Aplikasi Statistik Maxwell-Boltzmann

Distribusi Kecepatan Molekul

Distribusi Kecepatan Molekul

Berapakah laju rata-rata sebuah molekul dalam suatu sistem gas ideal bersuhu T?

$$\frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3}{2}kT$$

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Apakah semua molekul mempunyai laju sama dengan harga di atas?

Bagaimana distribusi laju molekul pada sistem gas ideal bersuhu T?

Saat ini kita akan menentukan distribusi laju molekul pada sistem gas ideal bersuhu T

Distribusi Kecepatan Molekul

Gas Ideal → Statistik Maxwell- Boltzmann, mengapa!

1. Molekul-molekul dapat dibedakan
2. Setiap keadaan energi dapat diisi lebih dari satu molekul

$$N_j = \frac{N}{Z} g_j \exp\left(-\frac{\varepsilon_j}{kT}\right) \longrightarrow \Delta N_j = \frac{N}{Z} \Delta g_j \exp\left(-\frac{\varepsilon_j}{kT}\right)$$

Jumlah keadaan yang energinya antara ε_j dan $\varepsilon_j + \Delta\,\varepsilon_j$

Jumlah rata-rata molekul yang energinya antara ε_j dan $\varepsilon_j + \Delta\,\varepsilon_j$

$$\Omega(\varepsilon_j) = \Delta g_j = \frac{d\Phi(\varepsilon_j)}{d\varepsilon} \Delta\varepsilon \quad \text{........}(1)$$

Distribusi Kecepatan Molekul

Tinjau sistem partikel dalam kotak 3-D:

$\Phi(\varepsilon)$ = Jumlah keadaan yang energinya kurang dari dan sama dengan ε_j

$$\Phi(\varepsilon) = \frac{1}{8}\,\text{volume bola} = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{dengan } R^2 = n_j^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

Nyatakan dalam n_j

$$\Phi(n_j) = \frac{1}{8}\frac{4}{3}\pi n_j^3 = \frac{\pi}{6} n_j^3 \quad .....(2)$$

$$\Omega(n_j) = \Delta g_j = \frac{d\Phi(n_j)}{dn_j}\Delta n_j = \frac{\pi}{2} n_j^2 \Delta n_j \quad .....(3)$$

Pernyataan energi ε_j :

$$\varepsilon_j = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) = \frac{h^2}{8m} V^{-2/3} n_j^2 \quad .....(4)$$

Distribusi Kecepatan Molekul

Fungsi Partisi Z:

$$Z = \sum \Delta g_j \exp\left(-\frac{\varepsilon_j}{kT}\right) = \frac{\pi}{2}\sum_j n_j^2 \Delta n_j \exp\left(-\frac{h^2 V^{-2/3}}{8mkT} n_j^2\right)$$

Aproksimasi (PR no 1)

$$Z = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty n_j^2 \exp\left(-\frac{h^2 V^{-2/3}}{8mkT} n_j^2\right) dn_j = V\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} \quad .....(5)$$

Distribusi Kecepatan Molekul

Sekarang kita nyatakan indeks n pada persamaan-persamaan sebelumnya menjadi indeks *v* (kecepatan):

Pernyataan energi :

$$\varepsilon_j = \frac{h^2}{8m} V^{-2/3} n_j^2 = \frac{1}{2} m v_j^2 \quad .....(6)$$

+ persamaan (3)

$\downarrow$ PR no 2

$$\Delta g_v = \frac{4\pi m^3 V}{h^3} v^2 \Delta v \quad .....(7)$$

Statistik Maxwell-Boltzmann menjadi:

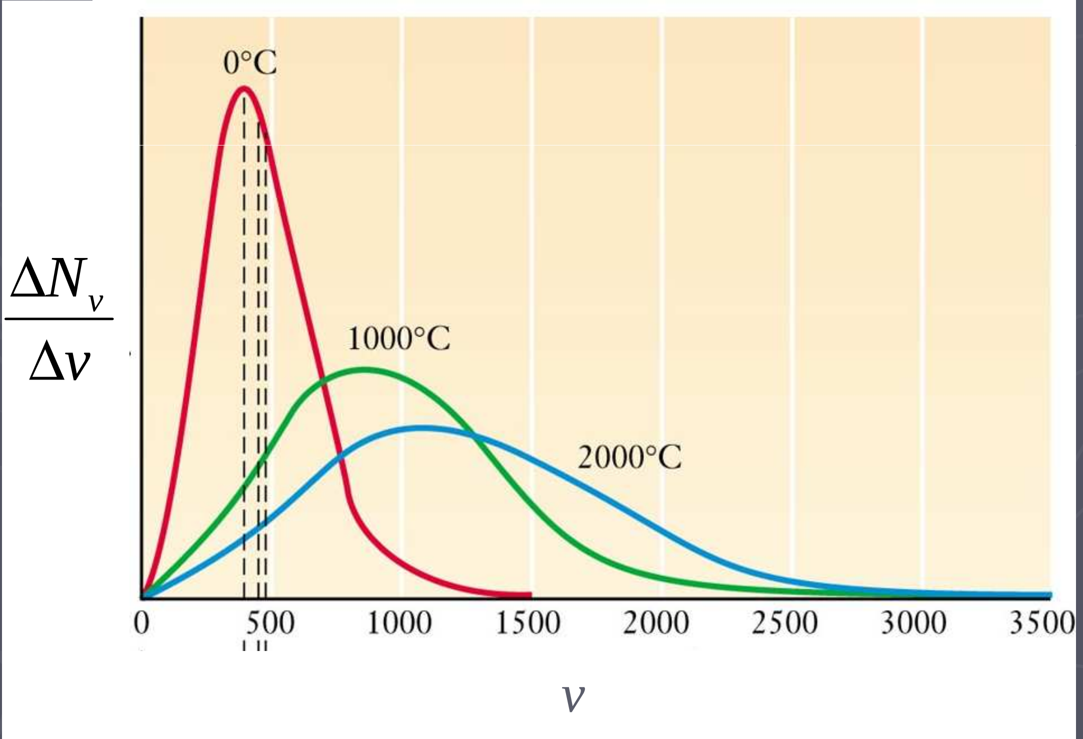
$$\Delta N_v = \frac{4N}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{m}{2kT} \right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right) \Delta v \quad ....(8)$$

Jumlah rata-rata molekul yang lajunya antara v dan $v + \Delta v$

Distribusi Kecepatan Molekul

$$\Delta N_v = \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\Delta v \longrightarrow \frac{\Delta N_v}{\Delta v} = \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \quad ...(9)$$

Fungsi Distribusi laju Maxwell-Boltzmann



Grafik fungsi distribusi MB pada suhu berbeda

Ketika v = 0, fungsi distribusi bernilai nol.

Artinya?

Tidak ada molekul yang diam

Distribusi Kecepatan Molekul

Laju dengan peluang terbesar v_m:

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{\Delta N_v}{\Delta v}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dv}\left(\frac{4N}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{m}{2kT}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\right) = 0$$

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad .....(10)$$

PR no 3

Fungsi distribusi MB dinyatakan dalam v_m:

$$\frac{\Delta N_V}{\Delta v} = \frac{4N}{\sqrt{\pi} v_m^{\ 3}} v^2 \exp\left(\frac{-v^2}{v_m^{\ 2}}\right) \quad .....(11)$$

PR no 4

Distribusi Kecepatan Molekul

Laju rata-rata molekul :

$$\bar{v} = \frac{1}{N}\sum v\Delta N_v$$

Aproksimasi

$$\bar{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}\, v_m^{\,3}}\int_0^\infty v^3 \exp\left(\frac{-v^2}{v_m^{\,2}}\right)dv$$

$$\bar{v} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_m = \sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{kT}{m}} \quad \ldots(12)$$

PR no 5

Distribusi Kecepatan Molekul

Kelajuan root-mean-square (v_{rms}):

$$v_{rms} = \sqrt{\overline{v^2}} = \left(\frac{1}{N} \sum v^2 \Delta N_V \right)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{4}{\sqrt{\pi} v_m{}^3} \int_0^\infty v^4 \exp\left(\frac{-v^2}{v_m{}^2} \right) dv \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\downarrow$$

$$v_{rms} = \frac{3}{2} v_m = \sqrt{3 \frac{kT}{m}} \quad .....(13)$$

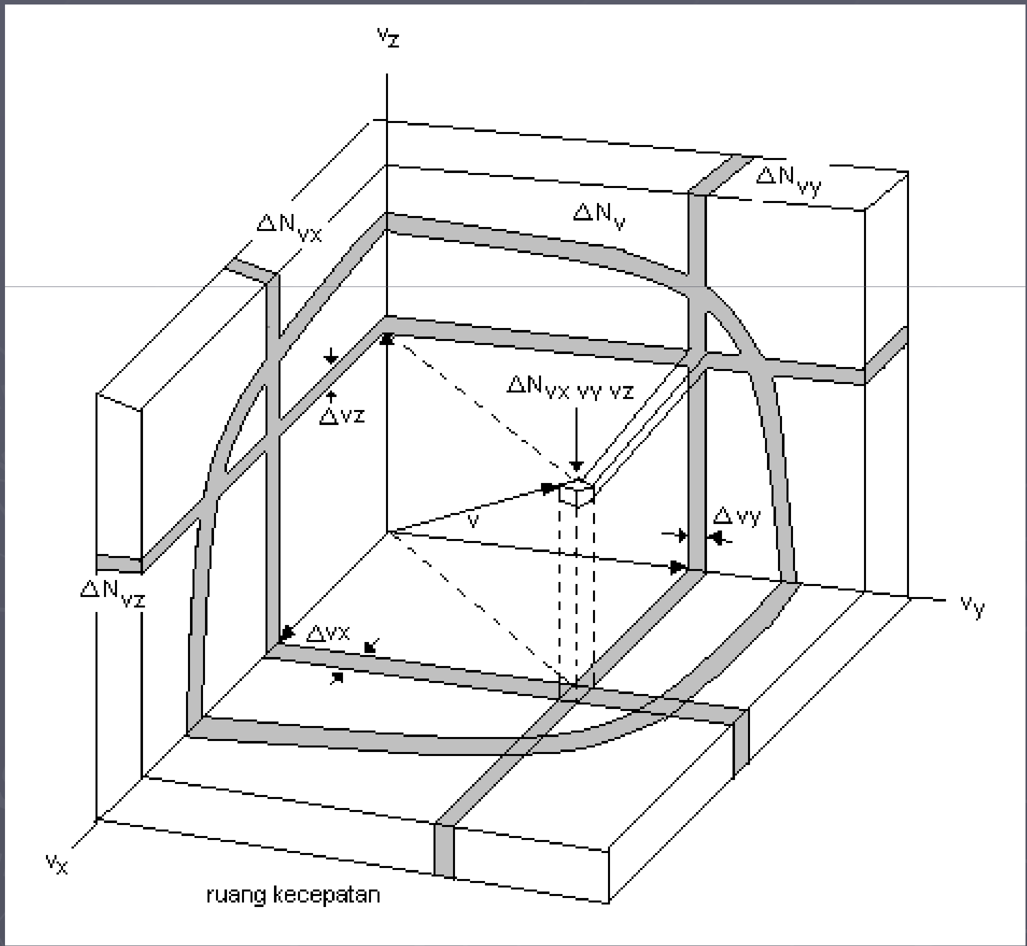
PR no 6

Perbandinan ketiga jenis kelajuan:

$$v_m : \bar{v} : v_{rms} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} : \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} : \sqrt{\frac{3kT}{m}} = 1 : 1{,}128 : 1.224$$

Distribusi Kecepatan Molekul

Visualisasi ruang kecepatan:



ΔN_V = Jumlah vektor kecepatan yang berujung pada kulit bola, yang kecepatannya antara v dan v + Δv

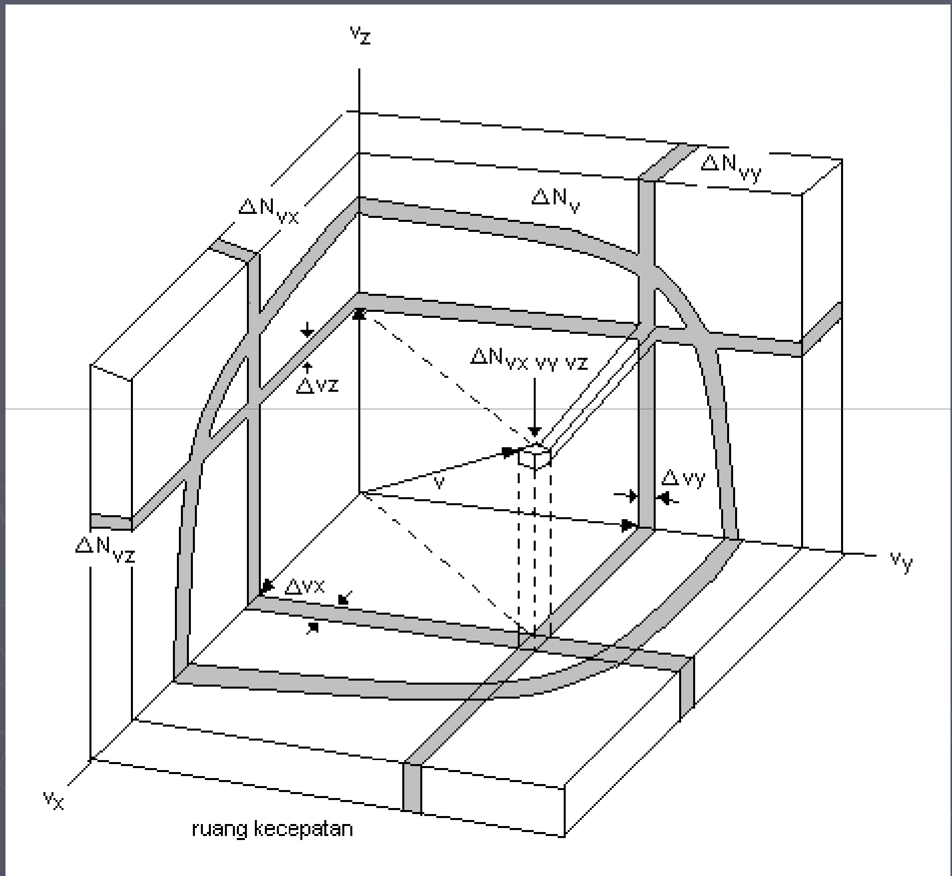
Volume kulit bola : $4\pi v^2 \Delta v$

Jumlah titik representatif tiap satuan volume dalam kulit atau kerapatan ρ_v :

$$\rho_v = \frac{\Delta N_v}{4\pi v^2 \Delta v} = N\left(\frac{1}{\sqrt{\pi} v_m}\right)^3 \exp\left(-\frac{v^2}{v_m^2}\right)$$

Distribusi Kecepatan Molekul

Visualisasi ruang kecepatan:



Tinjau elemen volum $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$ dalam ruang kecepatan

Jumlah titik representatif dalam elemen volume $\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$ adalah ΔN_{VxVyVz}

Sehingga

$$\Delta N_{v_x v_y v_z} = \rho_v \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$$

$$\Delta N_{V_X V_Y V_Z} = N\left(\frac{1}{\sqrt{\pi} v_m}\right)^3 \exp\left[\frac{-\left(v_z^{\ 2} + v_y^{\ 2} + v_z^{\ 2}\right)}{v_m^{\ 2}}\right] \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$$

Distribusi Kecepatan Molekul

$$\Delta N_{V_X V_Y V_Z} = N\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}v_m}\right)^3 \exp\left[\frac{-\left(v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2\right)}{v_m{}^2}\right]\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z$$

Jumlah molekul yang kecepatannya antara v_x dan $v_x + \Delta v_x$, v_y dan $v_y + \Delta v_y$, v_z dan $v_z + \Delta v_z$

Tinjau salahsatu komponen saja, misalkan komponen x:

Jumlah molekul yang kecepatannya antara v_x dan $v_x + \Delta v_x$ = ΔN_{Vx}

$$\Delta N v_x = N\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}v_m}\right)^3 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-v_y{}^2}{v_m{}^2}\right) dv_y \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-v_z{}^2}{v_m{}^2}\right) dv_z\right] \exp\left(\frac{-v_x{}^2}{v_m{}^2}\right)\Delta v_x$$

Serupa untuk ΔN_{Vy} dan ΔN_{Vz}

PR no 7

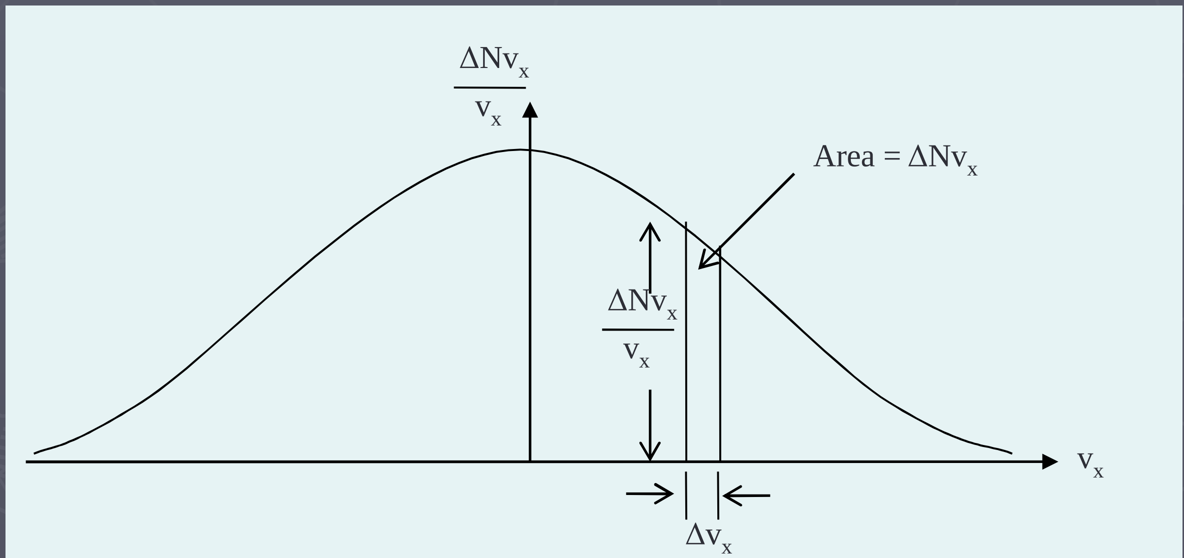
$$\frac{\Delta N v_x}{\Delta v_x} = N\frac{1}{\sqrt{\pi}v_m}\exp\frac{-v_x{}^2}{v_m{}^2}$$

Fungsi distribusi kecepatan Maxwell-Boltzmann untuk satu komponen kecepatan

Distribusi Kecepatan Molekul

Fungsi distribusi kecepatan Maxwell-Boltzmann untuk satu komponen kecepatan

$$\frac{\Delta N v_x}{\Delta v_x} = N \frac{1}{\sqrt{\pi} v_m} \exp \frac{-v_x^{\;2}}{v_m^{\;2}}$$



Bentuk mirip distribusi Gauss