

untuk $n \geq 4$

Maka deret

$$\sum_{n=1}^{\sim} \frac{1}{n!} \quad konvergen$$

3. UJI INTEGRAL

$$\int_N^\infty a_n\,dn \rightarrow \int_N^\infty f(n)\,dn \rightarrow \int_N^\infty f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_N^\infty f(x)\,dn = \int^\infty f(x)\,dx$$

Ketentuan : Jika $\int^\infty f(x)\,dx$

1). Nilainya berhingga maka deret $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ **konvergen**

2). Nilainya tak berhingga maka deret $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ **divergen**

Untuk lebih memudahkan , batas integral bisa ditinjau batas atasnya saja

Latihan : Uji konvergensi deret

1. $\sum_{n=1}^{\sim} \frac{1}{n}$

2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$

3. $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \cdots$

4. Uji Nisbah

Teorema :

Tinjau deret $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ **lalu cari nilai** $\rho_n = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

kemudian lakukan $\lim_{n\to\sim} \rho_n = \rho$

Jika :

$$\rho < 1, konvergen$$

$$\rho > 1, divergen$$

$$\rho = 1, pengujian\ gagal$$

Contoh :

Uji Konvergensi deret $\sum_{n=1}^{\sim} \frac{1}{n!}$!

Latihan

Uji konvergensi deret di bawah ini dengan menggunakan uji nisbah

1. $$2 + \frac{3}{2}\frac{1}{4} + \frac{4}{3}\frac{1}{4^2} + \frac{5}{4}\frac{1}{4^3} + \cdots$$

2. No 6, 7, 9 buku Ibu Roswati hal 427

DERET TAK TETAP POSITIF

Uji konvergensi deret tak tetap positif :

Misalkan : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **suatu deret tak hingga dengan** a_n **tak tetap positif , artinya dapat bernilai positif atau negatif .**

Jelas, deret yang dibentuk dari nilai mutlak setiap sukunya , $|a_n|$ **, yaitu:**

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

adalah suatu deret positif karena $|a_n| > 0$

Dengan demikian, untuk deret mutlak ini berlaku semua uji konvergensi deret positif (uji awal, uji banding, uji integral dan uji nisbah)

Definisi :

Misalkan $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ merupakan deret tak tetap positif, jika deret $\sum_{n=1}^{\sim} |a_n|$ konvergen , maka deret $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ disebut konvergen mutlak!

Teorema :

Jika deret $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ konvergen mutlak, maka $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ merupakan deret konvergen

Dalil :

Jika $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ deret divergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\sim} |a_n|$ juga divergen. Tetapi tidak dapat dibalik, yaitu jika $\sum_{n=1}^{\sim} |a_n|$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ mungkin divergen atau konvergen.

Jika deret tak tetap positif $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ konvergen, tetapi tak konvergen mutlak yaitu $\sum_{n=1}^{\sim} |a_n|$ tak konvergen, maka deret $\sum_{n=1}^{\sim} a_n$ disebut *konvergen bersyarat.*

Ingat !!!!!!

urutan tidak boleh ditukar

Contoh :

1) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \dots\dots\dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} + \cdots$

2) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots\dots\dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \cdots$

Deret bolak-balik akan konvergen jika kedua syarat di bawah ini terpenuhi :

a). $|a_{n+1}| \leq |a_n|$

b). $\lim_{n\to\sim}|a_n| = 0$

TERIMA KASIH…

MATFIS II TIM