

BAB 3

Pengantar Metode Statistik

- ✓ Ensambel Statistik
- ✓ Distribusi Binomial
- ✓ Nilai Rata-rata Sistem Spin
- ✓ Distribusi Probabilitas Kontinu

Riview Bab 2 :

Konsep probabilitas sangat penting digunakan untuk memahami sistem makroskopik

Penggunaan Konsep Probabilitas:

1. Permainan (Game)
2. Bisnis Asuransi
3. BMG (Prakiraan Cuaca)
4. Biologi (Genetika)
5. Dll.

Penggunaan Konsep Probabilitas dalam Bidang Fisika:

- Peluruhan Radioaktif
- Sinar kosmik yang sampai ke permukaan bumi
- Emisi acak elektron dari filamen panas
- Deskripsi atom & molekul dalam kuantum

Ensambel Statistik

- Tinjau sebuah sistem A dimana dapat dilakukan suatu eksperimen
- Apakah kita dapat mengetahui secara pasti hasil yang akan kita peroleh jika eksperimennya dilakukan tunggal?
- Tidak, mengapa?
- Karena informasi yang diperoleh dari sistem tidak cukup untuk membuat suatu prediksi hasil eksperimen.
- Lalu, bagaimana supaya kita dapat memprediksi hasil eksperimen tersebut?
- Perlu banyak informasi tentang sistem.
- Caranya, eksperimen yang sama dilakukan berulang-ulang sebanyak mungkin.
- Sehingga kita dapat memprediksi hasil eksperimen melalui **Konsep Probabilitas**
- Bagaimana cara menggunakan Konsep Probabilitas tersebut?

- Tinjau sebuah ensambel yang terdiri dari N buah (sangat besar) sistem **identik** dengan sistem A
- Identik juga termasuk perlakuan yang sama untuk tiap sistem seperti pada sistem A

Misalkan hasil eksperimen **tertentu** disimbolkan dengan r dan diantara N sistem dalam ensambel, N_r buah sistem yang memiliki hasil eksperimen **tertentu** yang sama.

Maka probabilitas munculnya hasil eksperimen r ditulis:

$$P_r = \frac{N_r}{N}$$

Kesimpulan:

Probabilitas munculnya hasil sebuah eksperimen pada sebuah sistem dapat ditentukan dengan mengulang eksperimen yang sama sebanyak mungkin

Distribusi Binomial

- ✓ Tinjau sistem ideal berupa N buah partikel spin $1/2$ ditempatkan dalam medan magnet \mathbf{B}
- ✓ Apa yang terjadi?
- ✓ Maka tiap momen magnetiknya dapat dapat paralel (up) atau anti paralel (down) dengan arah \mathbf{B}

Tinjau satu spin saja, probabilitas keadaan up : p
probabilitas keadaan down : q

$$\text{Maka } p + q = 1$$

$$\text{Ketika } B = 0, p = q = 1/2$$

$$B \neq 0, p > q$$

Pertanyaan:

Bila n : jumlah momen magnetik yang paralel dan

n' : jumlah momen magnetik yang anti paralel

dan $n + n' = N$, maka

untuk setiap nilai n yang mungkin, berapa probabilitas $P(n)$ yaitu n dari N momen magnetik total yang up?

Jawab

p : probabilitas sebuah momen magnetik arah up

q : probabilitas sebuah momen magnetik arah down

Maka

Probabilitas munculnya satu keadaan/konfigurasi dimana n momen magnetik up dan n' momen magnetik down adalah

$$p.p \dots p . q.q \dots q = p^n q^{n'}$$

- ▶ Tetapi, keadaan untuk n momen magnetik yang up dapat bervariasi
- ▶ maka dikenalkan:

$$C_n^N$$

yaitu jumlah keadaan yang berbeda dari N momen magnetik dimana n momen magnetik berarah up (n' momen magnetik down) dimana

$$C_n^N = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

- ▶ Sehingga P(n) :

$$P(n) = C_n^N p^n q^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

Nilai Rata-rata

$$\bar{u} = \frac{N_1 u_1 + N_2 u_2 + \dots + N_\alpha u_\alpha}{N} = \frac{\sum_{r=1}^{\alpha} N_r u_r}{N} = \sum_{r=1}^{\alpha} P_r u_r$$

Karena $\frac{N_r}{N} = P_r$

Jika $f(u)$ adalah fungsi dari u maka rata - rata f atau $\overline{f(u)}$:

$$\overline{f(u)} = \sum_{r=1}^{\alpha} P_r f(u_r)$$

Nilai Rata-rata

Jika $f(u)$ dan $g(u)$ fungsi dari u , maka

$$\begin{aligned}\overline{f(u) + g(u)} &= \sum_{i=1}^N p_i [f(u_i) + g(u_i)] = \sum_{i=1}^N p_i f(u_i) + \sum_{i=1}^N p_i g(u_i) \\ &= \overline{f(u)} + \overline{g(u)}\end{aligned}$$

Jika c konstanta, maka

$$\begin{aligned}\overline{cf(u)} &= \sum_{i=1}^N p_i [cf(u_i)] = c \sum_{i=1}^N p_i f(u_i) \\ &= c \overline{f(u)}\end{aligned}$$

Jika Δu adalah simpangan dari rata-rata \bar{u} , maka

$$\Delta u = u - \bar{u}$$

Rata-rata simpangan:

$$\begin{aligned}\overline{\Delta u} &= \overline{(u - \bar{u})} = \sum_{i=1}^N p_i u_i - \sum_{i=1}^N p_i \bar{u} = \bar{u} - \bar{u} \sum_{i=1}^N p_i \\ &= \bar{u} - \bar{u} = 0\end{aligned}$$

Rata-rata kuadrat simpangan/dispersi/varians:

$$\overline{(\Delta u)^2} = \sum_{r=1}^{\alpha} P_r (\Delta u)^2 = \sum_{r=1}^{\alpha} P_r (u_r - \bar{u})^2 \geq 0$$

$$\begin{aligned}\text{Karena } \overline{(\Delta u)^2} &= \overline{(u - \bar{u})^2} = \overline{(u^2 - 2u\bar{u} + \bar{u}^2)} = \overline{u^2} - 2\bar{u}\bar{u} + \bar{u}^2 \\ &= \overline{u^2} - \bar{u}^2 \geq 0\end{aligned}$$

Standar Deviasi:

$$\underline{\Delta u} = \sqrt{(\Delta u)^2}$$

Latihan
Buku Reif no 2.9 dan 2.13

Nilai Rata-rata Sistem Spin

- Tinjau sebuah sistem ideal yang terdiri N spin $\frac{1}{2}$
- Berapakan nilai rata-rata momen magnetik totalnya (\overline{M})
- Momen magnetik total adalah penjumlahan momen magnetik dari semua spin:

$$M = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 + \dots + \mu_N = \sum_{i=1}^{i=N} \mu_i$$

- Rata-rata momen magnetik:

$$\overline{M} = \overline{\sum_{i=1}^{i=N} \mu_i} = \sum_{i=1}^{i=N} \overline{\mu_i}$$

- Karena probabilitas tiap momen magnetik berarah up atau down sama, maka rata-rata momen magnetik tiap spin sama juga, sehingga

$$\overline{M} = N\overline{\mu}$$

Standar Deviasi Sistem Spin

- Kita cari dispersi/varians dari sistem spin tersebut:

$$\overline{(\Delta M)^2}$$

$$\Delta M = M - \bar{M} = \sum_{i=1}^{i=N} (\mu_i - \bar{\mu}) = \sum_{i=1}^{i=N} \Delta\mu_i$$

$$(\Delta M)^2 = (\Delta M)(\Delta M) = \left(\sum_{i=1}^{i=N} \Delta\mu_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{i=N} \Delta\mu_i \right) = (\Delta\mu_1 + \Delta\mu_2 + \Delta\mu_3 + \dots) \cdot (\Delta\mu_1 + \Delta\mu_2 + \Delta\mu_3 + \dots)$$

$$(\Delta M)^2 = \{(\Delta\mu_1)^2 + (\Delta\mu_2)^2 + (\Delta\mu_3)^2 + \dots + (\Delta\mu_N)^2\} + \{(\Delta\mu_1\Delta\mu_2) + (\Delta\mu_1\Delta\mu_3) + (\Delta\mu_1\Delta\mu_4) + \dots + (\Delta\mu_1\Delta\mu_N)\} + \{(\Delta\mu_2\Delta\mu_1) + (\Delta\mu_2\Delta\mu_3) + (\Delta\mu_2\Delta\mu_4) + \dots + (\Delta\mu_2\Delta\mu_N)\} + \dots + (\Delta\mu_N\Delta\mu_N)$$

$$(\Delta M)^2 = \sum_{i=1}^{i=N} (\Delta\mu_i)^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\Delta\mu_i)(\Delta\mu_j), \text{ dengan } i \neq j \text{ sehingga}$$

$$\overline{(\Delta M)^2} = \overline{\sum_{i=1}^{i=N} (\Delta\mu_i)^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N (\Delta\mu_i)(\Delta\mu_j)} = \sum_{i=1}^{i=N} \overline{(\Delta\mu_i)^2} + \sum_{i=1}^{i=N} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{j=N} \overline{(\Delta\mu_i)(\Delta\mu_j)} = \sum_{i=1}^{i=N} \overline{(\Delta\mu_i)^2}$$

Standar Deviasi Sistem Spin

- Dispersi/variains dari sistem spin tersebut:

$$\overline{(\Delta M)^2} = \sum_{i=1}^{i=N} \overline{(\Delta \mu_i)^2}$$

- Karena probabilitas tiap momen magnetik berarah up atau down sama, maka dispersi/variains tiap spin sama juga, sehingga

$$\overline{(\Delta M)^2} = N \overline{(\Delta \mu_i)^2}$$

- Standar deviasinya:

$$\underline{\Delta M} = \underline{\Delta \mu} \sqrt{N}$$

Distribusi Probabilitas Kontinu

$$\sum_r P(u_r) = 1$$



$$\int_{a_1}^{a_2} P(u) du = 1$$

$$\overline{f(u)} = \sum_r P(u_r) f(u_r)$$



$$\overline{f(u)} = \int_{a_1}^{a_2} P(u) f(u) du$$

Rapat Probabilitas $P(u)$ didefinisikan dari sifat bahwa $P(u) du$ menghasilkan Probabilitas menemukan variabel kontinu u dalam range antara u dan $u + du$

Tugas 2

Buku Reif no 2.15, 2.16 dan 2.17

