

# Aplikasi Statistik Fermi-Dirac

## Gas Elektron

**Bagaimana sifat makroskopis dari gas elektron!**

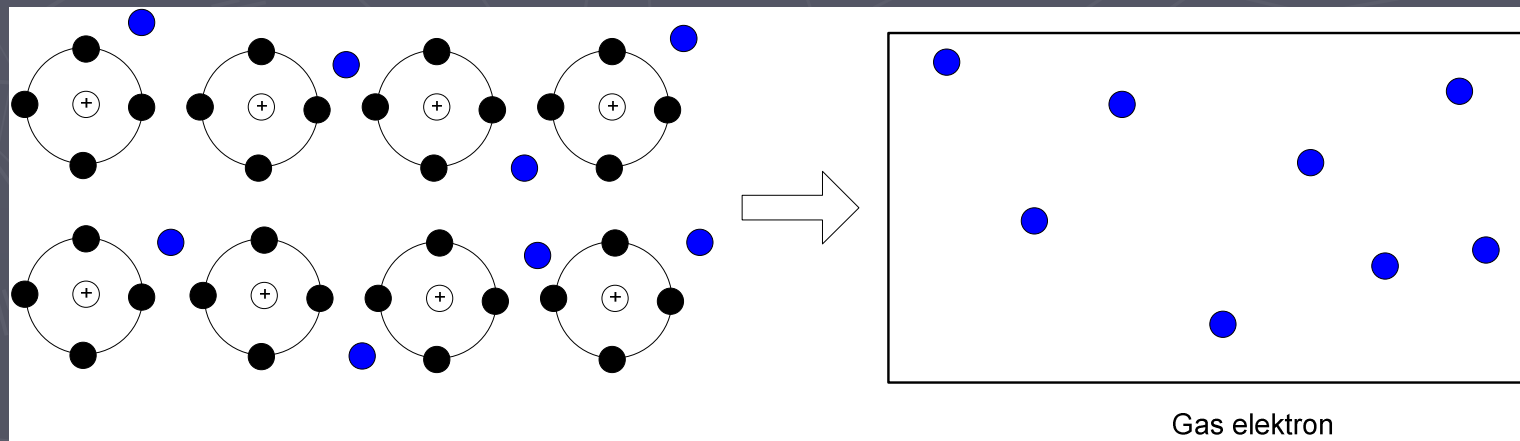
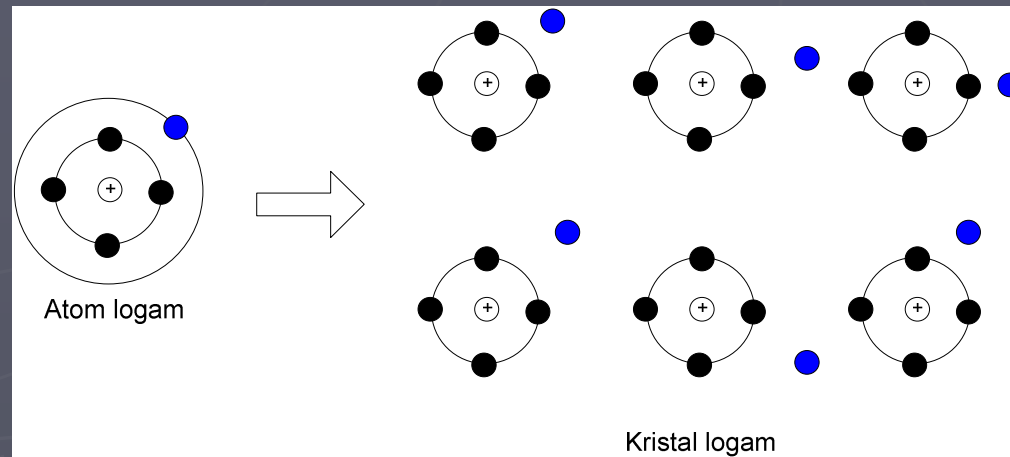
Yang akan ditinjau:

1. Energi Total
2. Kapasitas Kalor
3. Entropi
4. Tekanan dan Persamaan Keadaan

# Gas Elektron

Apa itu gas elektron!

Sistem fisis seperti apa yang dinamakan gas elektron!



# Gas Elektron

Elektron dalam logam:

1. Tidak terbedakan
2. Memenuhi eksklusi Pauli

Distribusi Fermi-Dirac

$$\Delta N_j = \frac{g_j}{e^{-(\alpha + \beta \epsilon_j)} + 1}$$

Pernyataan degenerasi  $g$  sebagai fungsi kecepatan:  
(lihat aplikasi stat. M-B pada distribusi kecepatan)

$$g_v = \frac{8\pi m^3 V}{h^3} v^2 \Delta v$$

Nyatakan kembali degenerasi  $g$  sebagai fungsi energi:

$$\epsilon = \frac{1}{2} m v^2$$

$$g_\epsilon = 4\pi V \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \epsilon^{1/2} \Delta \epsilon = A \epsilon^{1/2} \Delta \epsilon$$

$$\text{dengan } A = 4\pi V \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2}$$

# Gas Elektron

Distribusi Fermi-Dirac:

$$\Delta N_\varepsilon = \frac{g_\varepsilon}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon)} + 1} = A \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{-(\alpha+\beta\varepsilon)} + 1} \Delta\varepsilon$$

$$\text{Nilai } \beta = -\frac{1}{kT}$$

Nilai  $\alpha$ :

$$\sum \Delta N = N$$

$$N = A \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2}}{e^{-\alpha} e^{\varepsilon/kT} + 1} d\varepsilon$$

Solusinya dalam bentuk deret  
oleh *Sommerfeld*

$$\text{Namakan } \alpha = \frac{\mu}{kT}$$

$$\mu = \varepsilon_F \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^2 + \frac{\pi^4}{80} \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^4 + \dots \right]$$

$\varepsilon_F$  adalah energi Fermi:

1. konstan untuk setiap logam
2. bergantung jumlah elektron persatuan volume (N/V)

# Gas Elektron

Distribusi Fermi-Dirac pada  $T = 0$  K:

$$\Delta N^0 = \frac{g_\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}\right) + 1} = A \frac{\varepsilon^{1/2} \Delta\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT}\right) + 1}$$

Kasus  $\varepsilon - \varepsilon_F < 0$

$$\frac{\varepsilon - \varepsilon_F}{kT} = -\infty$$



$$\Delta N^0 = g_\varepsilon = A \varepsilon^{1/2} \Delta\varepsilon$$



Pada  $T = 0$  K, jumlah elektron sama dengan jumlah keadaan energi dan semua tingkat energi di bawah  $\varepsilon_F$  terisi penuh elektron.

# Gas Elektron

Kasus  $\varepsilon - \varepsilon_F > 0$

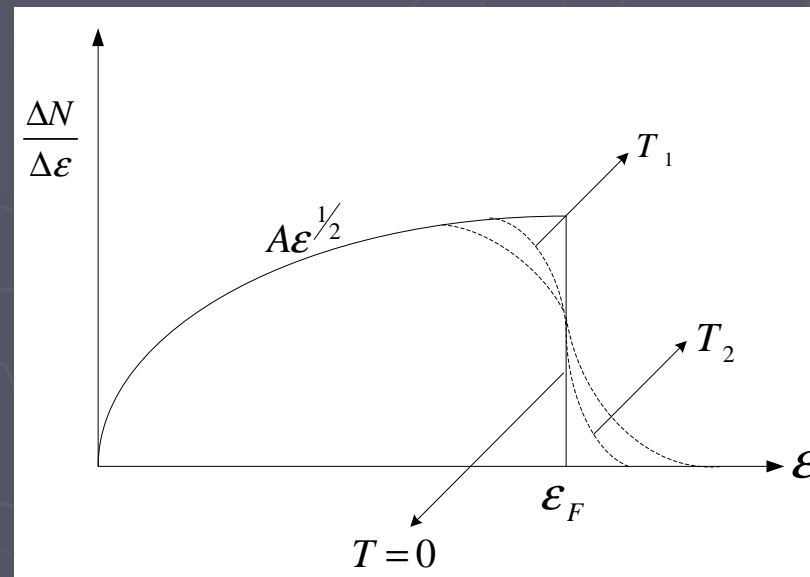
$$\Delta N^0 = 0$$

Pada  $T = 0$  K, tidak ada elektron pada tingkat ini



Energi Fermi  $\varepsilon_F$  adalah energi maksimum yang dimiliki oleh elektron pada  $T = 0$  K

Grafik fungsi distribusi elektron bebas dalam logam, pada  $T=0$  dan dua temperatur yang lebih tinggi  $T_1$  dan  $T_2$



# Gas Elektron

Berapa besarnya energi Fermi  $\varepsilon_F$  ini?

$$\sum \Delta N^0 = N$$



$$N = A \int_0^{\varepsilon} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon = \frac{2}{3} A \varepsilon_F^{3/2}$$



$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{8m} \left( \frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}$$

Energi Fermi  $\varepsilon_F$  bergantung jumlah elektron persatuan volume ( $N/V$ ) dan tidak bergantung temperatur

# Gas Elektron

Berapa besarnya energi total  $U$  sistem ini?

$$U = \sum \varepsilon \Delta N$$

$$U = A \int_0^{\infty} \frac{\varepsilon^{3/2}}{\exp[(\varepsilon - \mu)/kT] + 1}$$

Solusi dalam bentuk deret

$$U = \frac{3}{5} N \varepsilon_F \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right) - \frac{\pi^4}{16} \left( \frac{kT}{\varepsilon_F} \right)^4 + \dots \right]$$

$$U^o = \frac{3}{5} N \varepsilon_F$$

Energi rata-rata tiap elektron pada  $T=0$ :

$$\overline{\varepsilon}^o = \frac{U^o}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F$$



# Gas Elektron

Berapa besar kapasitas kalor gas elektron pada volume konstan?

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$



$$C_V = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right) Nk \left[ 1 - \frac{3\pi^2}{10} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$



Jika temperatur tidak terlalu besar, aproksimasi:

$$C_V = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right) Nk$$



Ganti  $Nk$  dengan  $nR$ , diperoleh kapasitas kalor spesifik permol:

$$c_V = \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right) R$$

# Gas Elektron

Berapa besar entropi gas elektron ini?

$$dQ_r = C_V dT = T dS$$



$$S = \int_0^T \frac{dQ_r}{T} = \int_0^T \frac{C_V}{T} dT$$



$$S = Nk \frac{\pi^2}{2} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right) \left[ 1 - \frac{\pi^2}{10} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

Pada  $T = 0$  K,  $S = 0$

# Gas Elektron

Berapa besar tekanan pada gas elektron ini?

Fungsi Helmholtz:  $F = U - TS$

$$F = \frac{3}{5} N \epsilon_F \left[ 1 - \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$

Tekanan gas elektron:  $P = - \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T$

Persamaan keadaan gas elektron

$$P = \frac{2}{5} \frac{N \epsilon_F}{V} \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\epsilon_F} \right)^2 + \dots \right]$$