

# Bab 4

## Deskripsi Statistik Sistem Partikel



# Bagaimana gambaran secara statistik dari sistem partikel?



Statistik + konsep mekanika

Hal-hal yang diperlukan dalam menggambarkan keadaan sistem partikel adalah:

1. Spesifikasi keadaan sistem.
2. Ensemble statistik.
3. Postulat statistik.
4. Perhitungan probabilitas

# 1. Spesifikasi keadaan sistem

Bagaimana menentukan keadaan suatu sistem partikel?



mengetahui gambaran keadaan partikelnya

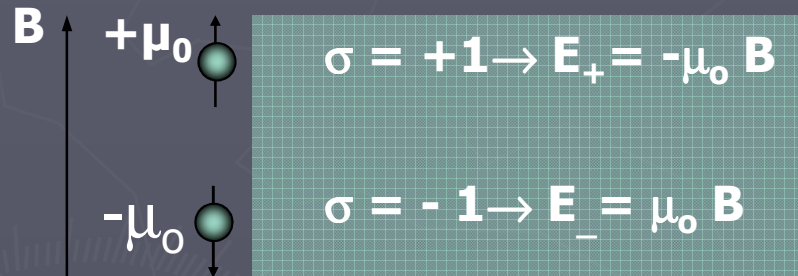
mekanika kuantum

Partikel-partikel penyusun sistem (atom dan molekul) dijelaskan dengan baik oleh hukum mekanika kuantum

# Contoh 1. Sistem spin tunggal

Sebuah partikel yang memiliki spin  $\frac{1}{2}$  dan besar momen magnetik  $\mu_0$  ditempatkan dalam medan magnetik luar  $B$ .

Apa yang terjadi!



<b>R</b> (keadaan)	<b><math>\sigma</math></b> (bil.kuantum)	<b>M</b> (momen magnetik)	<b>E</b> (Energi)
<b>1</b>	<b>+1</b>	<b><math>+\mu_0</math></b>	<b><math>-\mu_0 B</math></b>
<b>2</b>	<b>-1</b>	<b><math>-\mu_0</math></b>	<b><math>\mu_0 B</math></b>

Hanya ada dua kemungkinan keadaan!

## Contoh 2. Sistem N spin ideal

N buah partikel memiliki spin  $\frac{1}{2}$  dan besar momen magnetik  $\mu_0$  ditempatkan dalam medan magnetik luar B.

**Apa yang terjadi!**

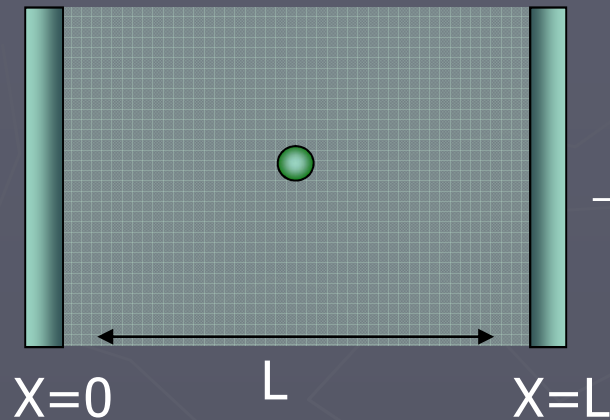
Tinjau untuk N=4

Isi tabel berikut!

<b>R</b> (keadaan)	$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$ (bil.kuantum)	<b>M</b> (momen magnetik)	<b>E</b> (energi)
<b>dst</b>			

**Ada 16 kemungkinan keadaan!**

## Contoh 3. Sebuah partikel dalam kotak 1-D



???

Energinya: 
$$\mathbf{E} = \frac{\pi^2 \hbar^2 \mathbf{n}^2}{2\mathbf{m} \mathbf{L}^2}$$

Dengan nilai n (bil.kuatum) = 1, 2, 3, ...

Ada berapa keadaan yang energinya:

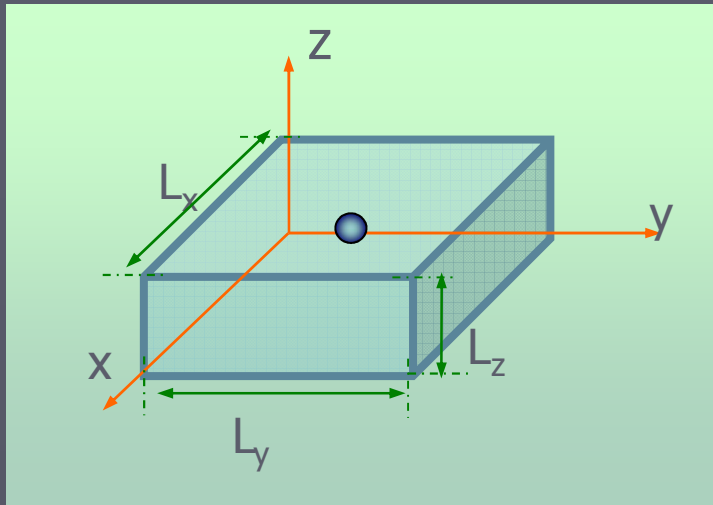
1. 
$$\mathbf{E} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2\mathbf{m}\mathbf{L}^2}$$
 (Satu keadaan)

2. 
$$\mathbf{E} = \frac{4\pi^2 \hbar^2}{2\mathbf{m}\mathbf{L}^2}$$
 (Satu keadaan)

3. 
$$\mathbf{E} = \frac{10\pi^2 \hbar^2}{2\mathbf{m}\mathbf{L}^2}$$
 (tidak ada keadaan)

4. 
$$\mathbf{E} < \frac{10\pi^2 \hbar^2}{2\mathbf{m}\mathbf{L}^2}$$
 (3 keadaan)

## Contoh 4. Sebuah partikel dalam kotak 3-D



???

Energinya:

$$\mathbf{E} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left\{ \frac{\mathbf{n}_x^2}{\mathbf{L}_x^2} + \frac{\mathbf{n}_y^2}{\mathbf{L}_y^2} + \frac{\mathbf{n}_z^2}{\mathbf{L}_z^2} \right\}$$

Dengan nilai  $n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, 4, \dots$

Bila  $L_x = L_y = L_z = L$ , maka energinya:

$$\mathbf{E} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (\mathbf{n}_x^2 + \mathbf{n}_y^2 + \mathbf{n}_z^2)$$

Berapa nilai energi terendah (ground state)!

Berapa nilai energi pada keadaan eksitasi pertama (tingkat 1)!

Ada berapa keadaan energi pada tingkat 1 tersebut!

Berapa nilai energi pada keadaan eksitasi kedua (tingkat 2)!

Ada berapa keadaan energi pada tingkat 2 tersebut!

## Contoh 5. Gas Ideal terdiri dari N Partikel dalam kotak 3-D

Berapa energi total gas (E) !

Energi total gas adalah jumlah dari energi tiap partikel penyusun

$$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_N$$

Keadaan tiap partikel dispesifikasi oleh 3 bilangan kuantum

$n_{ix}$ ,  $n_{iy}$ ,  $n_{iz}$  yang berkaitan dengan energi  $\varepsilon_i$  (contoh 4)

Sehingga untuk N partikel, jumlah bilangan kuantum yang muncul berjumlah

3N

$(n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}, n_{2x}, n_{2y}, n_{2z}, \dots, n_{Nx}, n_{Ny}, n_{Nz})$

Oleh Endi Suhendi



# Apa yang dapat anda simpulkan dari contoh 1 - contoh 5 di atas!

Contoh 1. Sistem spin tunggal:

bilangan kuantumnya:  $\sigma$

Jumlah keadaan yang mungkin: 2

Contoh 2. Sistem N spin ideal:

bilangan kuantumnya (N=4):  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$

Jumlah keadaan yang mungkin: 16

Contoh 3. Sebuah partikel dalam kotak 1-D:

bilangan kuantumnya:  $n$

Jumlah keadaan yang mungkin: tak berhingga

Contoh 4. Sebuah partikel dalam kotak 3-D:

bilangan kuantumnya:  $n_x, n_y, n_z$

Jumlah keadaan yang mungkin: tak berhingga

Contoh 5. Gas Ideal terdiri dari N Partikel dalam kotak 3-D

bilangan kuantumnya:  $n_{1x}, n_{1y}, n_{1z}, n_{2x}, n_{2y}, n_{2z}, \dots, n_{Nx}, n_{Ny}, n_{Nz}$

Jumlah keadaan yang mungkin: tak berhingga

# Kesimpulan

Setiap keadaan kuantum yang mungkin dari sebuah sistem dapat dispesifikasi oleh sejumlah  $f$  buah bilangan kuantum. Jumlah  $f$  ini dinamakan **derajat kebebasan** yaitu jumlah koordinat yang independen yang diperlukan untuk menjelaskan sistem.



**Keadaan** mikroskopik dari sebuah sistem dapat dijelaskan oleh keadaan kuantum tertentu dimana sistem ditemukan

## 2. Ensambel Statistik



Sejumlah keadaan kuantum yang diijinkan dari suatu sistem kuantum dengan syarat tertentu

### Contoh 1

Tinjau sebuah sistem yang terdiri dari empat buah partikel berspin  $\frac{1}{2}$  (harga momen magnetiknya  $\mu_0$ ) ditempatkan dalam medan magnet luar B. Jika sistem terisolasi dan energi totalnya  $E = -2\mu_0 B$ , ada berapa keadaan yang diijinkan yang mungkin dimiliki sistem tersebut!

### Contoh 2

Tinjau sebuah sistem  $A^*$  yang terdiri dari dua sub sistem A dan A'. Sub sistem A terdiri dari tiga partikel berspin  $\frac{1}{2}$  (harga momen magnetiknya  $\mu_0$ ) dan sub sistem A' terdiri dari dua partikel berspin  $\frac{1}{2}$  (harga momen magnetiknya  $2\mu_0$ ). Apabila sistem  $A^*$  tersebut terisolasi dan ditempatkan dalam medan magnet luar B, ada berapa keadaan yang diijinkan untuk nilai energi total sistem  $A^*$  tersebut bernilai  $E = -3\mu_0 B$ !

### 3. Postulat Statistik



Membuat prediksi secara teoritis dari suatu sistem berkaitan dengan nilai probabilitas atau nilai rata-rata



Keseimbangan

Postulat Statistik :

1. Jika dalam sistem terisolasi ditemukan harga probabilitas yang sama untuk setiap keadaan, maka sistem tersebut berada dalam keadaan setimbang.
2. Jika dalam sistem yang terisolasi tidak ditemukan harga probabilitas yang sama untuk setiap keadaan, maka sistem tersebut tidak berada dalam keadaan setimbang dan akan mengalami perubahan hingga kesetimbangan tercapai, dimana setiap keadaannya memiliki probabilitas yang sama.

## 4. Perhitungan Probabilitas

Tinjau sebuah sistem terisolasi berada dalam kesetimbangan dan jumlah total keadaan yang diijinkan dinyatakan dengan  $\Omega$ . Maka probabilitas menemukan keadaan  $\Omega_i$  adalah

$$P_i = \frac{\Omega_i}{\Omega}$$

Untuk menentukan nilai rata-rata dari suatu parameter  $y$  (misalnya momen magnetik) maka

$$\bar{y} \equiv \sum_i^n P_i y_i = \frac{1}{\Omega} \sum_i^n \Omega_i y_i$$

### Contoh

Tinjau kembali sistem yang terdiri empat partikel berspin  $1/2$  dan berenergi  $E = -2\mu_0 B$ . Jika sistem dalam keadaan setimbang, berapa probabilitas  $P_+$  yaitu momen magnetik berarah up! Berapa momen magnetik rata-ratanya yang searah medan magnet!

# Jumlah keadaan yang diijinkan dari sebuah sistem makroskopik

Tinjau sebuah sistem makroskopik dengan energi totalnya  $E$ . Untuk menghitung jumlah keadaan total yang diijinkan, kita akan kelompokkan keadaan-keadaan energi dengan membagi skala energi dengan interval yang kecil yang besarnya tetap yaitu  $\delta E$  dimana:

$\delta E$  sangat kecil pada skala makroskopik (sangat kecil dibanding energi total sistem),

$\delta E$  cukup besar pada skala mikroskopik (lebih besar dari energi partikel tunggal dari sistem) dan

pada interval  $\delta E$  terdapat banyak keadaan kuantum dari sistem

Perkenalkan Notasi berikut:

$\Omega(E)$  = Jumlah keadaan yang energinya antara  $E$  dan  $E + \delta E$

$\Phi(E)$  = Jumlah total keadaan yang energinya kurang dari  $E$

Maka

$$\Omega(E) = \Phi(E + \delta E) - \Phi(E) = \frac{d\Phi}{dE} \delta E$$

### Contoh 1

Partikel tunggal dalam kotak 1-D

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \frac{n^2}{L^2}$$

→

$$\Phi(E) = n = \frac{L}{\pi \hbar} \sqrt{2mE}$$

→

$$\Omega(E) = \frac{L}{2\pi \hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \delta E$$

### Contoh 2

Partikel tunggal dalam kotak 3-D

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

↓

$$\Phi(E) = \frac{1}{8} \left( \frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{\pi}{6} \left( \frac{L}{\pi \hbar} \right)^3 (2mE)^{3/2}$$

↓

$$\Omega(E) = \frac{L^3}{4\pi^2 \hbar^3} (2m)^{3/2} E^{1/2} \delta E$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = \left( \frac{L}{\pi \hbar} \right)^2 (2mE) = R^2$$

↓

$$R = \frac{L}{\pi \hbar} \sqrt{2mE}$$

# Tugas 3

Buku Reif no 3.6, 3.7 dan 3.8