TEOREMA-TEOREMA PENTING LAINNYA (TIDAK DIBUKTIKAN)

MATFIS II

JURDIK FISIKA FPMIPA UPI

TEOREMA-TEOREMA PENTING LAINNYA (TIDAK DIBUKTIKAN)

1. Integrasi dan diferensiasi deret pangkat dapat dilakukan per suku, yaitu:

$$\int_p^q \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_p^q C_n (x-a)^n \, dx, \quad p,\, q \in |x-a| \le r$$

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} C_n (x-a)^n \, dx$$

   Selang konvergensi seragam deret pangkat yang dihasilkan, sama seperti yang semula. Untuk kedua titik ujungnya, perlu diselidiki.

2. Dua deret pangkat dapat di-jumlah/kurang-kan, dan diperkalikan; deret yang dihasilkan memiliki selang konvergensi masing-masing deret. Jadi, misalkan I_1 dan I_2 selang konvergensi masing-masing deret, maka selang konvergensi deret yang dihasilkan adalah $I_1 \cap I_2$ ($\cap$ lambang teori himpunan bagi irisan).

3. Dua deret pangkat dapat pula dibagi asalkan penyebutnya tak-nol di x = a, atau nol di x = a, tetapi tercoretkan (seperti $\frac{\ln(1+x)}{x}$ pada 2.22). Selang konvergensinya harus dicari kembali.
4. Suatu deret pangkat dapat disisipkan ke dalam deret pangkat lainnya, asalkan selang konvergensi deret yang disisipkan terkandung dalam deret lainnya. Jadi, misalkan I_1 selang konvergensinya I_2, maka $I_1 \subseteq I_2$ ($\subseteq$ lambang teori himpunan bagi himpunan bagian).

5. Pernyataan suatu fungsi f(x) dalam deret pangkat konvergen, adalah *tunggal.* Artinya ada satu pernyataan deret pangkat untuk satu fungsi, sejauh variabel x berada dalam selang konvergensi deret.

URAIAN TAYLOR SEBUAH FUNGSI

- Suatu fungsi S(x) yang diketahui, dapat pula dinyatakan dalam suatu deret pangkat. Kenyataan ini menguntungkan, karena deret pangkat sangat mudah ditangani secara analitis, ketimbang fungs S(x) sendiri. Misalnya, dalam perhitungan integral dari fungsi S(x), bila seandainya S(x) adalah suatu fungsi rumit yang integralnya tak terdapat dalam tabel integral.

- Sebagai contoh, integral tentu berikut:

$$\int_0^1 \sin x^2 dx$$

- Muncul dalam praktik, yaitu pada persoalam difraksi Fresnel gelombang cahaya oleh sebuah celah. Integral jenis ini tak terdaftarkan dalam tabel integral, karena hasilnya tak dapat diungkapkan dalam pernyataan suatu fungsi primitif tertentu. Dalam pasal ini akan dibahas bagaimana integral jenis ini dan perhitungan numerik (secara angka) lainnya dengan menggunakan metode deret pangkat.

- Misalkan kita tertarik pada persoalan menguraikan sebuah fungsi f(x) yang diketahui atas deret pangkat. Secara umum, kita tulis

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots$$

- Tetapan a dapat pula bernilai nol. Masalah selanjutnya adalah:

a. Menentukan nilai-nilai koefisien C_n, sebagai fungsi dari n, sehingga penulisan di atas berupa suatu identitas (berlaku bagi semua nilai x).

b. Menentukan selang konvergensi deret pangkatnya dalam mana identitas (a) berlaku.

- Dengan menerapkan teorema diferensiasi deret pangkat pada (2.31), kita peroleh:

$$f(a) = C_0 + C_1(0) + C_2(0)^2 + \cdots + C_n(0)^n + \cdots = C_0$$

$$f'(a) = 0 + C_1 + 2C_2(0) + \cdots + nC_n(0)^{n-1} + \cdots = C_1$$

$$f''(a) = 0 + 0 + 2.1C_2 + \cdots + n(n-1)C_n(0)^{n-2} + \cdots = 2!C_2$$

....

$$f^n(a) = 0 + 0 + 0 + \cdots + n!C_n + 0 + \cdots = n!C_n$$

Jadi:

$$C_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)$$

- Dengan demikian,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!} f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{1}{n!} f^n(a)(x-a)^n + \cdots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(a)(x-a)^n$$

CONTOH: DERET EKSPONESIAL

- Di papan tulis!